



OGRANICZENIA MODELOWANIA NA PRZYKŁADZIE ANALIZ DYNAMIKI WAŁU KORBOWEGO

Lech Murawski

Gdynia Maritime University
Faculty of Marine Engineering
ul. Morska 81-87, 81-225 Gdynia, Poland
tel.: +4858 5586 481
email: l.murawski@wm.umg.edu.pl

Streszczenie

Analizowane zjawiska fizyczne należy upraszczać maksymalnie mocno, ale tak, żeby powstałe modele dawały poprawne przewidywania wyników eksperymentalnych. Naukowiec powinien jednak zdawać sobie sprawę z ograniczeń i zakresu stosowalności danego modelu. Inżynier nie może zapominać, że posługuje się tylko modelem rzeczywistości, który ma swoje ograniczenia - zakres stosowalności. W pracy przedstawiono analizy dynamiki układu tłokowo-korbowego silnika okrętowego ze szczególnym uwzględnieniem ruchu wału korbowego. W świetle współczesnych badań, świat fizyczny jest nieliniowy i dynamiczny w stanach dalekich od stanu równowagi. Jednakże większość problemów inżynierskich jest modelowanych liniowo, jako zjawiska statyczne bądź quasi-statyczne. Podejście to jest użyteczne i optymalne, ale nie można zapominać o ograniczeniach takich modeli. Wykazano, że pomimo przyjęcia ściśle deterministycznych oraz w pełni liniowych równań mechaniki, przewidywalność dokładnych parametrów ruchu jest ograniczona. Rozważono ruch prostego obiektu mechanicznego: obrót wału korbowego silnika. W rozważanym przypadku jest to wał korbowy 10-cylindrowego, okrętowego silnika wolnoobrotowego: 10K98 firmy MAN B&W. Założono, że znana jest z nieskończoną (!) dokładnością prędkość obrotowa wału, która jest dodatkowo niezmienna. Przyjęto, że również czas jest możliwy do wyznaczenia nieskończenie dokładnie. W takim przypadku względne położenie wykorbienia określa w pełni deterministyczna prosta zależność. W celu znajomości położenia danego wykorbienia w dowolnej chwili czasu musimy jeszcze znać warunki początkowe. Kąt obrotu w chwili $t=0$ wyznaczono niezwykle dokładnie, ale ze skończoną dokładnością. Wykazano, że po pewnym czasie położenie wykorbienia jest całkowicie niezdeterminowane. Co więcej, ruch układu tłokowo-korbowego charakteryzuje się naturalną zmiennością, nawet po pominięciu zmienności sił wymuszających. Wpływa to dodatkowo na ograniczenia modelowania rozważanego deterministycznego układu fizycznego.

Słowa kluczowe: modelowanie, determinizm, równania ruchu, układ tłokowo-korbowy, wał korbowy

1. Wstęp

Modelowanie procesów i zjawisk fizycznych jest tak powszechne w praktyce inżynierskiej, że jest często niezauważalne. Pełne uświadomienie sobie tego, że najdokładniejszy model nie jest rzeczywistością fizyczną - ma swoje ograniczenia, jest niezwykle ważne podczas analiz różnych zagadnień inżynierskich. Zestawienie zdjęcia rzeczywistego statku w budowie z jego dokładnym modelem wykonanym do obliczeń drgań globalnych kadłuba i nadbudówki statku (rys. 1) pokazuje zasadnicze różnice między obiektem fizycznym a jego modelem. Często, nie w pełni jest uświadamiany pełen proces przeprowadzania obliczeń, który prowadzi od modelowania obiektu fizycznego, poprzez model matematyczny do obliczeń numerycznych. Na każdym etapie tego procesu wprowadzamy pewne przybliżenia - nieścisłości, które powinny być kontrolowane najlepiej przez badania pomiarowe. Nie należy zapominać, że weryfikacja musi obejmować

zarówno obliczenia jak i pomiary. Metoda matematyczno - empiryczna króluje we współczesnych naukach technicznych. Metoda ta polega na procesie iteracyjnym: hipoteza teoretyczna jest weryfikowana przez badania pomiarowe, a pomiary są projektowane na podstawie teorii zjawiska.



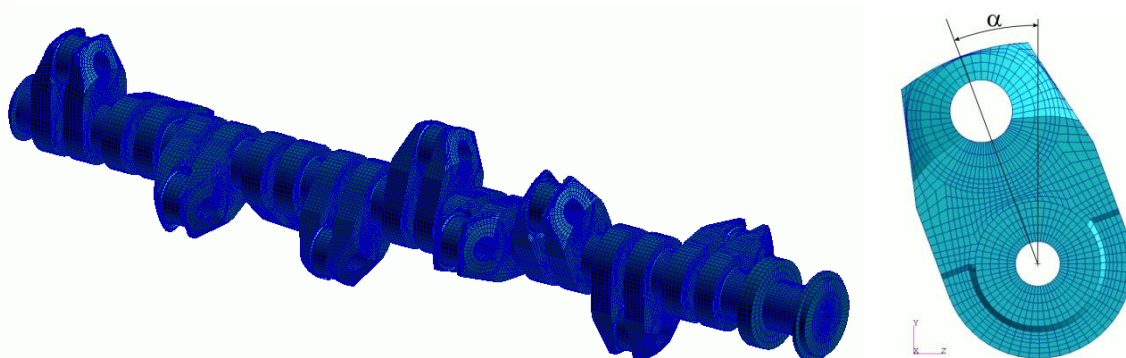
Rys. 1. Kontenerowiec o pojemności 2000 TEU i jego model MES

Znajomość metod modelowania (wraz z ich zakresem stosowania) oraz umiejętność zastosowania optymalnych metod dla oceny danego zjawiska jest niezbędne dla inżyniera analityka i praktyka. Należy podkreślić, że ten sam obiekt fizyczny może (i powinien!) być zamodelowany w różny sposób - model powinien być dostosowany do celu analiz. Przykładowo model kadłuba statku do obliczeń drgań globalnych jest różny od modelu przeznaczonego do obliczeń jego wytrzymałości statycznej, a oba modele nie nadają się do oceny poziomów drgań lokalnych (np. pokładów nadbudówki). Ponadto jest zwykle kilka dróg do przeprowadzenia danych analiz. Przykładowo masy niestrukturalne (np. ładunek statku), które nie powinny zmieniać macierzy sztywności, można zamodelować na kilka sposobów: np. poprzez zmianę masy właściwej danego regionu modelu, poprzez słabo związane bryły sztywne (jak na rys. 1), czy też poprzez wykorzystanie tzw. punktów MPC (Multiple Points Constraints). Reasumując, analizowane zjawiska należy upraszczać maksymalnie mocno, ale tak, żeby powstałe modele dawały poprawne przewidywania wyników eksperymentalnych.

2. Wyznaczanie położenia wykorbienia

W naszym umyśle, świat jest również modelowany (czyli przybliżany, bardzo często w sposób liniowy) przy pomocy liczb, które ze swojej natury są nieskończone i ciągłe. Operujemy funkcjami, które prawie powszechnie, w zastosowaniu do inżynierii są funkcjami ciągłymi. Zdecydowana większość liczb rzeczywistych ma nieskończone długie rozwinięcie w dziesiętnym systemie zapisu liczb. W praktyce niemożliwe jest używanie nieskończoności [4]. Dla inżyniera podanie, że dany obiekt ma długość 4 m to nie taka sama jak informacja jak, że ma długość 4,00 m. Pierwsza informacja mówi że obiekt ma długość pomiędzy 3,5 m a 4,4 m a druga daje informację, że długość obiektu wynosi 3,995-4,004. Dokładność obu informacji można oczywiście rozwijać teoretycznie w nieskończoność, ale tylko teoretycznie! Fakt ten, często nieświadomiany sobie przez inżyniera, ma swoje głębokie konsekwencje. Jeszcze w dziewiętnastym wieku przyjmowano, że jeżeli prawa rządzące światem są deterministyczne to wszystko (!) jest zdeterminowane (problem wolnej woli człowieka). Jeżeli znamy te prawa i warunki początkowe to w każdej chwili możemy określić stan danego obiektu z dowolną dokładnością. W rozumowaniu tym przyjmowano w sposób domyślny możliwość określenia warunków początkowych w sposób nieskończenie dokładny (nieskończone rozwinięcie liczb określających warunki początkowe).

Rozważmy ruch prostego obiektu mechanicznego: obrót wału korbowego silnika. W rozważanym przypadku jest to wał korbowy 10-cylindrowego, okrętowego silnika wolnoobrotowego: 10K98 firmy MAN B&W. Jego model MES został przedstawiony na rys. 2. Interesuje nas położenie danego wykorbienia wału (rys. 2) w dowolnej chwili czasu.



Rys. 2. Wał korbowy 10-cylindrowego okrętowego silnika wolnoobrotowego oraz położenie wykorbienia tego wału

Wykorbienia wału korbowego są równomiernie rozłożone; kolejność zapłonu określa kolejność obrotu względnego wykorbień. W silniku 10-cylindrowym wykorbienia są rozstawione co 36° . Zakładamy, że znana jest z nieskończoną (!) dokładnością prędkość obrotowa wału, która jest niezmienna w czasie. Również czas jest w pierwszym założeniu możliwy do wyznaczenia nieskończenie dokładnie. W takim przypadku względne położenie wykorbienia określa prosta, w pełni deterministyczna zależność: prędkość obrotowa pomnożona przez czas daje kąt obrotu wału. W celu znajomości położenia danego wykorbienia w dowolnej chwili czasu musimy jeszcze znać warunki początkowe: kąt α (rys. 2) w chwili $t=0$. Przyjmijmy, że początkowe położenie wału korbowego zostało wyznaczone niezwykle dokładnie:

$$\alpha_0 = 36,001^\circ$$

Taki zapis oznacza, że początkowy kąt obrotu wykorbienia został wyznaczony z dokładnością $\pm 0,001^\circ$. Rzeczywiste położenie katowe może wynosić $\alpha = 36,00149\dots^\circ$ lub $\alpha = 36,00050\dots^\circ$. Początkowe położenie katowe wału możemy zapisać (z pewnym uproszczeniem) w postaci:

$$\alpha_0 = 36,001n\text{nnnnn}\dots^\circ$$

Gdzie "n" oznacza nieznaną liczbę. Po dziesięciu zapłonach (w każdym cylindrze) wykorbienie obróci się o $10 \times 36^\circ$, czyli liczbę α_0 wystarczy pomnożyć przez dziesięć. W systemie dziesiętnym sprowadza się to do przesunięcia przecinka o jedną pozycję w prawo. W wyniku tej operacji otrzymamy:

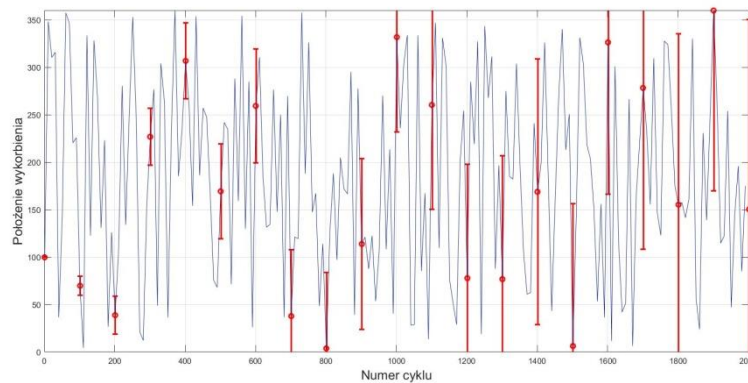
$$\alpha_{10} = 360,01n\text{nnnnn}\dots^\circ = 0,01n\text{nnnnn}\dots^\circ$$

Dokładność znajomości położenia wykorbienia jest nadal wysoka ($\pm 0,01^\circ$) ale zmniejszyła się dziesięciokrotnie! Po tysiącu zapłonów nasza dokładność znajomości położenia wykorbienia zmniejsza się do $\pm 1^\circ$ ponieważ:

$$\alpha_{1000} = 36001,nnnnn}\dots^\circ = 1,nnnnn}\dots^\circ$$

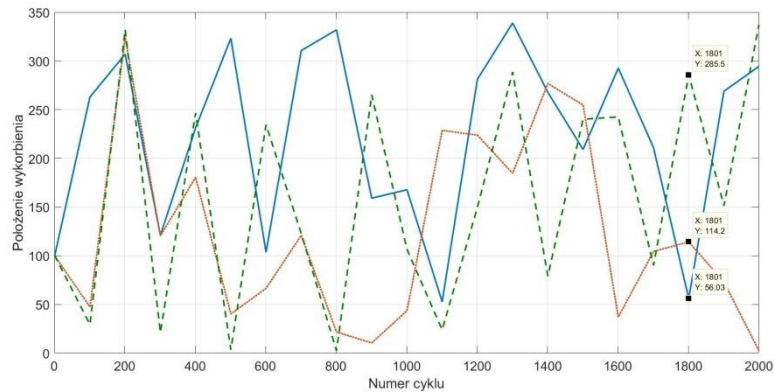
Można zaobserwować, że po 10 tys. zapłonów dokładność położenia wykorbienia spada do wielkości $\pm 100^\circ$, czyli w praktyce jest nieznaną (teoretycznie całkowicie niezdeterminowane położenie występuje po 100 tys. zapłonach). Należy podkreślić, że mając idealnie deterministyczne zależności (z nieskończenie dokładnymi parametrami czasu i prędkości obrotowej) nie potrafimy określić szukanej wielkości po odpowiedniej ilości cykli pracy. Jeżeli prędkość obrotowa rozważanego silnika wynosi $n=100$ obr/min, to dla silnika 10-cylindrowego 100 tys. zapłonów nastąpi po 10 tys. obrotów, czyli po 100 min. Po około półtorej godzinie niemożliwe jest określenie położenia wykorbienia pomimo określenia jego warunków początkowych z niezwykle dokładnością $\pm 0,001^\circ$! W praktyce sytuacja badacza jest jeszcze trudniejsza, ponieważ prędkość obrotowa silnika może być wyznaczona jedynie ze skończoną dokładnością, a co więcej, założenie o stałej prędkości obrotowej jest również pewnym (często zgrubnym) przybliżeniem (problem ten zostanie rozważony w kolejnym rozdziale). Jedyne błąd wyznaczenia czasu, może być w praktyce inżynierskiej pomijany, z uwagi na możliwość uzyskania bardzo wysokiej dokładności jego określenia.

W celu zobrazowania graficznego opisywanego zjawiska, wykonano prostą procedurę obliczeniową położenia wykorbienia wału korbowego. Założono, że startowe położenie wykorbienia, równe 10° , jest określone z dokładnością $\pm 0,01^\circ$. Kolejne położenie uzyskujemy mnożąc poprzednie położenie kątowne przez 10 (z uwagi na łatwość operacji w systemie dziesiętnym) - kolejne cykle pracy to dziesięciokrotne zwiększenie kąta opisującego położenie wykorbienia. Oczywiście uzyskane wyniki powyżej 360° są redukowane do zakresu $0-360^\circ$. Jak już wykazano w poprzednim paragrafie, każdy nowy cykl to dziesięciokrotne zmniejszenie dokładności określenia położenia wykorbienia. Kolejne wielkości liczbowe położenia są wyznaczane deterministycznie, jednak ich końcowe wartości charakteryzują się losowym rozrzutem, równym dokładności wyznaczenia położenia dla danego cyklu obliczeń. Przykładowo w drugim cyklu obliczeń mamy położenie kątowne 100° z rozrzutem $\pm 0,1^\circ$; więc do dalszych obliczeń może być przyjęta liczba $99,9^\circ$ lub np. liczba $100,05^\circ$. Na rys. 3 przedstawiono przykładowy (z uwagi na losowość każde kolejne obliczenie da inny przebieg) przebieg zmian położenia wykorbienia wału korbowego. Dla zwiększenia czytelności rysunku położenie wykorbienia (linia granatowa) podano, dla co dziesiątego cyklu obliczeń, natomiast wielkość błędu wyznaczenia położenia (linia czerwona) podano, dla co setnego cyklu. Można zaobserwować, że po 2 tys. cyklach wielkość błędu praktycznie pokrywa cały zakres $0-360^\circ$. Oznacza to, że położenie wykorbienia jest niezdeterminowane.



Rys. 3. Położenie wykorbienia i jego rozrzut w kolejnych cyklach obliczeń

Wrażliwość systemu na warunki początkowe obrazuje rys. 4. Przeprowadzono obliczenia położenia wykorbienia wału korbowego dla trzech wartości startowych. Początkowe położenie wykorbienia określono kolejna jako $10,00^\circ$ (ciągła linia niebieska), $9,99^\circ$ (przerywana linia zielona) oraz $10,01^\circ$ (punktowa linia brązowa). Należy zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie linie startują praktycznie z tego samego punktu, natomiast przebieg zmian położenia wykorbienia jest losowy i różniący się drastycznie dla każdego warunków początkowych. Przykładowo dla cyklu nr 1801 wykorbienie może być odchyłone od pionu o 56° lub 286° (dla $\alpha_0=9,99^\circ$) lub 114° (dla $\alpha_0=10,01^\circ$).



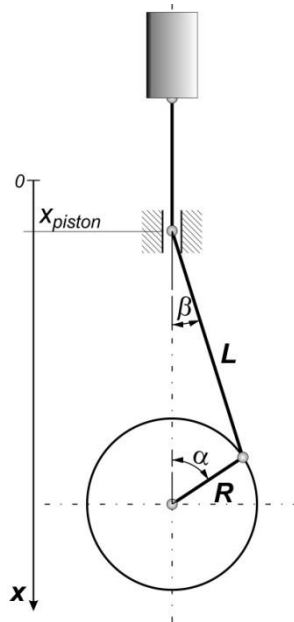
Rys. 4. Wrażliwość wyznaczenia położenia wykorbienia na warunki początkowe

Określenie położenia wykorbienia z dowolną, ale skończoną dokładnością nie pozwoli na wyznaczenie jego położenia kąтового, po odpowiednio długim czasie. Należy zwrócić uwagę na fakt, że powyższe przykłady przygotowano dla najprostszego sposobu modelowania - dla modeli liniowych. W przypadku występowania nieliniowości (np. geometrycznych, materiałowych) opisywanie zjawisk fizycznych bardzo mocno się komplikuje. W opisach występują bifurkacje (skokowa zmiana własności modelu matematycznego przy małej zmianie jego parametrów), które prowadzą do powstawania całkowicie różnych rodzin rozwiązań przechodzących przez punkty bifurkacyjne. Całość tych zjawisk jest określana terminem chaosu deterministycznego [3]. Generalnie, nadwrażliwość na warunki początkowe prowadzi do chaosu deterministycznego, a jak wykazano niemożliwe jest wyznaczenie warunków początkowych z nieskończoną dokładnością. Trudność, czy wręcz niemożliwość przewidzenia prognozy pogody na dłuższy okres czasu jest spowodowana chaosem deterministycznym; i w tym przypadku nie pomoże nam stosowanie coraz silniejszych komputerów. Inżynier musi pamiętać, że pomimo deterministycznych (wyrażonych ścisłymi formułami matematycznymi) praw przyrody badany i "oswajany" świat nie jest w pełni zdeterminowany; wiele zjawisk da się wyznaczyć tylko z pewnym (określonym deterministycznie!) prawdopodobieństwem. Nieliniowy, dynamiczny świat w stanach dalekich od równowagi musi jednak charakteryzować się pewnym uporządkowaniem złożoności - pewną samoorganizacją. W najbardziej złożonych układach, pewne wielkości muszą być mierzalne. Inaczej niemożliwe byłoby istnienie nauk ścisłych.

3. Modelowanie ruchu obrotowego wału korbowego

Kolejnym etapem rozważań jest możliwość utrzymania stałej prędkości obrotowej wału korbowego. Przyczynkiem do prezentowanej analizy była rozbieżność pomiędzy teorią prezentowaną w książkach dotyczących silników spalinowych [6, 7] a praktyką podawaną przez producentów silników [1, 2]. Z zależności teoretycznych wynika, że powinniśmy obserwować dwie składowe harmoniczne sił masowych natomiast w praktyce obliczeń drgań skrętnych [5, 8] zaleca się uwzględnianie pięciu składowych. Autor nie twierdzi, że któraś metoda zawiera błąd; jest tu tylko próba unaocznienia wpływu założonego modelu rzeczywistości na wynik rozważań.

W trakcie prezentowanych rozważań pominięte zostaną oczywiste przyczyny zmienności prędkości obrotowej spowodowane zmiennością sił wymuszających (tzw. siły gazowe pochodzące od cyklicznego spalania mieszanki paliwowej) i zmiennością obciążenia silnika, które związane są głównie ze zmiennymi warunkami środowiskowymi. Zakładamy idealny silnik bez tarcia i rozkręcony do pewnej prędkości obrotowej. Wydawałoby się, że prędkość ta powinna być stała, zgodnie z pierwszym prawem Newtona. Rozważmy kinematykę układu tłokowo-korbowego, przedstawioną schematycznie na rys. 5.



Rys. 5. Schemat układu tłokowo-korbowego

Położenie tłoka na osi x może być łatwo wyrażone zależnością (oznaczenia zgodne z rys. 5):

$$x = R(1 - \cos \alpha) + L(1 - \cos \beta), \quad (1)$$

Celem analiz jest wyznaczenie przyspieszenia ruchu tłoka, ponieważ generuje ono zmienne siły bezwładności, które z kolei są przyczyną nierównomierności prędkości obrotowej silnika (ale w pierwszym podejściu jest utrzymane w mocy założenie o stałej prędkości obrotowej). Nierównomierność prędkości obrotowej silnika pogłębia ograniczenia deterministycznego wyznaczenia położenia wykorbienia, przedstawione w poprzednim rozdziale. Przyspieszenie wyznaczamy poprzez określenie drugiej pochodnej położenia w czasie. Kąty α i β są zależne od czasu we wzorze (1) w sposób niejawni. Prosta zależność pomiędzy kątem α prędkością obrotową i czasem, została przytoczona w poprzednim rozdziale. Ponadto należy ustalić zależność pomiędzy oboma kątami; opisuje ją następująca zależność:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}, \quad (2)$$

gdzie:

λ - współczynnik wykorbienia równy ilorazowi promienia wykorbienia do długości korbowodu.

Różniczkowanie takiej funkcji jest niewygodne, więc powszechnie [6, 7] stosuje się następujące uproszczenie:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \cong 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha, \quad (3)$$

Na podstawie zależności 1-3 można wyznaczyć drogę tłoka przy pomocy dwóch modeli matematycznych - uproszczonego i dokładnego (zależność 4 i 5). Analizę przeprowadzono na przykładzie silnika już analizowanego w poprzednim rozdziale - typu 10K98 firmy MAN B&W. Zależność uproszczona i dokładna nie wydaje się zbyt mocno różnić i rzeczywiście trajektorie uzyskane przy pomocy obu modeli (patrz rys. 6) są prawie identyczne. Dla porównania linią

niebieską zaznaczono "czystą" sinusoidę. Błąd wyznaczenia położenia przedstawiony na rys. 7 nie przekracza 0,5%.

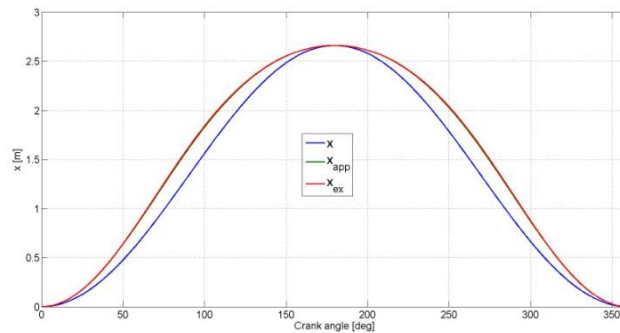
$$x_{app} = R \left[1 - \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \lambda \sin^2(\omega t) \right], \quad (5)$$

$$x_{ex} = L \left\{ 1 + \lambda [1 - \cos(\omega t)] - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \right\}, \quad (6)$$

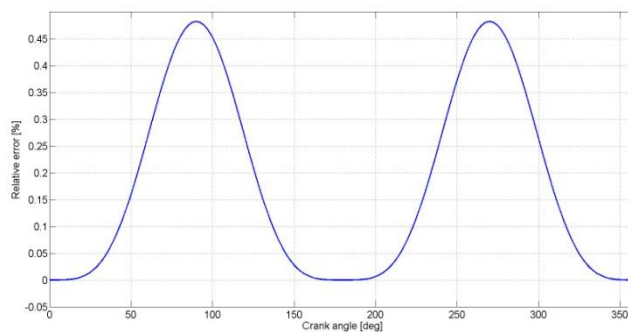
gdzie:

x_{app} - przemieszczenie tłoka uzyskane modelem uproszczonym,

x_{ex} - przemieszczenie tłoka uzyskane modelem dokładnym.



Rys. 6. Przeszczenie tłoka silnika MAN B&W 10K98



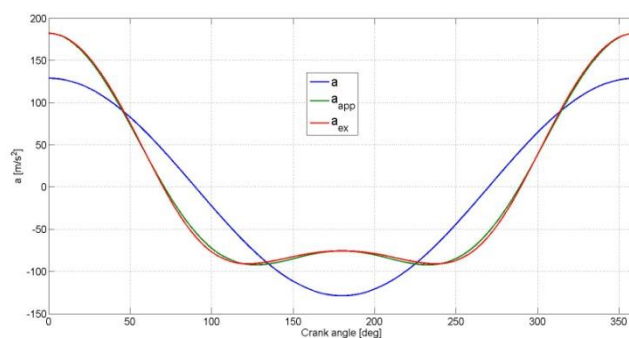
Rys. 7. Błąd względny wyznaczenia przemieszczenie tłoka silnika MAN B&W 10K98

Uproszczone modelowanie wydaje się być poprawne. Inżynier powinien jednak pamiętać, że każdy model ma swoje ograniczenia. Po podwójnym zróżniczkowaniu zależności 5 i 6 otrzymujemy przyspieszenia w nieco innej formie dla obu modeli:

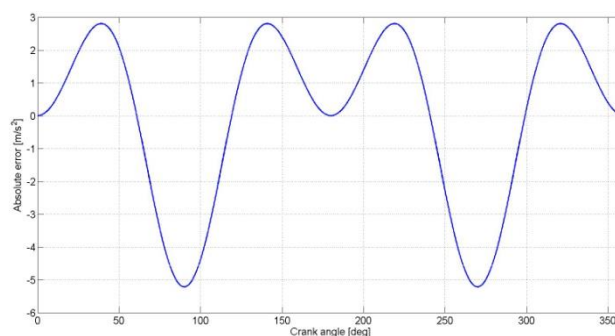
$$a_{app} = \frac{dv}{dt} = R\omega^2 [\cos(\omega t) + \lambda \cos(2\omega t)], \quad (7)$$

$$a_{ex} = R\omega^2 \left\{ \cos(\omega t) + \lambda \cos(2\omega t) \cdot [1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)]^{\frac{1}{2}} + \dots \right\} \left\{ \dots + \frac{1}{4} \lambda^3 \sin^2(2\omega t) \cdot [1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (8)$$

Wyznaczone przyspieszenie przy pomocy obu modeli już się nieco różni (patrz rys. 8) i względny błąd wyznaczenia przyspieszenia przekracza w pewnych punktach 5% (rys. 9).



Rys. 8. Przyspieszenie tłoka silnika MAN B&W 10K98



Rys. 9. Błąd względny wyznaczenia przyspieszenia tłoka silnika MAN B&W 10K98

Wielkość przyspieszeń tłoka rozważanego silnika jest duża - przekracza 180 m/s^2 . Po uwzględnieniu wielotonowych mas układu tłokowo-korbowego można wyznaczyć wielkość sił masowych układu, które okazują się być tego samego rzędu co siły gazowe. Podczas analiz drgań układu napędowego (oraz wyznaczania wymuszeń drgań kadłuba i nadbudówki statku) siły masowe są nie do pominięcia. Istotna jest znajomość wszystkich składowych harmonicznych tych sił. Modelowanie ruchu tłoka przy pomocy prostszych zależności (równanie 7) daje nam dwie składowe harmoniczne. Natomiast w rzeczywistości (określonej eksperymentalnie) powinniśmy uwzględniać co najmniej pięć składowych harmonicznych. Do tego niezbędny jest bardziej złożony model matematyczny kinematyki ruchu tłoka.

4. Podsumowanie

O ograniczoności naszych przewidywań (zarówno empirycznych jak i teoretycznych) świadczy również udowodnione (!) twierdzenie Gödla, które było szokiem dla dwudziestowiecznego środowiska naukowego. Jest to w zasadzie kilka powiązanych ze sobą twierdzeń, z których najistotniejsze dla naszych rozważań to twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności oraz twierdzenie o nierozstrzygalności. W pewnym uproszczeniu można je następująco streścić: "jeżeli system (bogaty co najmniej jak arytmetyka) jest zupełny to jest sprzeczny, a jeżeli jest niesprzeczny to jest niezupełny". Świat opisywany przez fizykę (mechanikę) na pewno jest bogatszy od arytmetyki. Czyli dowolny model świata będzie niezupełny. Inżynier musi zdawać sobie sprawę, że nie wszystko wie. Nigdy, w żadnym nawet najbardziej skomplikowanym modelu, nie opiszemy całości zjawisk fizycznych.

Wykaz literatury

- [1] Brydum, L, Jakobsen, S.B., *Vibration characteristics of two-stroke, low speed diesel engines*, MAN B&W Diesel a/s, pp.1-16, Copenhagen 1987.
- [2] Charchalis, A., Dereszewski, M., *Analysis of Rotational Speed Fluctuation of Diesel Engine Shaft for Evaluation of Combustion Process*, Journal of Vibration Engineering & Technologies, vol.2, No. 5, 2014
- [3] Davies, P., *Kosmiczny projekt*, Copernicus Center Press, 2014.
- [4] Heller, M., *Fizyka ruchu i czasoprzestrzeni*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
- [5] Murawski, L., Charchalis, A., *Simplified method of torsional vibration calculation of marine power transmission system*, Marine Structures, Vol. 39, pp 335-349, 2014.
- [6] Niewiarowski, K., *Tłokowe silniki spalinowe*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1983.
- [7] Piotrowski, I., *Okrętowe silniki spalinowe*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1983.
- [8] Senjanović, I, Hadžić, N., Murawski, L., Vladimir, N., Alujević, N., *Analytical procedures for torsional vibration analysis of ship power transmission system*, Engineering Structures, Vol. 178, pp. 227-244, 2019.