

Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych

Część 1. Podstawy teoretyczne dla skorelowanych wielkości mierzonych

Zygmunt Lech Warsza

Sieć Badawcza ŁUKASIEWICZ – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: W dwuczęściowej pracy przedstawia się zmodyfikowaną wersję wektorowej metody oceny niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich. Jest to rozszerzenie metody podanej w Suplemencie 2 do Przewodnika wyznaczania niepewności pomiarów. Nowością zaproponowaną w niniejszej pracy jest uwzględnianie wpływu skorelowania rozkładów mierzonych wartości elementów multimenzurandu na niepewności składowe typu A lub/ oraz typu B mierzonych pośrednio parametrów menzurandu wyjściowego. Omówienia dokonano na przykładzie pomiarów menzurandu dwuparametrowego 2D o skorelowanych parametrach mierzonych. W części 1. wyznaczono wzory ogólne dla macierzy kowariancji, niepewności i współczynnika korelacji menzurandu wyjściowego oraz dla kilku charakterystycznych przypadków szczególnych. Na wykresach zilustrowano zależności współczynnika korelacji wielkości wyjściowych w funkcji udziałów składowych typu B w niepewnościach wielkości wejściowych. W części 2. będą omówione przykłady estymacji niepewności i współczynnika korelacji dla kilku rodzajów funkcji przetwarzania wyników pomiarów oraz sformułuje się wnioski ogólne.

Słowa kluczowe: pomiary wielowymiarowe, menzurand 2D, propagacja wektorowa, niepewności składowe typów A oraz B, wypadkowy współczynnik korelacji

1. Wprowadzenie

Wyniki pomiarów podawane są zwykle w postaci dwu estymat, które opisują wartości oraz oceny dokładności każdej z wielkości badanego obiektu, czyli parametry menzurandu. Oba estymatory wyznacza się z danych próbki pomiarowej, czyli zbioru wartości obserwacji pomiarowych, które powtarzano wielokrotnie w tych samych lub podobnych warunkach wpływających. Podczas tworzenia oceny dokładności pomiarów wieloparametrowych uwzględnia się związki deterministyczne i statystyczne (korelacje) między mierzonymi wielkościami. Po korekcie znanych wpływów o charakterze deterministycznym otrzymuje się rozrzut wartości obserwacji pomiarowych traktowany już jako

losowy i opisywany rozkładem prawdopodobieństwa. W celu ujednoczenia oceny dokładności wyników pomiarów, siedem organizacji międzynarodowych wspólnie opracowało i pierwszy raz opublikowało w 1993 r. specjalny dokument – *Przewodnik wyrażania niepewności pomiarów* (ang. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*), znany pod angielskim akronimem GUM [1]. Jego treść udoskonalano kilkakrotnie. Ostatnia wersja ukazała się w 2008 r. [1]. Zakres stosowania przewodnika GUM jest rozszerzany przez kolejne Suplementy [2–5]. Ciągłe ukazują się prace o usprawnieniu korzystania i udoskonaleniu tych przepisów, w tym i przyczynki z udziałem autorów [8, 10–20].

Poprzednio do oceny dokładności pomiarów stosowano błędy pomiarowe z podziałem na systematyczne i przypadkowe. Wskutek trudności z wyznaczeniem w praktyce wartości rzeczywistej, w przewodniku GUM wprowadzono nowe pojęcie nazwane niepewnością pomiarów (ang. *measurement uncertainty*). Jest to szerokość przedziału, a dla pomiarów wieloparametrowych – opis granic tzw. obszaru pokrycia, w którym z określonym prawdopodobieństwem może wystąpić estymata wartości menzurandu, którą otrzymano po korekcie i przetworzeniu surowych wyników pomiarów. Podstawą oceny niepewności pomiarów jest wyznaczenie jej składowych typu A i typu B, oznaczonych jako u_A i u_B . Niepewność całkowita u jest zdefiniowana w GUM

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zw11936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 19.02.2019 r., przyjęty do druku 28.03.2019 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

jako odchylenie standardowe rozkładu wypadkowego w postaci spłotu dwóch niezależnych statystycznie rozkładów składowych. Pierwszy z nich opisuje statystycznie rozrzut otrzymanych eksperymentalnie wartości obserwacji pomiarowych. Drugi jest rozkładem hipotetycznym randomizującym przypuszczalne zmiany wyników różnego pochodzenia, w tym o charakterze systematycznym, nieznanne co do wartości w trakcie wykonywanych pomiarów. Zmiany te mogą pojawiać się losowo w długim okresie użytkowania mierzonego obiektu, przyrządu lub systemu pomiarowego i w różnych dopuszczalnych dla nich warunkach otoczenia, innych niż przy kalibracji przyrządu i przeprowadzaniu pomiarów kontrolnych. Natomiast zwykle nie zmieniają się w trakcie pomiarów.

Funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu wypadkowego i rozkładów składowych spełniają warunek $p(x) = p(x_A) * p(x_B)$. Niepewność całkowita, czyli odchylenie standardowe u rozkładu wypadkowego jest sumą geometryczną niepewności składowych u_A i u_B , tj.:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (1)$$

Następnie dla znanej funkcji opisującej gęstość prawdopodobieństwa rozkładu, np. funkcji Gaussa dla rozkładu normalnego, na podstawie odchylenia standardowego i współczynnika rozszerzenia k_p [1], wyznacza się analitycznie niepewność rozszerzoną U o określonym prawdopodobieństwie pokrycia P , np. 95% lub 99%. Dla innych otrzymanych eksperymentalnie rozkładów danych pomiarowych, niepewność rozszerzoną U wyznacza się też metodą numeryczną Monte Carlo wg Suplementu 1 [2] do przewodnika GUM.

Niepewność składową u_A , zależną od rozkładu obserwacji pomiarowych, wyznacza się znanymi metodami statystycznymi, jak dla rozkładu normalnego [1] lub innych rozkładów [8, 21]. Natomiast niepewność u_B szacuje się heurystycznie na podstawie subiektywnej wiedzy o przewidywanych zakresach i rozkładach wielkości wpływających i funkcjach ich oddziaływań. Niepewność u_B randomizuje możliwe oddziaływania wielu takich wielkości, których bieżące wartości nie są znane i brakuje danych, aby obliczyć dla nich poprawki. Wpływy te są nieusuwalne z wartości obserwacji pomiarowych. Zacharow przy wyznaczaniu niepewności pośrednich pomiarów jednoparametrowych rozpatrywał szacowanie heurystyczne skorelowania wielkości wpływających na niepewność typu B, które nazywał „logicznym” [9]. Dotyczy ono sytuacji, gdy skorelowania nie można wyznaczyć bezpośrednio z danych pomiarowych.

Dorozhovetz i Warsza uzasadnili [10, 11], że w warunkach pracy o znanym ograniczonym zakresie zmian wielkości wpływających, można przyjąć istotnie mniejszą wartość składowej u_B , niż podana po kalibracji przyrządu dla pełnego zakresu dopuszczalnych zmian warunków jego pracy.

Międzynarodowy Komitet ds. Przewodników w Metrologii ICGM proponował ostatnio opracowanie nowej wersji przewodnika GUM 2, opartej na prawdopodobieństwie warunkowym wg podejścia Bayesa [8, Dodatek 2], ale wyznaczania niepewności typu B jeszcze nie omawiano.

Niepewność pomiaru MU (ang. *Measurement Uncertainty*) ma też ogromne zastosowanie jako podstawowy element oceny zgodności produktów z wymaganiami [5, 7, 8]. Umożliwia porównywanie wyników różnych testów, sprawdzanie przekraczania ograniczeń lub spełniania wymagań tolerancji w produkcji i przez produkty. Dzięki możliwości porównania wyników kalibracji z wymaganiami stanowi też podstawę metrologicznej akceptacji wyposażenia pomiarowego. Laboratoria akredytowane zgodnie z ISO/IEC 17025 [6, 7] muszą obliczyć MU dla każdej metody badawczej stosowanej w przyznanym im zakresie akredytacji.

Istnieje jednakże pewien rozdźwięk między opisem dokładności pomiarów za pomocą niepewności i opisem dokładności przyrządów i urządzeń pomiarowych przez dopuszczalne błędy

maksymalne, czy też przez stosowane nadal jeszcze błędy graniczne. Na podstawie ich wartości, przy założeniu równomiernego rozkładu, wyznacza się odchylenie standardowe jako składową niepewności typu B przyrządu.

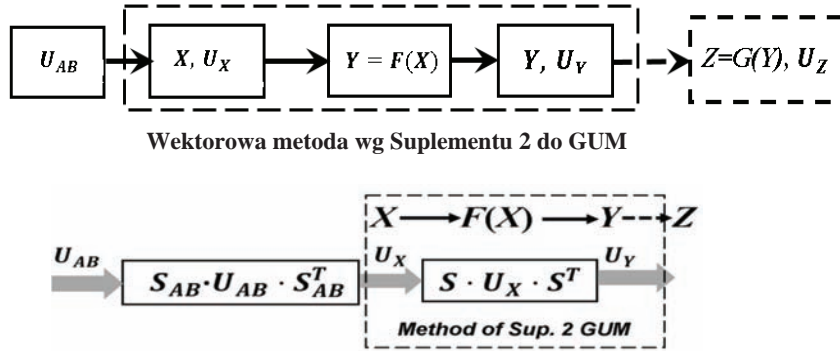
Właściwości metrologiczne aparatury pomiarowej decydują o wartościach zmierzonych nią parametrów wielu urządzeń i procesów spełniających odpowiedzialne funkcje. Stosowane w przemyśle i innych działach gospodarki systemy jakości, obok starannej kalibracji aparatury pomiarowej wymagają też okresowej kontroli metrologicznej, jak i kontroli podstawowych parametrów badanych procesów i urządzeń w trakcie okresu ich eksploatacji [6, 7, 20]. W przeprowadzanych w praktyce eksperymentach pomiarowych bada się też parametry skojarzonych ze sobą mierzonych jedno- i wieloparametrowych występujących w tym samym, lub różnych obiektach mierzonych. Tylko niekiedy wykonuje się je jednym, a zwykle wieloma przyrządami, w tych samych lub różnych warunkach otoczenia. Otrzymywany rozrzut wartości powtarzanych obserwacji w pomiarach wieloparametrowych jest wywołany zarówno wspólnymi jak i różnymi przyczynami. Wielowariantowość sytuacji powoduje, że całkowite i tzw. rozszerzone, o określonym prawdopodobieństwie niepewności wielkości mierzonych jako elementów multimenzurandu, zależą nie tylko od ich składowych typu A oraz typu B, ale są też ze sobą skojarzone wskutek wzajemnego skorelowania między tymi wielkościami. Podobnie jak niepewność typu A, skorelowanie może przejawiać się między wartościami obserwacji uzyskiwanymi w trakcie wykonywania danego eksperymentu pomiarowego, jak też tak jak niepewność typu B powiązać ze sobą wyniki pomiarów różnych eksperymentów wykonywanych w innych warunkach. Zagadnień tych nie obejmują w pełni rekomendacje szacowania niepewności pomiarów zawarte w GUM i w jego Suplemencie 2 [3] oraz w innych przepisach międzynarodowych, np. [6, 7]. Celem tej dwuczęściowej publikacji jest prezentacja rozszerzonej metody wyznaczania niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych, gdy wielkości mierzone na wejściu są skorelowane. Uwzględni się w niej wyodrębnienie wpływu skorelowania wielkości mierzonych na poszczególne składowe ich niepewności typu A oraz/lub B. Takiej metody dotąd nie opisywano w literaturze.

W pracy przeprowadzi się analizę wpływu różnych przypadków skorelowania wielkości mierzonych jako elementów multimenzurandu na macierze kowariancji dla składowych niepewności typu A oraz B oraz na wypadkową macierz kowariancji. Zilustruje się to kilkoma przykładami pomiarów dwuparametrowych opisanymi funkcją liniową i prostymi funkcjami nieliniowymi. Wyznaczy się też odpowiednie wzory. Jest to istotne szczególnie, gdy wyniki wyjściowe pomiarów wieloparametrowych będą potem używane wspólnie.

2. Metoda propagacji niepewności w pomiarach pośrednich

Przetwarzanie sygnałów pomiarowych w pomiarach wieloparametrowych i wyznaczanie wyjściowej macierzy kowariancji U_Y wyjaśniają schematy (rys. 1). Wielkości badane pośrednio, zwane też obserwabkami [13–15], tworzą wieloparametrowy mierzand wyjściowy Y . Korelacja przejawia się zarówno w trakcie danego eksperymentu, jak i między pomiarami wykonywanymi w różnych warunkach wpływających.

Wartości elementów multimenzurandu Y i jego macierz kowariancji U_Y otrzymuje się pośrednio z przetwarzania wyników bezpośrednio mierzonych wielkości wejściowych, czyli elementów x_i multimenzurandu X . Wielkości mierzone w danym eksperymencie pomiarowym mają niepewności typu A, oznaczane przez u_A , które wynikają z rozrzutu wartości obserwacji w próbcie. Skorelowanie danych pomiarowych tych wielkości będzie opisywane współczynnikami korelacji z literą A w indeksie dolnym. Współczynniki korelacji opisujące dodatkowe skore-



Rys. 1. Schematy przetwarzania sygnałów mierzonych i wyznaczania macierzy kowariancji w rozszerzonej metodzie propagacji niepewności dla pośrednich pomiarów wieloparametrowych: U_{AB} – macierz kowariancji wielkości wejściowych X o niepewnościach typu A lub/i typu B uwzględniająca skorelowania, X i Y multimenzurandy: wejściowy i wyjściowy; U_X i U_Y – ich macierze kowariancji; $Z = G(Y)$ – następane przetwarzanie multimenzurandu wyjściowego Y

Fig. 1. Schemes of the signal values processing and covariance matrix estimation in the extended method of uncertainty propagation for multiparameter measurements: U_{AB} – covariance matrix of input of quantities X with uncertainty components of type A or/and B and correlation coefficients, X and Y – input and output quantities; U_X i U_Y , their covariance matrices, $Z = G(Y)$ – next conversion of measurand Y

lowanie między wielkościami mierzonymi w dwu eksperymentach o różnych warunkach wpływających na niepewność wypadkową typu B, będą miały w indeksie literę B. Opisuje się to wspólnie w macierzy U_{AB} . Przy jej użyciu wyznacza się macierz kowariancji U_X dla multimenzurandu wejściowego X , a z niej, dla znanej funkcji przetwarzania $Y = F(X)$ – macierz kowariancji U_Y . Macierz ta uwzględnia skorelowania wpływające na niepewności typu A lub/i typu B na wejściu. Drugim wariantem opisującym wpływ obu rodzajów skorelowania jest przedstawienie macierzy kowariancji jako sumy dwu macierzy, np. $U_X = U_{XA} + U_{XB}$. Omówi się to w ostatnim rozdziale tej pracy.

W pomiarach wieloparametrowych wyjściowy m -wymiarowy menzurand Y zależy pośrednio od mierzonych na wejściu n -wymiarowego menzurandu X wg ogólnej funkcji o postaci

$$Y = F(X) \quad (2)$$

gdzie: Y i X – wektory o elementach, które są wartościami wielkości: menzurandu wyjściowego i wejściowego.

Do wyznaczania niepewności w pomiarach pośrednich wielowymiarowych menzurandów wykorzystuje się wektorowe prawo propagacji niepewności podane w Suplemencie 2 [3] do przewodnika GUM. Propagację niepewności opisuje się jako zależność między macierzami kowariancji wielkości X i Y występującą przy linearyzacji funkcjonału F ze wzoru (2) przez pochodne, tj.:

$$U_Y = S U_X S^T \quad (3)$$

gdzie macierz czułości S oraz macierze kowariancji U_X , U_Y wielkości wejściowych X i wyjściowych Y , opisane są następującymi wzorami:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$U_X = \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \dots & \rho_{x1n} u_{x1} u_{xn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{xn1} u_{xn} u_{x1} & \dots & u_{xn}^2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \dots & \rho_{y1m} u_{y1} u_{ym} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y1m} u_{ym} u_{y1} & \dots & u_{ym}^2 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

Wartości elementów wektora Y mogą być też dalej wspólnie przetwarzane wg innej funkcji:

$$Z = G(Y) \quad (4)$$

Wówczas dla wyznaczanych kolejno wartości elementów, nowego multimenzurandu $Z = [z_1, \dots, z_m]^T$ i elementów jego macierzy kowariancji U_Z z niepewnościami u_{z1}, \dots, u_{zm} stosuje się nowe równanie wektorowe o takiej samej postaci jak (3), opisujące propagację niepewności, tj.:

$$U_Z = S_G U_Y S_G^T \quad (5)$$

gdzie S_G jest nową macierzą czułości dla funkcji G , utworzoną analogicznie jak S .

Wzory dla pomiarów pośrednich menzurandów 3D i kilka przykładów stosowania metody wektorowej w elektrycznych układach pomiarowych DC i AC autorzy przedstawili w pracach [16–20].

Wyniki pomiarów pośrednich wieloparametrowych wyznacza się z parametrów bezpośrednio mierzonych menzurandu X , otrzymanych po przetworzeniu wielokrotnie powtarzanych obserwacji traktowanych w ogólnym przypadku jako losowe i uzyskanych w określonych warunkach otoczenia. W tym celu dokonuje się obróbki statystycznej otrzymanych surowych danych pomiarowych oraz koryguje się te niepożądane znane wpływy warunków otoczenia przez poprawki. Warunki te mogą mieć charakter stały albo w czasie pomiarów zmieniać się deterministycznie w znany sposób lub losowo. Wprowadzając poprawki eliminuje się znane błędy systematyczne. Pozostałe przyczyny niedokładności szacuje się przez niepewności typu B. Następnie wyznacza się niepewności typu A i typu B oraz niepewności wypadkowe u wszystkich parametrów menzurandu X ze wzoru (1) i tworzy się jego macierz kowariancji U_X , w której uwzględnia się skorelowanie parametrów. Wartości parametrów badanych menzurandów Y oraz Z uzyskuje się pośrednio po przetworzeniu wg wzorów (2)–(5).

Istnieje wiele możliwości skorelowania wielkości będących elementami multimenzurandu. Można wyróżnić wpływy skorelowania dotyczące osobno każdego typu niepewności A i B tych

wielkości. Rozrzut wartości obserwacji pomiarowych zależy nie tylko od warunków otoczenia systemu pomiarowego i obiektu badanego, ale i od zmian parametrów ich elementów wewnętrznych. Próbkę pomiarową tego samego badanego obiektu w różnych eksperymentach pomiarowych przy tej samej niepewności u_B mogą mieć różne niepewności u_A .

Dla mierzand wejściowych \mathbf{X} współczynniki korelacji typu A można znaleźć statystycznie [12], ale eksperyment pomiarowy trzeba zorganizować tak, by synchronicznie pozyskiwać kolejne wartości obserwacji wszystkich mierzonych parametrów. Niepewności typu B i związane z nimi skorelowanie szacuje się heurystycznie. Jest to zadanie dosyć zróżnicowane w praktyce, gdyż mierzy się różne wartości badanych wielkości, na różnych zakresach jednego miernika lub nawet różnymi miernikami. Różne są też dopuszczalne błędy maksymalne tych przyrządów, a więc i różne wynikające z nich niepewności typu B [8, 20]. Przy szacowaniu skorelowania typu B w jak największym stopniu trzeba wykorzystywać wszelką pozyskaną wcześniej wiedzę o tego rodzaju pomiarach.

3. Niepewności pomiarów 2D o skorelowanych wielkościach wejściowych

W modelu matematycznym zastosowanym w GUM [1] przyjęto założenie, że niepewności składowe u_A i u_B otrzymuje się dla niezależnych statystycznie rozkładów odchyłek wartości obserwacji od estymatora wartości mierzonej. Tak też jest zwykle w praktyce. Opisana wzorem (1) niepewność mierzonej wartości x pojedynczego mierzand ma więc taką samą postać jak niepewność sumy dwu wielkości o nieskorelowanych wartościach, z których jedna ma tylko niepewność u_A , a druga – tylko niepewność u_B . Wartość x można więc dowolnie podzielić na dwie części, tj. zamodelować ją jako sumę $x = x_A + x_B$ o wypadkowej wariancji $u_x^2 = u_A^2 + u_B^2$, czyli tak, jak dla splotu dwu nieskorelowanych rozkładów o niepewnościach u_A i u_B .

W pomiarach dwuparametrowych (2D) wartości x_1, x_2 wielkości mierzonych można przedstawić jako dwie sumy, których składniki mają niepewności tylko jednego typu, A lub B, tj.:

$$x_1 = x_{1A} + x_{1B} \quad (6a)$$

$$x_2 = x_{2A} + x_{2B} \quad (6b)$$

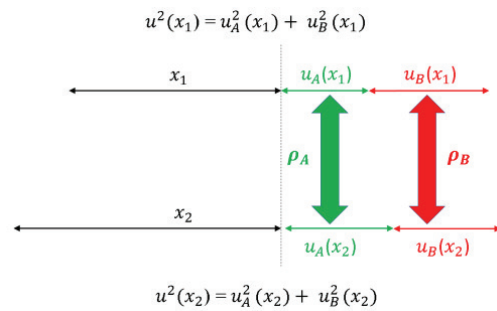
Niepewności wielkości x_1 i x_2 oznacza się jako u_{x1} i u_{x2} . Spełniają one równania:

$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 \quad (7a)$$

$$u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \quad (7b)$$

W ogólnym przypadku wyniki pomiarów wykonywanych dla otrzymania wartości estymatorów x_1, x_2 będą miały różne wartości par niepewności składowych u_{1A}, u_{2A} oraz u_{1B}, u_{2B} . Jeśli eksperymenty te często odbywają się w podobnych lub nawet w jednakowych warunkach, to wartości wielkości mierzonych mogą być skorelowane i powiązane współczynnikiem korelacji $1 \geq \rho_B \neq 0$.

Podobnie przy niejednakowych, ale częściowo wspólnych czynnikach losowego rozrzutu obserwacji pomiarowych dwu różnych badań tego samego obiektu, w ogólnym przypadku mogą pojawić się też niepewności u_A i współczynnik skorelowania $1 \geq \rho_A \neq 0$. Jeśli korelacja występuje między zbiorami odchyłek od wartości estymatorów wielkości, to standardowe odchylenia ich rozkładów są niepewnościami jednego typu – A lub B. Związki te ilustruje rysunek 2.



Rys. 2. Powiązania korelacyjne odchyłek dwuparametrowego mierzand o niepewnościach typu A i/lub typu B
Fig. 2. Correlations between deflections from estimators of the 2D measurand with uncertainties of Type A and/or Type B

Elementy multimierzand wejściowego \mathbf{X} mogą mieć ogólnie różne stopnie skorelowania typu A jak i typu B. Wpływa to w tych pomiarach na dokładność wyników pośrednio wyznaczanych wielkości wyjściowych \mathbf{Y} .

Aby z wyników pomiarów 2D wyznaczyć standardowe niepewności u_{y1}, u_{y2} i ich współczynnik korelacji $\rho_{y1,2}$ korzysta się z wektorowego prawa propagacji niepewności (3). W przypadkach, gdy wnioski z pomiarów mają dotyczyć innych warunków pomiaru niż dla danego eksperymentu, innych niż były przy kalibracji przyrządu, bądź podczas użytkowania badanego obiektu, to obok bieżących rozrzutów wartości obserwacji o niepewnościach standardowych u_{1A}, u_{2A} i ich współczynnika korelacji ρ_A , trzeba uwzględnić też przypuszczalne wpływy niepewności u_{1B}, u_{2B} i współczynnika korelacji ρ_B .

Jako wielkości wejściowe można teraz przyjąć $[x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}, x_{2B}]^T$, a jako wyjściowe $[y_1, y_2]^T$ oraz należy założyć, że nie ma korelacji między odchyleniami niejednakowych typów A i B dla każdego z elementów mierzand wejściowego. Może zaś wystąpić korelacja x_{1A} i x_{2A} opisana współczynnikiem korelacji ρ_A oraz między x_{1B} i x_{2B} opisana przez ρ_B . Równanie (3) przyjmuje wówczas następującą postać:

$$\mathbf{U}_{y1,2} = \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} \\ \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} & u_{y2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_A} & 0 & \frac{\partial y_2}{\partial x_A} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_1}{\partial x_B} & 0 & \frac{\partial y_2}{\partial x_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} & 0 & 0 \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ 0 & 0 & \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_A} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_1}{\partial x_B} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_A} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial x_B} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Połowa elementów macierzy kowariancji wielkości wejściowych o rozmiarze 4×4 równa się zeru. Wynika to stąd, że korelacja występuje tylko między odchyleniami tworzącymi niepewności składowe jednego typu A oraz/lub B, zgodnie z założeniem przyjętym w GUM [1], iż obie składowe są od siebie niezależne statystycznie.

W szczególnym przypadku dla bezpośrednich pomiarów składowych wejściowej wielkości wektorowej 2D, t.j., gdy $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$, czyli dla $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, wszystkie współczynniki czułości są

jednakowe: $\frac{\partial x_1}{\partial x_A} = \frac{\partial x_1}{\partial x_B} = \frac{\partial x_2}{\partial x_A} = \frac{\partial x_2}{\partial x_B} = 1$ i wyjściowa macierz

kowariancji (8) $\mathbf{U}_{y_{1,2}} \equiv \mathbf{U}_{x_{1,2}}$ i wynosi

$$\mathbf{U}_{x_{1,2}} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Tabela 1. Współczynniki korelacji $\rho_{x_{1,2}}$ wyników dwu pomiarów o różnych relacjach niepewności składowych u_A oraz/lub u_B oraz różnych współczynnikach ρ_A , ρ_B

Table 1. Correlations coefficients $\rho_{x_{1,2}}$ of two measurands for different relations of their uncertainty components u_A or u_B and different correlation coefficients ρ_A , ρ_B

Lp.	Niepewności typu A		Niepewności typu B		Współczynnik korelacji $\rho_{y_{1,2}}$ elementów mierzandów wyjściowego 2D
	Wartości	Współczynnik korelacji	Wartości	Współczynnik korelacji	
	u_{1A}, u_{2A}	ρ_A	u_{1B}, u_{2B}	ρ_B	$\frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{\sqrt{u_{1A}^2 + u_{1B}^2} \sqrt{u_{2A}^2 + u_{2B}^2}}$
					$\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B}$
1.	u_{1A}, u_{2A}	ρ_A	u_{1B}, u_{2B}	$\rho_B = 0$	$\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2}$
2.	u_{1A}, u_{2A}	$\rho_A = 1$	u_{1B}, u_{2B}	ρ_B	$\rho_B k_{1B} k_{2B}$
3.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A$	ρ_A	$u_{1B} = u_{2B} = u_B$	ρ_B	$\rho_A (1 - k_B^2) + \rho_B k_B^2$
4.	u_{1A}, u_{2A}	ρ_A	$u_{1B} = u_{2B} = u_B$	$\rho_B = 1$	$\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + k_{1B} k_{2B}$
5.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A$	$\rho_A = 1$	u_{1B}, u_{2B}	ρ_B	$\sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B}$
6.	u_{1A}, u_{2A}	$\rho_A = 0$	u_{1B}, u_{2B}	$\rho_B = 0$	0
7.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A =$ $u_{1B} = u_{2B} = u_B$	ρ_A	$u_{1A} = u_{2A} = u_A =$ $u_{1B} = u_{2B} = u_B$	ρ_B	$0,5(\rho_A + \rho_B)$
		$\rho_A = 0$		$\rho_B = 1$	$\rho_{y_{1,2}} = 1/2$
		$\rho_A = 1$		$\rho_B = 0$	
		$\rho_A = 1$		$\rho_B = 1$	$\rho_{y_{1,2}} = 1$

W szczególnym przypadku, gdy $\rho_A = 0$, $\rho_B = 1$ i $k_{1B}^2 \approx k_{2B}^2 \approx 1/2$ otrzymuje się $u_{x_1} = u_{x_2} = \sqrt{2}u_B$ oraz $\rho_{x_{1,2}} = 1/2$

W otrzymanej w (9) macierzy $U_{x1,2}$ występują niepewności zgodne z przyjętą regułą sumowania wariancji, czyli dla kwadratów niepewności typu A i typu B w obu pomiarach. Współczynnik korelacji między wielkościami x_1 i x_2 wynosi:

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{u_{x1} u_{x2}} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{\sqrt{u_{1A}^2 + u_{1B}^2} \sqrt{u_{2A}^2 + u_{2B}^2}} \quad (10)$$

Pomiary mierzandru wejściowego X należy traktować jako szczególny przypadek wieloparametrowych pomiarów opisanych wzorami (2) i (3), gdy są one powiązane ze sobą tylko w samym obiekcie pomiarowym.

Jeśli dla stosunków niepewności składowych i niepewności standardowych u_{x1} , u_{x2} przyjmie się oznaczenia:

$$0 \leq k_{1B} \equiv \frac{u_{1B}}{u_{x1}} \leq 1, \quad 0 \leq k_{2B} \equiv \frac{u_{2B}}{u_{x2}} \leq 1,$$

to otrzyma się:

$$\frac{u_{1A}}{u_{x1}} \equiv \sqrt{1 - k_{1B}^2}, \quad \frac{u_{2A}}{u_{x2}} \equiv \sqrt{1 - k_{2B}^2}$$

i prostszy wzór (10)

$$\rho_{x1,2} = \rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B} \quad (11)$$

Dla obu wielkości mierzonych pośrednio współczynnik $\rho_{x1,2}$ w (11) zależy wyłącznie od stosunków niepewności k_{iB} , gdyż dla każdego z nich zachodzi $\left(\frac{u_{iB}}{u_{xi}}\right)^2 + \left(\frac{u_{iA}}{u_{xi}}\right)^2 = k_{iB}^2 + (1 - k_{iB}^2) = 1$.

Natomiast warunek $\frac{u_{iB}}{u_{xi}} + \frac{u_{iA}}{u_{xi}} = k_{iB} + \sqrt{1 - k_{iB}^2} = 1$ jest spełniony tylko dla $k_{iB} = 0$ lub $k_{iB} = 1$, $i = 1, 2$.

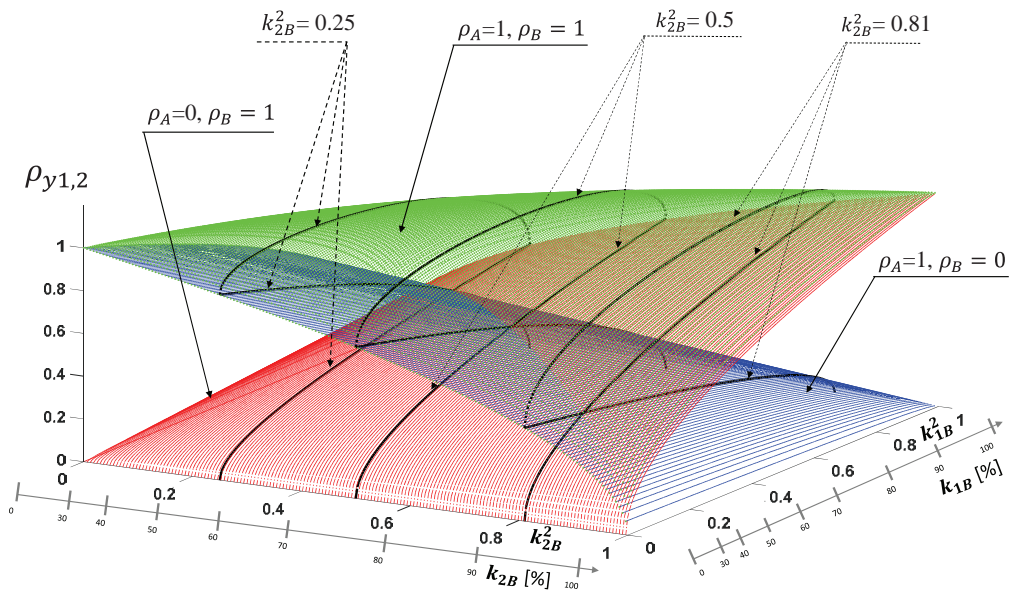
Niektóre szczególne przypadki współczynnika korelacji $\rho_{x1,2}$ dla wyników eksperymentów pomiarowych o różnych wariantach par niepewności składowych u_{1A} , u_{2A} oraz u_{1B} , u_{2B} i współczynników korelacji ρ_A i ρ_B podano w tabeli 1. Zawiera też ona skrajne przypadki dla kombinacji wartości $\rho_A = (0, 1)$; $\rho_B = (0, 1)$.

4. Wykresy wypadkowego współczynnika korelacji $\rho_{y1,2}$

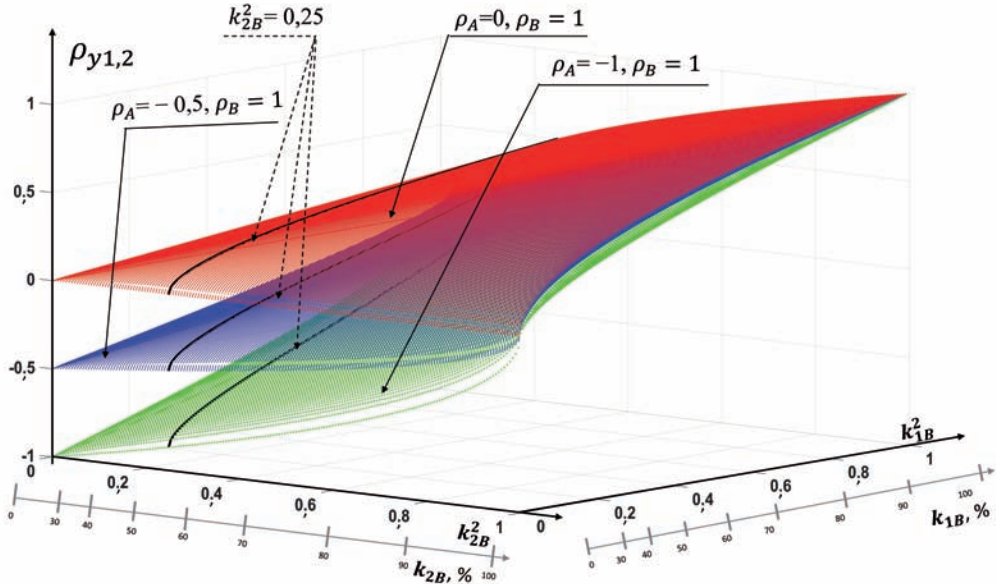
Ze względu na niezmienność postaci funkcji (11) przy zamianie wielkości u_{1A} na u_{1B} , u_{2A} na u_{2B} oraz ρ_A na ρ_B , wystarczy przeanalizować zależności dla jednego typu niepewności A lub B, gdyż dla drugiego typu, przy tym samym zestawie zmiennych, będą podobne zależności wskutek symetrii tego wzoru. Do przedstawienia współczynnika korelacji skorzysta się z ogólnej funkcji wg wzoru (11).

Na rysunku 3 podano wykresy 3D wartości wypadkowego współczynnika korelacji wielkości wyjściowych jako funkcje $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}^2, k_{2B}^2)$ i trzech par współczynników skorelowania typu A i B dwuelementowego mierzandru wejściowego X , tj.: $\rho_A = 0, \rho_B = 1$; $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ oraz $\rho_A = 1, \rho_B = 0$. Są to powierzchnie krzywoliniowe. Zaznaczono na nich ślady przekrojów dla trzech wartości współczynnika k_{2B} . Podobne powierzchnie przedstawiono na rys. 4, też dla trzech wartości par współczynników ρ_A, ρ_B , w tym dwu ujemnych, tj.: $\rho_A = -1, 0, \rho_B = 1$; $\rho_A = -0,5, \rho_B = 1$ oraz $\rho_A = 0, 0, \rho_B = 1$. Zaznaczono też jeden przekrój.

Wszystkie trzy przekroje z rys. 3 i jeden z rys. 4 przedstawiono następnie na rysunkach 5a-d jako wykresy 2D zależności $\rho_{y1,2}$



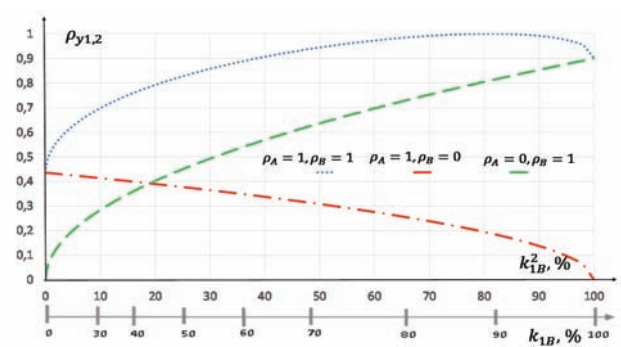
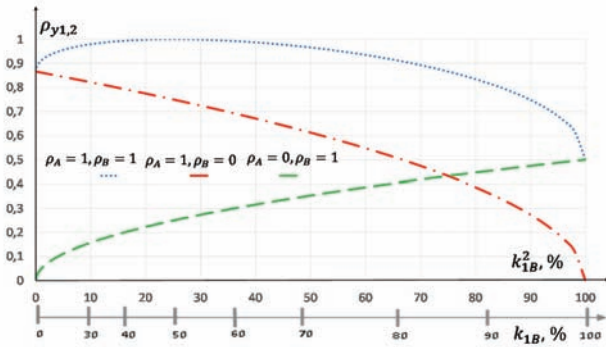
Rys. 3. Zależności współczynnika korelacji $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}^2, k_{2B}^2)$ mierzandru X jako wykresy 3D dla trzech par współczynników skorelowania typu A i B: $\rho_A = 0, \rho_B = 1$; $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ oraz $\rho_A = 1, \rho_B = 0$
 Fig. 3. Relations of correlation coefficient $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}^2, k_{2B}^2)$ of measurand X as 3D charts for three pairs of correlation coefficients type A or B components: $\rho_A = 0, \rho_B = 1$; $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ oraz $\rho_A = 1, \rho_B = 0$



Rys. 4. Zależność w rzucie trójwymiarowym współczynnika korelacji $\rho_{y1,2}$ dwóch wielkości wyjściowych w funkcji k_{1B} (lub jego kwadratu) i k_{2B} (lub jego kwadratu) oraz określonych wartości współczynników korelacji wielkości wejściowych: $\rho_A = -1,0, \rho_B = 1$; $\rho_A = -0,5, \rho_B = 1$; $\rho_A = 0,0, \rho_B = 1$

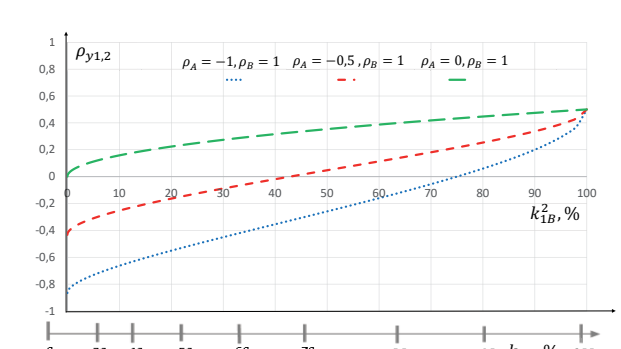
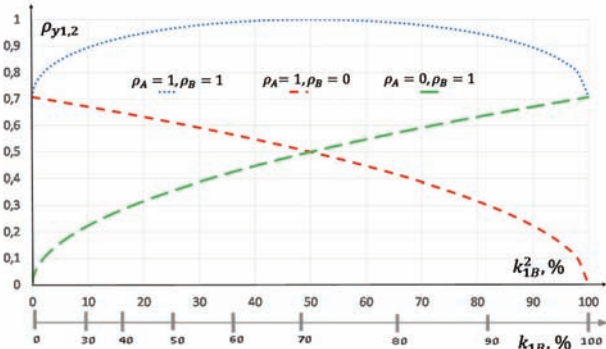
a) $k_{2B} = 0,50$ (50%), $k_{2B}^2 = 0,25$ (25%)

c) $k_{2B} = 0,9$ (90%), $k_{2B}^2 = 0,81$ (81%)



b) $k_{2B} \approx 0,71$ (71%), $k_{2B}^2 = 0,5$ (50%)

d) $k_{2B} = \frac{U_{2B}}{U_{y2}} = 0,5$ (50%), $k_{2B}^2 = 0,25$ (25%)



Rys. 5. Zależności współczynnika korelacji $\rho_{y1,2}$ dwóch wielkości wyjściowych w funkcji k_{1B} (lub jego kwadratu) dla trzech par współczynników korelacji rozkładów odchyłek tworzących składowe niepewności typu A oraz B: $\rho_A, \rho_B = \{0, 1; 1, 0; 1, 1\}$ oraz różnych wartości parametrów k_{2B} (i jego kwadratu) $\rho_A = -1,0, \rho_B = 1$; $\rho_A = -0,5, \rho_B = 1$; $\rho_A = 0,0, \rho_B = 1$

$$\text{od } k_{1B}^2 = \left(\frac{u_{1B}}{u_{y1}} \right)^2, \text{ tj.:$$

$$\rho_{y1,2} = f(k_{1B}^2) \quad (12a)$$

Na dole każdego z rysunków 5a–d dodano dodatkową nieliniową skalę dla funkcji liniowej

$$\rho_{y1,2} = f(k_{1B}) \quad (12b)$$

Wnioski szczegółowe wynikające z analizy wykresów na rysunkach 1–5 są następujące:

- największy współczynnik korelacji w całym zakresie k_{1B} ma krzywa $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ gdy $k_{1B} = k_{2B}$;
- dla wartości $k_{1B}^2 < 1 - k_{2B}^2$ krzywa dla dominuje nad krzywą $\rho_A = 0, \rho_B = 1$ zbliża się do krzywej $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ dla najmniejszych wartości $\rho_A = 1, \rho_B = 0$ k_{2B}^2 ;
- dla większych wartości $k_{1B}^2 > 1 - k_{2B}^2$ krzywa $\rho_A = 1, \rho_B = 0$ jest poniżej krzywej $\rho_A = 0, \rho_B = 1$;
- w punkcie $k_{1B}^2 = 1 - k_{2B}^2$ krzywe dla $\rho_A = 1, \rho_B = 0$ i $\rho_A = 0, \rho_B = 1$ przecinają się. Współczynnik korelacji wynosi $\rho_{y1,2} = k_{1B} \sqrt{1 - k_{1B}^2}$ i osiąga w tym punkcie wartość maksymalną dla $k_{1B}^2 = 1/2$ wartość $\rho_{y1,2} = 1/2$;
- dla wartości współczynnika korelacji $\rho_A < 0$ występuje opcja uzyskania ujemnego współczynnika korelacji $\rho_{y1,2}$ dla fragmentu zakresu zmienności k_{1B} ;
- dla $\rho_A = -1, \rho_B = 1$ i $k_{1B}^2 < 1 - k_{2B}^2$ otrzymuje się ujemny współczynnik korelacji, a dla $k_{1B}^2 > 1 - k_{2B}^2$ współczynnik korelacji jest dodatni. Największy zakres zmienności k_{1B} z ujemnym współczynnikiem korelacji występuje dla małych wartości zakresu k_{2B} .

Z dotychczasowych rozważań wynikają podane poniżej wnioski ogólne o szacowaniu elementów macierzy kowariancji w pomiarach pośrednich wieloparametrowych o skorelowanych wielkościach wejściowych.

Korelacja między wartościami wyników pomiarowych dwu skorzonych ze sobą wielkości, w tym pomiaru tej samej wielkości mierzonej dwoma różnymi miernikami lub na dwóch różnych zakresach tego samego miernika, czyli o różnych wartościach u_B , zależy od wartości tej niepewności i jest tym większa, im większa jest niepewność pomiaru typu B w stosunku do niepewności typu A w jednym lub obu wykonanych eksperymentach pomiarowych.

Maksymalny współczynnik korelacji $\rho_{y1,2} = 1$ osiąga się dla wielkości w pełni skorelowanych składowych typu A i typu B, $\rho_A = 1, \rho_B = 1$, gdy $k_{1B} = k_{2B}$. Prowadzi to do warunku

$$\frac{u_{1B}}{u_{1A}} = \frac{u_{2B}}{u_{2A}}. \text{ Zatem maksymalną wartość współczynnika korelacji}$$

otrzymuje się, gdy naprzemienne iloczyny niepewności typu A dla pierwszego i drugiego pomiaru i dla drugiego pomiaru typu B i odwrotnie, w obu pomiarach są sobie równe.

Współczynnik korelacji rośnie do 1 dla $k_{1B} < k_{2B}$, natomiast zmniejsza się dla $k_{1B} > k_{2B}$. Dla wartości $k_{1B}^2 < 1 - k_{2B}^2$ obserwujemy dużą ujemną korelację dla krzywych $\rho_A = (-1, -0,5)$, $\rho_B = (0, 1)$.

5. Niepewności względne

Przy opisie niepewności dla zakresów pomiarowych przyrządów i systemów oraz w pomiarach, których wzory zawierają

działania multiplikatywne (mnożenie, dzielenie itd.), bardzo użyteczne są wzory wyrażone we względnych niepewnościach. Otrzymuje się je z wzorów dla niepewności bezwzględnych przez podstawienia: $u_i = x_i u_{r_i}$, $u_{Ai} = x_i u_{r_{Ai}}$, $u_{Bi} = x_i u_{r_{Bi}}$ dla $i = 1, 2$. Ze wzoru (10) dla współczynnika korelacji otrzymuje się inną jego postać podaną we wzorze (13):

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{rA1} u_{rA2} + \rho_B u_{rB1} u_{rB2}}{\sqrt{u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2} \sqrt{u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2}} \quad (13)$$

W podobny sposób wyznacza się niepewności względne wielkości wyjściowych:

$$u_r^2(x_1) \equiv u_{rx1}^2 = \frac{u_{A1}^2 + u_{B1}^2}{x_1^2} = u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2 \quad (14a)$$

$$u_r^2(x_2) \equiv u_{rx2}^2 = \frac{u_{A2}^2 + u_{B2}^2}{x_2^2} = u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2 \quad (14b)$$

Niepewności względne u_{rx1} , u_{rx2} jako funkcje niepewności względnych u_{rA1} , u_{rA2} , u_{rB1} , u_{rB2} mają postać:

$$u_{rx1} = \sqrt{u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2} \quad (15a)$$

$$u_{rx2} = \sqrt{u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2} \quad (15b)$$

Współczynnik korelacji $\rho_{x1,2}$ w macierzy kowariancji dla niepewności względnych wyraża wzór zgodny z wzorem (13), a po skorzystaniu z wzorów (15a) i (15b) otrzymuje się wzór (16):

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{rA1} u_{rA2} + \rho_B u_{rB1} u_{rB2}}{u_{rx1} u_{rx2}} \quad (16)$$

Jeśli niepewności względne wielkości wejściowych są znane, np. jednakowe dla całego zakresu, to można się bezpośrednio posłużyć ich wektorowym równaniem propagacji, o strukturze podobnej jak dla niepewności bezwzględnych, podanym w [16], tj.

$$\mathbf{U}_{\delta Y} = \mathbf{S}_{\delta} \cdot \mathbf{U}_{\delta X} \cdot \mathbf{S}_{\delta}^T \quad (17)$$

gdzie: $\mathbf{U}_{\delta X}$, $\mathbf{U}_{\delta Y}$, $\mathbf{S}_{\delta} = \begin{bmatrix} x_i & \partial y_j \\ y_j & \partial x_i \end{bmatrix}$ – macierze kowariancji dla nie-

pełności względnych i macierz czułości o elementach oznaczonych indeksami $i = 1, 2, 3$ dla wierszy oraz $j = 1, 2, 3$ dla kolumn.

Dla niepewności względnych typu A i B można w podobny sposób jak poprzednio dla u_A i u_B stworzyć macierz $\mathbf{U}_{\delta AB}$, aby otrzymać macierz $\mathbf{U}_{\delta X} = \mathbf{S}_{\delta AB} \cdot \mathbf{U}_{\delta AB} \cdot \mathbf{S}_{\delta AB}^T$ o wyodrębnionych składowych niepewności względnych.

6. Niepewności mierzand 2D po przetworzeniu wg funkcji $Y = F(X)$

Wyznamy niepewności mierzand $Y = [y_1, y_2]^T$ otrzymanego pośrednio z przetwarzania mierzand $X = [x_1, x_2]^T$ za pomocą dowolnej funkcji $Y = F(X)$. Wartości i macierz kowariancji mierzand X są znane, np. otrzymano je z bezpośrednich pomiarów. Wartości mierzand wyjściowego $Y = [y_1, y_2]^T$ będą miały niepewności u_{y_1} , u_{y_2} . Oba mierzandy są dwuparametrowe (2D). Do wyznaczenia niepewności skorzysta się z ogólnego wektorowego równania propagacji niepewności (3). Funkcję przetwarzania linearyzuje się do postaci macierzy czułości S funkcjonału $F(\cdot)$ o wymiarach $[2 \times 2]$ i otrzymuje się:

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_{y_1}^2 & \rho_{y_1,2} u_{y_1} u_{y_2} \\ \rho_{y_1,2} u_{y_1} u_{y_2} & u_{y_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1}^2 & \rho_{x_1,2} u_{x_1} u_{x_2} \\ \rho_{x_1,2} u_{x_1} u_{x_2} & u_{x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie: macierz funkcji $F(\cdot)$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix};$$

α_1 , α_2 , β_1 , β_2 – odpowiednie współczynniki.

Po wykonaniu działań wg wzoru (18) otrzymuje się niepewności wyjściowe

$$u_{y_1}^2 = \alpha_1^2 u_{x_1}^2 + \alpha_2^2 u_{x_2}^2 + 2\rho_{x_1,2} \alpha_1 \alpha_2 u_{x_1} u_{x_2} \quad (19a)$$

$$u_{y_2}^2 = \beta_1^2 u_{x_1}^2 + \beta_2^2 u_{x_2}^2 + 2\rho_{x_1,2} \beta_1 \beta_2 u_{x_1} u_{x_2} \quad (19b)$$

oraz współczynnik korelacji $\rho_{y_1,2}$ dla zmiennych y_1 , y_2 :

$$\rho_{y_1,2} = \frac{\alpha_1 \beta_1 u_{x_1}^2 + \alpha_2 \beta_2 u_{x_2}^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \rho_{x_1,2} u_{x_1} u_{x_2}}{u_{y_1} u_{y_2}} \quad (20)$$

Z (20) wynika, że $\rho_{y_1,2} u_{y_1} u_{y_2} = \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}$. Wykorzystuje się to w dalszej analizie. Z (7a, b) i (19 a, b) wynikają równania dla niepewności wyjściowych u_{y_1} i u_{y_2} .

$$u_{y_1}^2 = \alpha_1^2 (u_{1A}^2 + u_{1B}^2) + \alpha_2^2 (u_{2A}^2 + u_{2B}^2) + 2\alpha_1 \alpha_2 (\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}) \quad (21a)$$

$$u_{y_2}^2 = \beta_1^2 (u_{1A}^2 + u_{1B}^2) + \beta_2^2 (u_{2A}^2 + u_{2B}^2) + 2\beta_1 \beta_2 (\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}) \quad (21b)$$

7. Wyjściowe składowe niepewności

Przy stosowaniu przyrządów i układów pomiarowych w różnych warunkach otoczenia i przy różnym losowym rozrzu-

obserwacji pomiarowych może być wymagane wyodrębnienie niepewności składowych typu A i B wielkości mierzand wyjściowego Y oraz skorelowania dla par tych wielkości. Zanalizujemy to na przykładzie mierzandów 2D w oparciu o zależności (7a) i (7b) dla $X = [x_1, x_2]^T$, tj.: $u_{x_1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2$ i $u_{x_2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2$.

Wejściowa macierz kowariancji U_X jest sumą dwu macierzy kowariancji dla składowych niepewności typu A i typu B wielkości wejściowych X :

$$U_X = U_{XA} + U_{XB} \quad (22)$$

dla niepewności typu A

$$U_{XA} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 \end{bmatrix} \quad (22a)$$

oraz dla niepewności typu B

$$U_{XB} = \begin{bmatrix} u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (22b)$$

Transformację macierzy kowariancji U_{XA} i U_{XB} składowych niepewności mierzand X realizuje się po linearyzacji funkcjonału $Y = F(X)$ wg wzoru (2) w następujący sposób:

$$U_{Y_A} = S U_A S^T \quad (23a)$$

$$U_{Y_B} = S U_B S^T \quad (23b)$$

gdzie S dane jest zależnością (3a).

Macierz kowariancji mierzand wyjściowego U_Y można wyznaczać dwójako: oszacować macierz U_X i z niej wyznaczyć bezpośrednio U_Y , lub z macierzy U_{XA} i U_{XB} znaleźć macierze U_{Y_A} i U_{Y_B} dla obu składowych niepewności u_{y_i} wszystkich wielkości wyjściowych. Otrzymuje się:

$$U_Y = S U_X S^T = S (U_A + U_B) S^T \quad (24)$$

gdzie:

$$U_X = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$U_Y = U_{Y_A} + U_{Y_B} = S U_A S^T + S U_B S^T \quad (25)$$

Jeśli wyznacza się U_Y , to oba sposoby są równoważne. Sprawdziliśmy to dla modelu o dwuwymiarowych (2D) mierzandach X i Y . Ale jedynie z wzoru (25) niespotkanego w literaturze wyznaczyć można niepewności składowe elementów mierzand wyjściowego U_Y i współczynniki korelacji dla każdego z ich typów A i B. Ogólnie dla splotów rozkładów wielowymiarowych tworzy się sumę macierzy kowariancji przy oddzielnej transformacji ich niepewności typów A i B.

8. Podsumowanie części 1.

W części 1 przedstawiono propozycję wektorowej metody wyznaczania niepewności w pomiarach pośrednich wieloparametrowych. Jest ona rozszerzeniem w stosunku do podanej w Suplemencie 2 do Przewodnika wyrażania niepewności GUM [1, 3] i uwzględnia przypadek skorelowania wielkościach wejściowych. Podano wzory dla niepewności i współczynnika korelacji na wyjściu przy znanych niepewnościach składowych A oraz B wielkości mierzonych i znanych współczynnikach skorelowania każdej z nich z jej odpowiednikami dla pozostałych wielkości. W zastosowanym tu modelu założono, że dla każdej z wielkości mierzonych jej składowe niepewności typu A oraz B są od siebie niezależne statystycznie i sumują się geometrycznie (pierwiastek z sumy ich kwadratów). Stąd wynika, że w pośrednich pomiarach wieloparametrowych skorelowanie mierzonych wielkości wejściowych jest tylko rezultatem osobnego skorelowania odchyłeń od estymatora wartości tworzących niepewności A oraz B. Umożliwia to oszacowanie wpływu tych wszystkich skorelowań na wartości elementów macierzy kowariancji. Macierz ta jest podstawą oceny dokładności przy łącznym dalszym stosowaniu wielkości ze sobą skojarzonych.

Współczynnik skorelowania między bieżącymi odchyleniami tworzącymi niepewności typu A dwu mierzonych wielkości można wyznaczyć eksperymentalnie, jeśli przeprowadzi się ich pomiary synchronicznie. Natomiast współczynnik skorelowania między zbiorami odchyłeń opisanych niepewnościami typu B ocenia się heurystycznie w oparciu o dotychczasową wiedzę opartą na doświadczeniu z wielu innych eksperymentów i wnikliwą analizę danego eksperymentu.

Zastosowanie w praktyce przedstawionej rozszerzonej wektorowej metody propagacji niepewności przybliży omówienie kilku charakterystycznych przykładów. Będą one analizowane w części 2. i dotyczą estymacji niepewności oraz wypadkowego współczynnika korelacji dla przetwarzania wyników w pośrednich pomiarach dwuwymiarowych (2D) według funkcji liniowej oraz kilku rodzajów funkcji nieliniowych. Wyniki osiągnięte w tych przykładach uzasadniają, by zaproponowaną tu metodę stosować w praktyce pomiarowej, w tym przemysłowej. Zostaną też podane łącznie wnioski końcowe, wynikające z obu części pracy.

Bibliografia

1. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data — Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections.
2. Supplement 1 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008, BIPM.
3. Supplement 2 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ – Extension to any number of output quantities. JCGM 102:2011 BIPM.
4. Supplement 4 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents JCGM 104:2009, BIPM.
5. Supplement 6 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ The role of measurement uncertainty in conformity assessment JCGM 106:2012, BIPM.
6. Conformity Assessment – General Requirements for the Competence of Testing and Calibration Laboratories, ISO/IEC 17025:2017.
7. EA-4/02.M: 2013 Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration.

8. Warsza Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia, Oficyna Wydawnicza PIAP, Warszawa 2016, ISBN 978-83-61278-31-3.
9. Zakharov I.P., *Estimating measurement uncertainty on the basis of observed and logical correlation*. “Measurement Techniques”, Vol. 50, No. 8, 2007, 808–816.
10. Dorozhovets M., Warsza Z.L., *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce*. „Przegląd Elektrotechniczny”, R. 83, Nr 1, 2007, 1–13.
11. Dorozhovets M., Warsza Z.L., *Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM (2) Uściślenie metod obliczeń niepewności typu B*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 2, 2007, 45–52.
12. Warsza Z.L., Zięba A., *Niepewność typu A pomiaru o obserwacjach samoskorelowanych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, R. 58, Nr 2, 2012, 157–161.
13. Warsza Z.L., Ezhela V.V., *Zarys podstaw teoretycznych wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 57, Nr 2, 2011, 175–179.
14. Warsza Z.L., Ezhela V.V., *O wyrażaniu i publikowaniu danych pomiarów wieloparametrowych – stan aktualny a potrzeby*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 10, 2011, 68–76.
15. Warsza Z.L., *Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements. Outline of Some Problems to be Solved*. Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX, ed. by Franco Pavese, Markus Bär et al, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 84, World Scientific Books 2012, Singapore, 418–425.
16. Warsza Z.L. Part 1, and Warsza Z.L. Puchalski J. Part 2: *Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples*. ppt: in CD Proceedings of conference: Problems and Progress of Metrology ppm’18 Szczyrk 04-06. June 2018. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science.
17. Warsza Z.L. Puchalski J., *Estimation of vector uncertainties of multivariable indirect instrumental measurement systems on the star circuit example*. XXII World Congress IMEKO 2018 Belfast. Abstract in CD Proceedings PO-062 and IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1065 (2018) 052026, DOI: 10.1088/1742-6596/1065/5/052026.
18. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 2, 2018, 31–39 DOI: 1014311/PAR_228/31.
19. Warsza Z.L., Puchalski J., *Ocena niepewności prostokątnych składowych impedancji wyznaczanych pośrednio z pomiarów składowych biegunowych i vice versa*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 3, 2018, 61–67, DOI: 1014311/PAR_229/61.
20. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności wartości funkcji z pomiarów w punktach kontrolnych*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 4, 2018, 39–50, DOI: 1014311/PAR_230/39.
21. Zięba A., *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.

Upgraded Method of the Estimation of Uncertainties in Multiparameter Measurements. Part 1. Theoretical Basis for Correlated Measured Variables

Abstract: The two-part work presents an extended version of the vector method of uncertainty evaluation of multiparameter measurements given in Supplement 2 to the Guide on Expression of Uncertainty of Measurements about the English acronym GUM [1]. The discussion was made on the example of measurements of a two-parameter (2D) measurand with correlated parameters. A novelty in the proposed method is to consider the correlation of deflections from estimators of values of quantities measured directly on the input, which created individual components of the type A and/or type B uncertainties. In this part 1, general formulas for the covariance matrix, output uncertainties and correlation coefficient were determined. Formulas for several characteristic specific cases are presented in table 1. The graphs show the correlation coefficients of the output quantities as a function of the type B contribution in the full uncertainty of the input quantities. In Part 2 will be presented examples of estimation of uncertainty and resultant correlation coefficient for several types of linear and non-linear functions of processing measured results. The general conclusions will be given on the end.

Keywords: multivariate measurements, measurand 2D, uncertainty components and correlation coefficients of the type A and type B, vector propagation of variance, resultant correlation coefficient

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

