



**Implementacja metody „Wir w Komórce” w środowisku
wieloprocessorowym dla zagadnienia przepływu
w komorze z ruchomą ścianką**

Dominik Błoński

Politechnika Wroclawska

Katedra Technologii Energetycznych, Turbin i Modelowania Procesów Ciepłno-Przepływowych

E-mail: dominik.blonski@pwr.edu.pl

REKOMENDACJA: *Prof. dr hab. inż. Henryk Kudela*

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono algorytm rozwiązywania równań ruchu płynu metody „Wir w Komórce” z wykorzystaniem różnicowego schematu kompaktowego rzędu czwartego do rozwiązywania równania Poissona i równania dyfuzji. Opisano kolejne kroki algorytmu wraz z badaniami dokładności poszczególnych schematów różnicowych. Program obliczeniowy został sprawdzony na przykładzie popularnego zagadnienia przepływu we wnęce. Otrzymane wyniki porównano z wynikami opublikowanymi przez innych autorów.

SŁOWA KLUCZOWE: *metoda VIC, metoda różnic skończonych, schematy kompaktowe, obliczenia równoległe*

1. WPROWADZENIE

Możliwość badania zmian zachowania się płynu poprzez śledzenie ewolucji pola wirowości jest bardzo atrakcyjną i pożądaną metodą badawczą. W metodzie cząstek wirowych równania ruchu płynu wyrażane są w formie transportu wirowości Helmholtza

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \omega \cdot \underline{\mathbf{u}} = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad \underline{\mathbf{u}} = (u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2)$$

gdzie $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ jest operatorem Laplace'a, $\nabla\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y} \right)$, a ψ oznacza funkcję prądu. Metoda „Wir w Komórce” (ang. „*Vortex In Cell*” (VIC)) łączy w sobie podejście eulerowskie i lagrangowskie. Do obliczeń wprowadza się cząstki wirowe unoszone przez przepływ. Pole prędkości \underline{u} wyznacza się z równania Possiona wiążącego funkcję prądu ψ z rozkładem wirowości ω (2). Równanie to rozwiązuje się, używając siatki numerycznej.

Gdy rozkład funkcji prądu jest już znany, to można wyznaczyć prędkość w poszczególnych węzłach siatki. Następnie, wykorzystując metodę dekompozycji lepkościowej równanie Helmholtza (1), rozwiązuje się w dwóch krokach: najpierw rozwiązuje się równanie konwekcji

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla\omega \cdot \underline{u} = 0 \quad (3)$$

a następnie uwzględniając lepkość płynu, rozwiązując równanie dyfuzji. W pierwszym kroku równanie konwekcji (3) zostaje zastąpione równaniem ruchu cząstek transportujących wirowość w zmiennych Lagrange'a

$$\frac{dx_p}{dt} = \underline{u}(t, x_p), \quad x(0, \alpha) = \alpha \quad (4)$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ oznacza współrzędne Lagrange'a, które pozwalają na śledzenie położenia cząstki. Z równania (3) wynika, że wirowość jest niezmienna w czasie i zgodnie z trzecim twierdzeniem Helmholtza jest transportowana wraz z cząstkami płynu [1], [2]. Cząstki wirowe mogą być traktowane jako cząstki materialne unoszone w polu prędkości zgodnie z równaniem (4).

W metodzie VIC rozkład pola wirowości zostaje zastąpiony dyskretnym rozkładem cząstek wirowych. Cząstka wirowa reprezentuje wirowość pewnej małej części obszaru obliczeniowego. Ze względu na ograniczenia sprzętowe przyjmuje się ograniczoną liczbę cząstek. Pojedyncza cząstka odpowiada średniej wartości wirowości jednej komórki o polu powierzchni h^2 . Każda z nich ma przypisaną cyrkulację, która wyraża się wzorem

$$\Gamma = \int_S \omega dS \quad (5)$$

i dla pojedynczej cząstki wirowej reprezentującej pojedynczą komórkę obszaru obliczeniowego o rozmiarze h^2 wynosi ona $\Gamma = \omega h^2$. W każdym kroku czasowym cząstki transportują pewną wartość wirowości, której wartość brana jest z węzła siatki obliczeniowej. Po przemieszczeniu cząstki wartość wirowości musi zostać z powrotem zwrócona na siatkę. Procedura ta zwana jest redystrybucją (ang. *remeshing*) i wykorzystuje jądra interpolacyjne wysokiego rzędu w celu równomierniej i dokładnej redystrybucji wirowości na sąsiadujące węzły. W kolejnym kroku uwzględniana jest lepkość płynu poprzez rozwiązanie równania dyfuzji

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (6)$$

gdzie Re jest liczbą Reynoldsa, $Re = uL/\nu$, L jest wymiarem charakterystycznym wnętrza.

Za wyborem przedstawionej powyżej metody przemawia możliwość wykonywania szybkich obliczeń w technice wieloprocesorowej. Ze względu na fakt, że redystrybucja ma charakter lokalny i liczba sąsiadujących punktów, do których zwracana jest wirowość, ograniczona jest nośnikiem jądra interpolacyjnego, możliwe jest prowadzenie obliczeń w sposób niezależny względem innych części. Wykorzystanie metody VIC połączonej z równoległymi obliczeniami na wielu procesorach umożliwia prowadzenie złożonych, niestacjonarnych obliczeń numerycznych związanych z przepływami płynów i pozwala wielokrotnie skrócić czas oczekiwania na wyniki przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej dokładności otrzymanych wyników.

Główny obszar obliczeniowy dzielony jest na liczbę części równą liczbie procesów obliczeniowych. Podział ten wykonywany jest na zasadzie utworzenia siatki kartezjańskiej składającej się z podobszarów. Siatka kartezjańska jest strukturą dwuwymiarową punktów bądź podobszarów, które mają dwóch sąsiadów w każdym z wymiarów. Tak więc, jeśli siatka kartezjańska ma rozmiary $N \times N$, jej punkty/podobszary mają współrzędne (p_i, p_j) , gdzie $0 \leq p_i < N$ i $0 \leq p_j < N$. Każdemu z procesów zostaje przydzielony jeden podobszar, na którym prowadzi on obliczenia. Do rozwiązania układu równań procesy muszą komunikować się ze sobą i wymieniać wartościami zmiennych leżących na granicy sąsiadujących podobszarów. Za proces komunikacji odpowiedzialny jest protokół MPI (Message Passing Interface). Układy równań liniowych rozwiązywane są przy użyciu biblioteki *hypre*. Dokładniejszy jej opis został przedstawiony w [3]–[5].

Rozwiązywanie przykładu obliczeniowego z przepływem we wnące jest klasycznym sposobem na sprawdzenie algorytmów rozwiązujących równania Naviera–Stokesa. Pomimo że problem wydaje się być prosty do rozwiązania, sam przepływ okazuje się złożony, głównie ze względu na występujące narożne struktury wirowe. Ze względu na swoją prostotę został on przebadany przez liczne ośrodki naukowe zarówno eksperymentalnie, jak i numerycznie.

Test dokładności na przykładzie przepływu we wnące wykonywany jest w trzech etapach. Dla pierwszego etapu poszukiwane jest rozwiązanie stacjonarne, występujące dla niskich liczb Reynoldsa. Drugi etap badań skupia się na przejściu ze stanu stacjonarnego w stan niestacjonarny. Następuje to po przekroczeniu krytycznej liczby Reynoldsa powyżej której przepływ staje się turbulentny. Ostatecznie badany jest przypadek przepływu we wnące dla dużych liczb Reynoldsa, w których występuje jedynie przepływ niestacjonarny. W przypadku obliczeń dwuwymiarowych dla dużych liczb Reynoldsa, ze względu na trójwymiarowy charakter przepływu, wyniki eksperymentalne nie pokrywają się z wynikami obliczeń. Dla porównania dokładności wykorzystuje się zatem jedynie wartości z badań numerycznych innych autorów.

W niniejszej pracy wykonano szereg obliczeń w szerokim zakresie liczb Reynoldsa, prowadząc obliczenia zarówno w przypadku, gdy występuje przepływ ustalony jak i burzliwy oraz niestacjonarny. Otrzymane wyniki zostały następnie porównane z ogólnodostępnymi wynikami referencyjnymi uznanych autorów.

2. ROZWIĄZYWANIE RÓWNIANIA POISSONA

Pierwszym równaniem jakie należy rozwiązać w metodzie VIC jest równanie Poissona dla funkcji prądu i zadanej wirowości:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (7)$$

W kodach obliczeniowych metody VIC, wykorzystywanych w zespole Modelowania Numerycznego Przepływów ME/K3 PWr do dyskretyzacji funkcji prądu, stosowano wcześniej schemat centralny rzędu drugiego. Wraz z rozwojem możliwości obliczeniowych współczesnych komputerów zaistniała możliwość wprowadzenia dokładniejszych, choć bardziej kosztownych obliczeniowo schematów różnicowych. W obecnych obliczeniach zastosowano kompaktową metodą czwartego rzędu wykorzystującą 9-punktowy schemat różnicowy. Wyprowadzenie tego schematu zostało szczegółowo przedstawiono w [6], [7]. W celu zachowania kompletności niniejszej pracy zdecydowano się zaprezentować skróconą wersję wyprowadzenia schematu. Schemat centralny dla drugiej pochodnej można przedstawić w następujący sposób

$$\frac{\delta_x^2 \psi}{h_x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{h_x^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + O(h_x^4) = \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + O(h^4) \quad (8)$$

gdzie $\delta_x^2 \psi = \psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}$, a $h_x = h$ jest odległością pomiędzy węzłami siatki w kierunku osi x . Podstawiając pod operator drugiej pochodnej operator schematu centralnego

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2}{h_x^2} + O(h^2) \quad (9)$$

otrzymuje się wyrażenie

$$\frac{\delta_x^2}{h_x^2} \psi = \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \left(\frac{\delta_x^2}{h_x^2} + O(h^2)\right)\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + O(h^4) \approx \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\delta_x^2}{h_x^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + O(h^4) \quad (10)$$

Człon związany z błędem $O(h^2)$ po przemnożeniu przez h_x^2 będzie rzędu h^4 , więc zostanie dodany do błędu odcięcia $O(h^4)$. Po przekształceniu równania względem operatora drugiej pochodnej otrzymujemy czwartorzędową aproksymację drugiej pochodnej. Można zapisać drugą pochodną w następującej postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\delta_x^2}{h_x^2}\right)^{-1} \frac{\delta_x^2}{h_x^2} \psi + \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\delta_x^2}{h_x^2}\right)^{-1} O(h^4) = \left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\delta_x^2}{h_x^2}\right)^{-1} \frac{\delta_x^2}{h_x^2} \psi + O(h^4) \quad (11)$$

Dzięki tym przekształceniom otrzymano operator centralny pozwalający na aproksymację pochodnej z wykorzystaniem wartości z sąsiadujących punktów oraz ich drugich pochodnych. Równanie Poissona z wykorzystaniem operatora centralnego rzędu czwartego będzie miało następującą postać

$$\left(1 + \frac{h_x^2}{12} \frac{\delta_x^2}{h_x^2}\right)^{-1} \frac{\delta_x^2}{h_x^2} \psi + \left(1 + \frac{h_y^2}{12} \frac{\delta_y^2}{h_y^2}\right)^{-1} \frac{\delta_y^2}{h_y^2} \psi = -\omega + O(h^4) \quad (12)$$

Po pomnożeniu powyższego równania stronami przez wyrażenie

$$\left(h_x^2 + \frac{h_x^2 \delta_x^2}{12}\right) \left(h_y^2 + \frac{h_y^2 \delta_y^2}{12}\right) \quad (13)$$

otrzymuje się rozwinięcie prawej strony równania oraz ostateczną wersję schematu kompaktowego rzędu czwartego

$$\begin{aligned} \left(h_y^2 + \frac{h_y^2 \delta_y^2}{12}\right) \delta_x^2 \psi + \left(h_x^2 + \frac{h_x^2 \delta_x^2}{12}\right) \delta_y^2 \psi &= -\left(h_x^2 + \frac{h_x^2 \delta_x^2}{12}\right) \left(h_y^2 + \frac{h_y^2 \delta_y^2}{12}\right) \omega + O(h^4) \\ \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right) \delta_x^2 \psi + \frac{h_x^2}{h_y^2} \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right) \delta_y^2 \psi &= -h_x^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} + \frac{\delta_y^2}{12}\right) \omega + O(h^4) \end{aligned} \quad (14)$$

Jako że forma symboliczna jest trudna do bezpośredniego zastosowania i została przedstawiona do formalnego wyprowadzenia, niezbędne jest przedstawienie schematu w bardziej przystępnej formie. Po przekształceniu równania, odrzucenie członów otrzymuje się dziewięciopunktowy schemat z lewej oraz pięciopunktowy schemat z prawej strony.

$$\begin{aligned} &a\psi_{i,j} + b(\psi_{i+1,j}\psi_{i-1,j}) + c(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \\ &+ d(\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1}) \\ &= 0.5h_x^2(8\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie: $a = -10(1 + \gamma^2)$, $b = 5 - \gamma^2$, $c = 5\gamma^2 - 1$, $d = (1 + \gamma^2)/2$, $\gamma = h_x/h_y$.

Powyżej przedstawiony sposób dyskretyzacji równania Poissona został przetestowany dla zagadnienia Dirichleta o znanym rozwiązaniu. Umożliwiło to na porównanie rozwiązania numerycznego z wartością dokładną. Zagadnienie to miało postać:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \frac{1}{-128\pi^2} (8\pi x) \sin(8\pi x), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \omega(0, y) &= \frac{1}{-128\pi^2} (8\pi x) \sin(8\pi x) & (y) \in [0, 1] \\ \omega(1, y) &= \frac{1}{-128\pi^2} (8\pi x) \sin(8\pi x) & (y) \in [0, 1] \\ \omega(x, 0) &= \frac{1}{-128\pi^2} (8\pi x) \sin(8\pi x) & (x) \in [0, 1] \\ \omega(x, 1) &= \frac{1}{-128\pi^2} (8\pi x) \sin(8\pi x) & (x) \in [0, 1] \end{aligned} \quad (16)$$

W celu sprawdzenia działania poprawności programu, jak i używanych bibliotek został wyznaczony rząd aproksymacji. Rząd definiuje się wyrażeniem $\alpha = \log(\frac{\epsilon_h}{\epsilon_{\frac{h}{2}}}) / \log(\frac{h}{\frac{h}{2}})$, gdzie ϵ to wartość błędu. Obliczenia były prowadzone w podwójnej precyzji przy wykorzystaniu 4 wątków, przy czym każdy wątek rozwiązywał problem na kwadracie składającym się z $N \times N$ węzłów. Jako miarę błędu przyjęto normę maksimum ($L_{\max} = \max |u_{\text{dok.}} - u_{\text{obl.}}|$), której wartość w zależności od gęstości siatki została przedstawiona w tab. 1. Na jej podstawie został wyznaczony rząd aproksymacji. Można zauważyć, że rząd wynosi 4 praktycznie w całym badanym zakresie. Oznacza to, że przy podwójnym zagęszczeniu siatki błąd dyskretyzacji równania różniczkowego maleje aż 16-krotnie.

Tabela 1: Wyznaczenie rzędu aproksymacji równania Poissona

Liczba wątków	N	Liczba elementów na wątek	Liczba elementów globalnie	L_{\max}	Rząd aproksymacji
4	8	64	256	1,26E-2	—
4	16	256	1024	9,37E-4	3,75
4	32	1024	4096	5,73E-05	4,03
4	64	4096	16384	3,45E-06	4,05
4	128	16384	65536	2,30E-07	3,91
4	256	65536	262144	1,34E-08	4,10
4	512	262144	1048576	8,37E-10	4,00
4	1024	1048576	4194304	5,25E-11	3,99

3. WYZNACZANIE POLA PRĘDKOŚCI Z FUNKCJI PRĄDU

Kolejnym krokiem niezbędnym do wykonania w algorytmie metody VIC jest wyznaczenie prędkości z funkcji prądu

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_y \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi_x \end{aligned} \quad (17)$$

Podobnie jak w przypadku równania Poissona i w tym przypadku do dyskretyzacji wykorzystano kompaktową metodę czwartego rzędu. Aby osiągnąć wyższy rząd dokładności posłużono się interpolacją Hermite'a. Zauważalną wadą tej metody jest konieczność znajomości wartości pochodnej na brzegu, bądź też przyjęcie warunku periodyczności. Zakładając, że dysponuje się wartością zmiennej oraz jej pochodnej w liczonych oraz sąsiadujących punktach, możliwe jest sformułowanie wielomianu interpolacyjnego będącego kombinacją liniową wektora ψ o wielomianie bazowym $a(x)$, oraz ψ_x o wielomianie bazowym $b(x)$

$$H_i(x) = \sum_{j=-1}^1 (a_j \psi_{i+j} + b_j \psi_{x,i+j}) \quad (18)$$

Przy klasycznym schemacie różnicowym błąd aproksymacji pochodnej funkcji prądu rzędu k dla punktu i i sąsiadujących punktów symetrycznego schematu o rozpiętości $2p + 1$ można wyrazić jako

$$\left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x^k} \right)_i - \sum_{j=-p}^p (a_j \psi_{i+j}) = TE \quad (19)$$

gdzie TE – błąd odcięcia (ang. *truncation error*). Dostosowując równanie (20) do aproksymacji pochodnej pierwszego rzędu przy użyciu wielomianu Hermite'a (19), otrzymuje się błąd aproksymacji równy

$$\sum_{i=-1}^1 (b_j \psi_{x,i+j}) - \sum_{i=-1}^1 (a_j \psi_{i+j}) = TE \quad (20)$$

Żądany schemat ma być rzędu czwartego, stąd też $TE = O(h^4)$. Rozwijając równanie (21), otrzymuje się

$$(a_1\psi_{i+1} + a_0\psi_i + a_{-1}\psi_{i-1}) - (b_1\psi_{x,i+1} + b_0\psi_{x,i} + b_{x,-1}\psi_{x,i-1}) = O(h^4) \quad (21)$$

Następnie rozwijają się w szereg Taylora poszczególne człony względem punktu i i porządkuje się, tak aby możliwe było utworzenie układu równań liniowych. Po uporządkowaniu rozwinięć względem wartości funkcji i kolejnych pochodnych postać równania algebraicznego wiążącego wartości współczynników a_i , b_i oraz ψ i jej pochodnych jest następująca

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_0 + a_{-1})\psi_i + \left(h(a_1 - a_{-1}) - b_1 - b_0 - b_{-1} \right) \psi_{x,i} + \left(\frac{1}{2}h^2(a_1 + a_{-1}) - \right. \\ & \left. h(b_1 - b_{-1}) \right) \psi_{xx,i} + \left(\frac{1}{6}h^3(a_1 - a_{-1}) - \frac{1}{2}h^2(b_1 + b_{-1}) \right) \psi_{xxx,i} + \\ & \left(\frac{1}{24}h^4(a_1 + a_{-1}) - \frac{1}{6}h^3(b_1 - b_{-1}) \right) \psi_{xxxx,i} = O(h^4) \end{aligned} \quad (22)$$

Aby powyższa zależność była prawdziwa należy wyzerować wyrażenia w nawiasach aż do czwartej pochodnej $\psi_{xxxx,i}$

$$a_1 + a_0 + a_{-1} = 0 \quad (23)$$

$$h(a_1 - a_{-1}) - (b_1 + b_0 + b_{-1}) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}h^2(a_1 + a_{-1}) - h(b_1 - b_{-1}) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{6}h^3(a_1 - a_{-1}) - \frac{1}{2}h^2(b_1 + b_{-1}) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{24}h^4(a_1 + a_{-1}) - \frac{1}{6}h^3(b_1 - b_{-1}) = 0 \quad (27)$$

Mając 6 niewiadomych i 5 równań, zakładamy, że jedna z niewiadomych jest parametrem i jest on równy 1 (np. $b_1 = 1$). Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymuje się żądane wartości współczynników wielomianu Hermite’a. Wynoszą one odpowiednio $a_{-1} = 3/h$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3/h$, $b_{-1} = 1$, $b_0 = 4$, $b_1 = 1$. Błąd aproksymacji w tym przypadku wynosi $TE = \frac{1}{30}h^4\psi_{xxxxx,i}$. Gotowe do użycia schematy do wyznaczenia składowych prędkości u i v na podstawie funkcji prądu mają postać trójprzekątniowego układu równań:

$$\begin{aligned} 4\psi_{y,(i,j)} + \psi_{y,(i,j+1)} + \psi_{y,(i,j-1)} &= \frac{3}{h}(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \\ 4\psi_{x,(i,j)} + \psi_{x,(i+1,j)} + \psi_{x,(i-1,j)} &= \frac{-3}{h}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (28)$$

Dokładniejszy opis i wyprowadzenia zostały zawarte również w [8]. Przeprowadzone zostały testy sprawdzające rząd metody oraz poprawność działania programu analogicznie do równania Poissona. Sprawdzenia dokonano dla następujących warunków obliczeniowych

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= e^{2x} + 6 \sin(2\pi x), & (x, y) &\in [0, 1] \times [0, 1] \\
\psi_x(0, y) &= 2(e^{2x} + 6 \sin(2\pi x)) & (y) &\in [0, 1] \\
\psi_x(1, y) &= 2(e^{2x} + 6 \sin(2\pi x)) & (y) &\in [0, 1] \\
\psi_x(x, 0) &= 2(e^{2x} + 6 \sin(2\pi x)) & (x) &\in [0, 1] \\
\psi_x(x, 1) &= 2(e^{2x} + 6 \sin(2\pi x)) & (x) &\in [0, 1]
\end{aligned} \tag{29}$$

Otrzymane wyniki przedstawione w tab. 2 potwierdzają zakładaną dokładność aproksymacji.

Tabela 2: Rząd aproksymacji wyznaczania prędkości z funkcji prądu

Liczba wątków	N	Liczba elementów na wątek	Liczba elementów globalnie	L_{\max}	Rząd aproksymacji
4	2	4	16	1,95307	–
4	4	16	64	1,32 E-1	3,88
4	8	64	256	6,43E-03	4,36
4	16	256	1024	3,5E-04	4,19
4	32	1024	4096	2,1E-05	4,09
4	64	4096	16384	1,3E-06	4,05
4	128	16384	65536	7,7E-08	4,02

4. KONWEKCJA

Cząstki transportujące wirowość poruszają się jak cząstki materialne, gdzie nie działa na nie lepkość płynu. Są one unoszone w polu prędkości zgodnie z równaniem

$$\frac{dx_p}{dt} = \underline{u}(t, x_p) \quad x(0, \alpha) = \alpha \tag{30}$$

Równanie (30) rozwiązywane jest w każdym kroku czasowym Δt . Do jego rozwiązania wykorzystano metody Rungego–Kutty 4 rzędu z podkrokową interpolacją prędkości względem położenia cząstek o następującym algorytmie rozwiązywania:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t u(t_0, x_0) \\
k_2 &= \frac{\Delta t}{2} u(t_0, x_0 + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= \frac{\Delta t}{2} u(t_0, x_0 + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= \Delta t u(t_0, x_0 + k_3) \\
x_1 &= x_0 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}
\end{aligned} \tag{31}$$

Dla podkroków k_2, k_3, k_4 konieczne jest każdorazowe określenie wektora prędkości. W tym celu stosowana jest interpolacja tej wartości na podstawie 4 najbliższych położonych węzłów. W związku z powyższym, w implementacji wieloprocesorowej może wystąpić taka sytuacja, że cząstka zostanie uniesiona w obszar leżący pomiędzy sąsiadującymi procesami. W tym celu obszar obliczeniowy każdego procesora został powiększony o jeden rząd w każdym kierunku, a następnie uzupełniony wartościami wektora prędkości swoich sąsiadów przy użyciu protokołu MPI. Każdy procesor wysyła swoje wartości z brzegu ograniczającego jego obszar obliczeniowy komendą MPI_Send, a następnie odbiera brakujące wartości dzięki komendzie MPI_Recv.

5. REDYSTRYBUCJA

Znając nowe położenie cząstek niosących ze sobą wirowość przetransportowaną z węzłów, należy ją z powrotem zwrócić na siatkę. Dlatego w każdej iteracji metody VIC należy przeprowadzić redystrybucję wirowości. Wykorzystywane jest do tego jądro interpolacyjne wysokiego rzędu. Pożądane jest aby suma wszystkich momentów (α) była równa 0. Sumę tę wyraża się równaniem

$$\sum_p x^\alpha \phi\left(\frac{x - x_p}{h}\right) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m - 1 \quad (32)$$

Liczba zachowywanych momentów α jest ściśle zależna od rzędu dokładności jądra interpolacyjnego m . Jeżeli równanie (33) jest spełnione i suma kolejnych momentów jest równa zero oznacza to, że jądro jest rzędu m .

Chęć podniesienia rzędu dokładności implikuje wzrost liczby punktów jakie muszą zostać wykorzystane do lokalnej redystrybucji. Wiąże się z wydłużeniem czasu obliczeń. Wartość nowej wirowości w węźle jest otrzymywana jako suma wkładu wirowości starych cząstek pomnożonych przez jądra jednowymiarowe. W programie zostało zaimplementowane jądro Z_2 sklejane z 3 funkcji. Zachowuje ono pierwsze 3 momenty: zerowy – cyrkulację, pierwszy – impuls liniowy oraz drugi – impuls kątowy. Opisane jest następującymi równaniami

$$Z_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Przy ściankach stosowana jest interpolacja jednostronna[16]. Aby otrzymać nową wartość wirowości w węźle posługujemy się równaniem:

$$\omega(x_j, y_j) = \sum_p \Gamma_p \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{h}\right) \varphi\left(\frac{y_j - y_p}{h}\right) \frac{1}{h^2} \quad (33)$$

gdzie: Γ_p – intensywność cyrkulacji starej cząstki, φ – jednowymiarowe jądro interpolacyjne, x_j, y_j – położenie węzła, x_p, y_p – położenie cząstki.

Implementacja wieloprocesorowa wymaga, tak jak w przypadku konwekcji cząstek, rozszerzenia obszaru obliczeniowego dla każdego procesora. Wymagane jest powiększenie obszaru obliczeniowego aż o dwa rzędy w każdym kierunku (ang. *ghost cells*). Jest to konieczne ze względu transportu wirowości pomiędzy sąsiadującymi

procesami. To rozszerzenie można traktować jako warstwę buforową. Wkłady do wirowości przekazywane są sąsiadującym procesom poprzez komendy MPI_Send oraz MPI_Recv.

6. RÓWNANIE DYFUZJI

Po rozwiązaniu kroku nielepkiego należy rozwiązać równanie dyfuzji pozwalające uwzględnić lepkość płynu

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (34)$$

Do dyskretyzacji czasowej równania dyfuzji wykorzystany jest schemat jawno-niejawny Cranka–Nicholsona. Pozwala on na osiągnięcie drugiego rzędu dyskretyzacji po czasie. Dyskretyzacja po przestrzeni opiera się na czwartorzędowej aproksymacji Padego. Czwarty rząd dokładności po czasie jest możliwy do osiągnięcia poprzez ekstrapolację Richardsona połączoną z metodą ADI [9]. W tym opracowaniu zdecydowano się nie implementować tego rozwiązania. Równanie rozwiązywane jest w dwóch krokach, co wymaga dwukrotnego rozwiązania układu równań z macierzą tridiagonalną zamiast jednego dziewięcioprzekątniowego. Schemat różnicowy Cranka–Nicholsona ma postać:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j}^n) \right) + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j}^n) \right) \quad (35)$$

Pamiętać należy, że operator centralny drugiej pochodnej można aproksymować operatorem różnicowym rzędu czwartego

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(h_x^2 + \frac{h_x^2}{12} \delta_x^2 \right)^{-1} \delta_x^2 + O(h^4) \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(h_y^2 + \frac{h_y^2}{12} \delta_y^2 \right)^{-1} \delta_y^2 + O(h^4) \quad (37)$$

Po uporządkowaniu równania (35), przenosząc wiadome na prawą stronę, a niewiadome na lewą oraz podstawieniu powyższych aproksymacji (36), (37), otrzymuje się

$$\omega_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \nu \Delta t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \omega_{i,j}^{n+1} \right) = \frac{1}{2} \nu \Delta t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega_{i,j}^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \omega_{i,j}^n \right) + \omega_{i,j}^n \quad (38)$$

Po przyjęciu, że $h_x = h_y = h$ oraz $r = \frac{\nu \Delta t}{2h^2}$, równanie można przedstawić w następujący sposób

$$\begin{aligned} & \left(1 - r \left(\left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} \right)^{-1} \delta_x^2 - \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12} \right)^{-1} \delta_y^2 \right) \right) \omega_{i,j}^{n+1} = \\ & \left(1 + r \left(\left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} \right)^{-1} \delta_x^2 + \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12} \right)^{-1} \delta_y^2 \right) \right) \omega_{i,j}^n \end{aligned} \quad (39)$$

Stosując metodę faktoryzacji, czyli przekształcenia jednego złożonego równania do postaci iloczynów prostszych składników, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \left(1 - r \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)^{-1} \delta_x^2\right) \left(1 - r \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1} \delta_y^2\right) \omega_{i,j}^{n+1} = \\ \left(1 + r \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)^{-1} \delta_x^2\right) \left(1 + r \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1} \delta_y^2\right) \omega_{i,j}^n \end{aligned} \quad (40)$$

Przemnażając obie strony przez $\left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right) \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)$, otrzymuje się schemat różnicowy składający się z 9 punktów po prawej i 9 punktów po lewej stronie

$$\left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} - r\delta_x^2\right) \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12} - r\delta_y^2\right) \omega_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} + r\delta_x^2\right) \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12} + r\delta_y^2\right) \omega_{i,j}^n \quad (41)$$

Równanie (41) rozwiązujemy w dwóch podkrokach. W pierwszym szukane jest rozwiązanie po osi x , a w drugim po osi y :

$$a\omega_{i,j}^* + b(\omega_{i+1,j}^* + \omega_{i-1,j}^*) = c\omega_{i,j}^n + d(\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n) + e(\omega_{i+1,j+1}^n + \omega_{i-1,j-1}^n + \omega_{i-1,j+1}^n + \omega_{i-1,j-1}^n) \quad (42)$$

$$a\omega_{i,j}^{n+1} + b(\omega_{i,j+1}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}) = \omega_{i,j}^* \quad (43)$$

gdzie: $r = \frac{\nu\Delta t}{2h^2}$, $a = 2r + \frac{5}{6}$, $b = -r + \frac{1}{12}$, $c = (-2r + \frac{5}{6})^2$, $d = (-2r + \frac{5}{6})(r + \frac{1}{12})$, $e = (r + \frac{1}{12})$.

Odejmując od siebie równania (39) i (40) możliwe jest określenie błędu jaki został wprowadzony przez uproszczenie. Jest on rzędu $O(\Delta t^3) + O(h^4)$:

$$\begin{aligned} \left(r^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)^{-1} \delta_x^2 \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1} \delta_y^2\right) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n) \approx \\ \left(r^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)^{-1} \delta_x^2 \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1} \delta_y^2\right) \omega_{t_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \\ \left(\frac{\nu^2 \Delta t^3}{4h^4} \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)^{-1} \delta_x^2 \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1} \delta_y^2\right) \omega_{t_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\nu^2 \Delta t^3}{4} \omega_{txxy} \end{aligned} \quad (44)$$

Analogicznie jak w pozostałych równaniach przeprowadzono test sprawdzający dokładność dyskretyzacji. Po wykonaniu odpowiednio dużej liczby kroków czasowych liczony był błąd maksymalny rozwiązania względem rozwiązania dokładnego. Posłużono się następującym zagadnieniem brzegowym

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t_0) = e^{-8t\pi^2\nu} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \omega(0, y, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \quad (y) \in [0, 1] \\ \omega(1, y, t) = 2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \quad (y) \in [0, 1] \\ \omega(x, 0, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \quad (x) \in [0, 1] \\ \omega(x, 1, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \quad (x) \in [0, 1] \end{aligned} \quad (45)$$

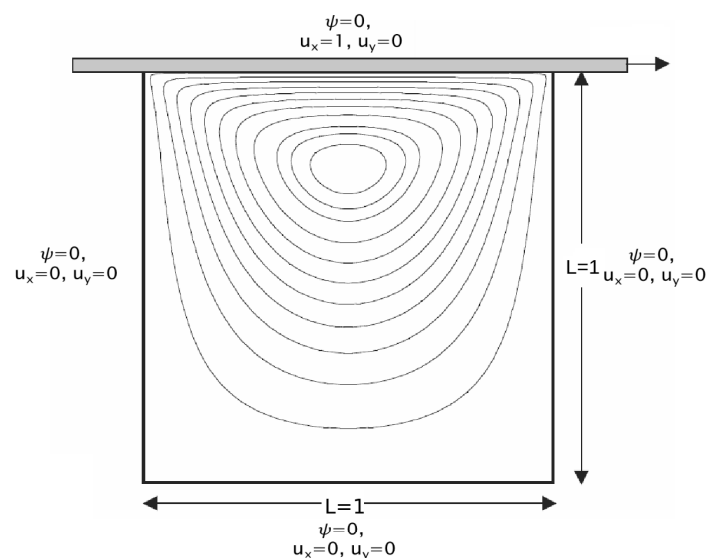
Wyniki zamieszczone w tab. 3 potwierdzają oczekiwany 4 rząd dokładności aproksymacji po przestrzeni. Badanie dokładności po czasie nie jest konieczne, gdyż wielokrotnie wykazano, że metoda Cranka–Nicholsona jest metodą drugiego rzędu dokładności.

Tabela 3: Wyznaczanie rzędu aproksymacji równania dyfuzji

N	Δt	Liczba kroków	L_{\max}	Rząd aproksymacji
4	0,0001	1000	0,0105	—
8	0,0001	1000	7,15E-04	3,87
16	0,0001	1000	3,22E-05	4,47
32	0,0001	1000	1,44E-06	4,48
64	0,0001	1000	6,80E-08	4,39

7. ZAGADNIENIE TESTOWE PRZEPŁYWU WE WNECIE

Zagadnienie testowe przepływu we wnęce jest popularnym przypadkiem z mechaniki płynów, w którym rozważany jest przepływ w zamkniętym naczyniu z jedną ścianką poruszającą się z pewną prędkością. Dla niskich liczby Reynoldsa zagadnienie to jest stacjonarne i może dobrze pokrywać się z wartościami eksperymentalnymi dla przypadków dwuwymiarowych. Wraz z jej wzrostem i po przekroczeniu krytycznej wartości pole prędkości staje się burzliwe, natomiast przepływ trójwymiarowy. Wartości eksperymentalne nie odzwierciedlają wartości obliczonych dla dwóch wymiarów [10], [11].



Rys. 1: Przepływ we wnęce

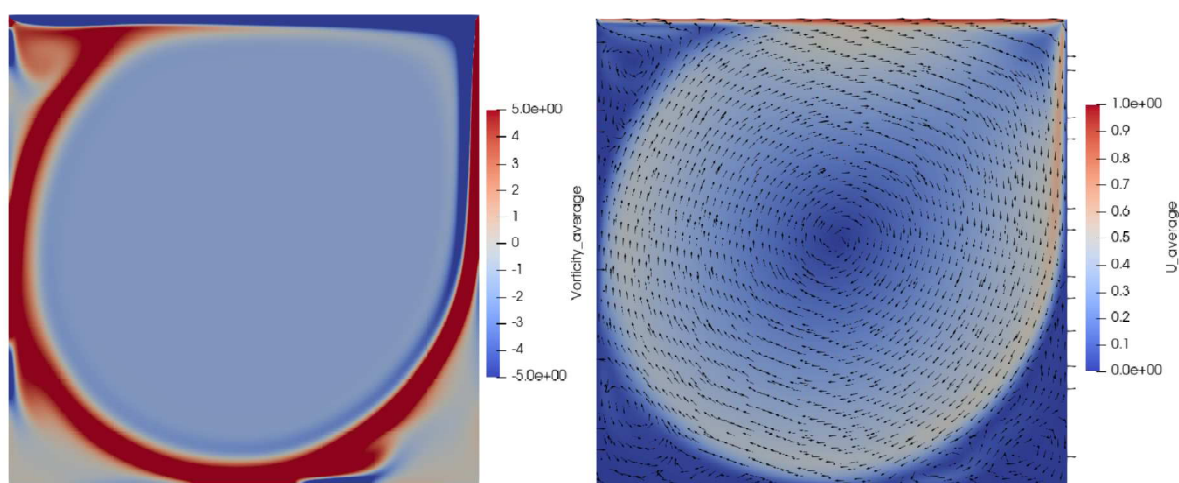
Omawiany przypadek wraz z warunkami brzegowymi został zilustrowany na rys. 1. Widzimy na nim wnękę przykrytą pokrywą. Pokrywa ta porusza się z prędkością 1 m/s. Wszystkie pozostałe ściany są nieruchome, gdzie wartość funkcji prądu na każdej z nich jest równa 0.

Gdy w obszarze obliczeniowym występują ściany sztywne, w których należy zrealizować warunek braku poślizgu (ang. *no slip wall condition*), należy na brzegach w równaniu dyfuzji wyliczyć taką wartość wirowości, aby składowa prędkości styczna

do ściany była równa 0. Do określenia tej wartości skorzystano z trzeciorzędowej formuły Brileya, która wykorzystuje 3 najbliższe wartości funkcji prądu w kierunku normalnym do ściany w liczonym węźle oraz wartość prędkości z jaką porusza się ścianka.

$$\omega_{0,j} = \frac{-66u_{s,0,j} + 108\psi_{1,j} - 27\psi_{2,j} + 4\psi_{3,j}}{18h^2} \quad (46)$$

Obliczenia przeprowadzono dla różnych liczb Reynoldsa, stosując różne rozmiary siatek ($N \times N$) i kroków czasowych (Δt). Głównym celem takiego działania jest sprawdzenie, kiedy otrzymane rozwiązanie będzie pokrywać się z referencyjnymi wynikami uznanych autorów. W przypadkach gdy liczba Reynoldsa wynosiła $Re = 100$ oraz $Re = 1000$ rozwiązanie było stacjonarne, więc brane pod uwagę były wartości z ostatniego kroku czasowego. Dla liczby Reynoldsa równej $Re = 10\,000$ (rys. 2.), czyli rozwiązania niestacjonarnego, uśrednianych było ostatnich 500 kroków czasowych.



Rys. 2: Rozkład wirowości i prędkości dla przepływu we wnęce przy liczbie $Re = 10\,000$ dla $t = 2800$ s

Wykorzystane kroki czasowe pochodziły z okresu po ustaleniu się wartości wirowości w wirze centralnym. W centrum występowały jedynie fluktuacje prędkości o niskiej intensywności. Do analizy jakości obliczeń była brana wartość wirowości ω , funkcji prądu ψ oraz współrzędnych środka głównego wiru (x, y) . Wyniki obliczeń zostały przedstawione w tab. 4, natomiast dane porównawcze [12]–[14] umieszczone zostały w tab. 5.

Analizując przedstawione wyniki, widoczne jest, że zastosowanie schematów różnicowych wysokiego rzędu w metodzie VIC pozwala na osiągnięcie bardzo wysokiej dokładności obliczeń przy niskiej rozdzielczości siatek i dużych krokach czasowych. Aby dodatkowo potwierdzić możliwości obliczeniowe algorytmu, porównane zostały rozkłady prędkości wzdłuż osi symetrii obszaru obliczeniowego dla liczby Reynoldsa równej $Re = 10\,000$ (rys. 3).

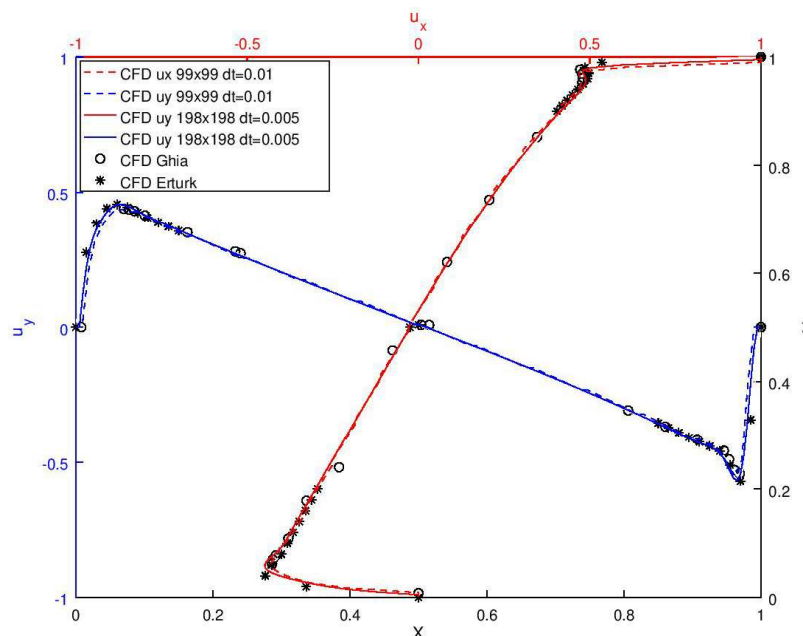
Otrzymane rozkłady dokładnie pokrywają się z wynikami obliczeń autorów, gdzie stosowane były o wiele większe rozmiary siatek i dalsze zagęszczanie obszaru obliczeniowego oraz zmniejszanie kroku czasowego wydaje się być bezcelowe. Jest to wynik bardzo satysfakcjonujący, gdyż mając możliwość porównania wyników obliczeń solvera VIC korzystającego z drugiego rzędu dokładności aproksymacji [15], możemy stwierdzić, że efekt implementacji aproksymacji czwartego rzędu dokładności jest jak najbardziej uzasadniony, mimo że metoda nadal pozostaje globalnie rzędu drugiego.

Tabela 4: Wyniki obliczeń przepływu we wnętrzu w środku głównego wiru (x, y)

Re	100	100	100	1000	1000	1000	10 000	10 000
N	32×32	32×32	32×32	64×64	64×64	128×128	99×99	198×198
Δt	0,016	0,008	0,004	0,01563	0,00781	0,00781	0,01	0,005
ω	-3,1740	-3,1702	-3,1685	-2,0678	-2,0586	-2,0677	-1,8561	-1,8896
ψ	-0,1041	-0,1038	-0,1036	-0,1195	-0,1189	-0,1193	-0,1180	-0,1205
x	0,6094	0,6094	0,6094	0,5313	0,5391	0,5273	0,5101	0,5126
y	0,7344	0,7344	0,7344	0,5625	0,5703	0,5664	0,5303	0,5303

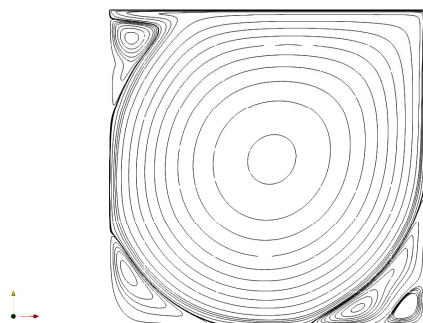
Tabela 5: Referencyjne wyniki obliczeń innych autorów dla środka głównego wiru (x, y)

Re	100	100	1000	1000	1000	10 000
Autor	Malecha	Ghia	Malecha	Ghia	Erturk	Ghia
ω	-	-3,16646	-	2,04968	2,067213	1,88082
ψ	-	-0,103423	-	0,117929	0,118942	-0,119731
x	0,6163	0,6172	0,531	0,5313	0,5300	0,5117
y	0,736	0,7344	0,565	0,5625	0,5650	0,5333

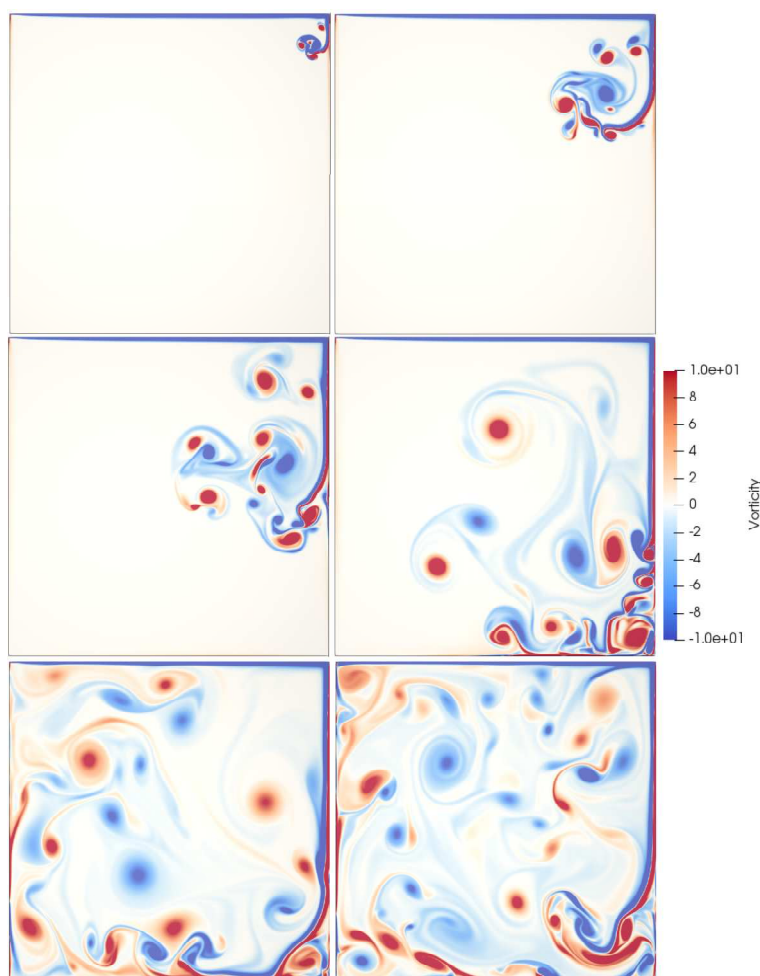
**Rys. 3:** Rozkład prędkości wzdłuż osi symetrii dla $Re = 10\,000$

Ostatecznym potwierdzeniem testu przepływu we wnętrzu jest porównanie linii funkcji prądu i identyfikacja wszystkich występujących wirów. Dla $Re = 10\,000$ występuje aż 5 wyraźnych wirów (cztery wiry narożne). Wszystkie z nich udało się poprawnie odtworzyć bez względu na zastosowaną rozdzielczość siatki obliczeniowej. Omawiane wiry pokazano na rys. 4 dla przypadku wykorzystującego siatkę obliczeniową w rozmiarze 198×198 przy kroku czasowym równym $\Delta t = 0,005$ s. Wir główny jest lekko przesunięty względem centrum wnęki. Następnie, po lewej stronie wyróżnić można dwa wiry narożne. W prawym dolnym rogu występuje natomiast struktura złożona z dwóch wirów obracających się w przeciwnym kierunku.

Z przedstawionego testu widać, że poprawne odtworzenie złożonego przepływu we wnęce zarówno wymaga wydajnego oraz dokładnego algorytmu obliczeniowego. Otrzymanie poprawnych wartości zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym wymaga stosowania wysokich gęstości siatek bądź aproksymacji równań metodami wysokiego rzędu.



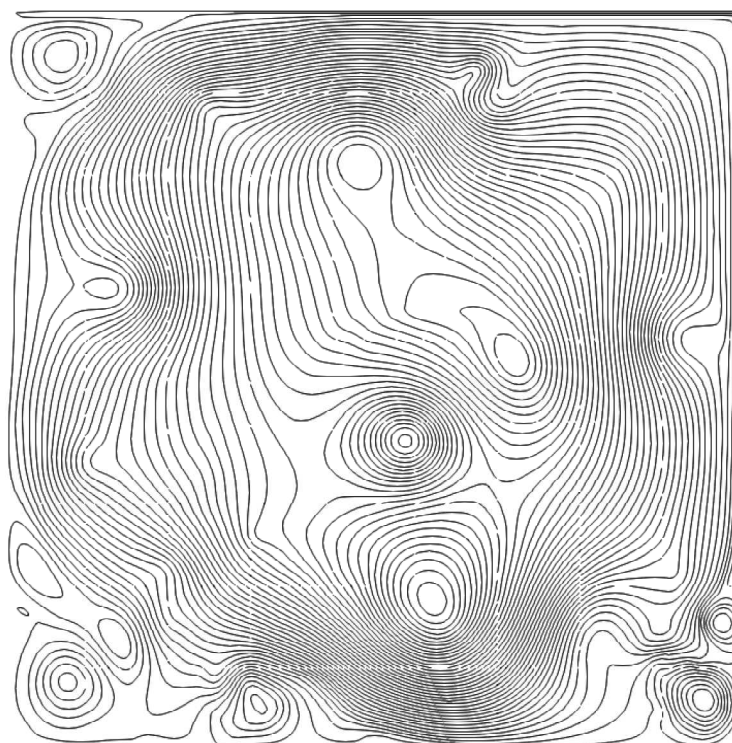
Rys. 4: Rozkład linii funkcji prądu dla $Re = 10\,000$



Rys. 5: Ewolucja wirowości dla liczby $Re = 100\,000$ dla czasów 2,5, 5, 10, 20, 40 i 80 s

Przeprowadzona została również symulacja dla przepływu we wnęce z liczbą Reynoldsa równą $Re = 100\,000$. Wykorzystując dostępne 81 procesorów, zastosowano siatkę o rozmiarze 1026×1026 i krok czasowy równy $\Delta t = 0.0005$ s. Wykonano łącznie 320 000 kroków czasowych, co w rzeczywistości dawało 160 s obliczeń. Zachowanie się płynu przy tak wysokiej liczbie Reynoldsa jest mocno niestacjonarne. Zauważa się, że separacja płynu na ściance następuje niemal natychmiastowo, a rozmiar struktur wirowych jest kilkakrotnie mniejszy niż w przypadku przepływu przy liczbie Reynoldsa równej $Re = 10\,000$. Na rysunku 5 przedstawiono ewolucję pola wirowości dla kroków 5000, 10 000, 20 000, 40 000, 80 000 i 160 000, dając odpowiednio czasy równe 2,5, 5, 10, 20, 40 i 80 s.

Już od pierwszych sekund można zauważyć burzliwe zachowanie się płynu. Na skutek duże gradientu prędkości w prawym górnym narożniku następuje natychmiastowa utrata stateczności i wygenerowane zostają dwie pomniejsze struktury wirowe. Wraz z upływem czasu coraz większa porcja płynu z napędzanej części ścianki zostaje przetransportowana do wnętrza wnęki. Odrywająca się warstwa przyścienna generuje coraz to nowe zaburzenia. W 20 sekundzie można zaobserwować chwilowe przyłączenie się warstwy do ścianki jednak ze względu na geometrię obszaru płyn w prawym dolnym rogu ponownie się odrywa. Zachowanie się płynu jest zupełnie inne niż w przypadku mniejszych liczb Reynoldsa. Nie jest możliwe zaobserwowanie żadnej dominującej struktury, z której mógłby wytworzyć się wir główny. W chwili $t = 160$ s sytuacja jest bardzo zbliżona do $t = 80$ s (rys. 6)



Rys. 6: Rozkład linii funkcji prądu dla $Re = 100\,000$ i $t = 160$ s

8. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono algorytm rozwiązywania równań ruchu płynu z wykorzystaniem kompaktowej, czwartorzędowej metody VIC. Podano kolejne kroki algorytmu wraz z badaniami dokładności obliczeniowej poszczególnych schematów różnicowych. Ostatecznie przedstawiono badanie dokładności, działania metody na przykładzie popularnego zagadnienia testowego przepływu we wnęce i porównano otrzymane wyniki z wartościami uzyskanymi przez innych autorów. Otrzymane wyniki charakteryzują się poprawnością zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Zastosowane metody aproksymacji równań różniczkowych wykazały pozytywny wpływ na dokładność rozwiązania względem konkurencyjnego solvera wykorzystującego schematy 2 rzędu. Osiągnięcie zbliżonych do referencyjnych wartości wielkości przepływowych następuje przy rzadkich siatkach z dużym krokiem czasowym.

LITERATURA

- [1] Kudela H., Malecha Z.M., *Investigation of unsteady vorticity layer eruption induced by vortex patch using vortex particles method*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, **45**, 485–800, 2007.
- [2] Kudela H., *Matematyczne wprowadzenie do mechaniki płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2016.
- [3] Baker A.H., Falgout R.D., Kolev Tz.V., Yang U.M., *Scaling hypre’s Multigrid Solvers to 100,000 Cores*, High Performance Scientific Computing: Algorithms and Applications, 261–279, Springer, London 2012.
- [4] Baker A.H., Falgout R.D., Gamblin T., Kolev Tz.V., Schulz M., Yang U.M., *Scaling Algebraic Multigrid Solvers: On the Road to Exascale*, Competence in High Performance Computing, 215–226, Springer, Berlin 2010.
- [5] Błoński D., *Realizacja metody cząstek wirowych w środowisku wieloprocesowym z użyciem schematów różnicowych wysokiego rzędu*, Zeszyty Energetyczne, **5**, 25–40, 2018.
- [6] Wang Y., Zhang J., *Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D poisson equation*, Journal of Computational Physics, **228**, 137–146, 2009.
- [7] Zhang J., *Multigrid method and fourth order compact difference scheme for 2D Poisson equation with unequal meshsize discretization*, Journal of Computational Physics, **179**, 170–179, 2002.
- [8] Fishelov D., Ben-Artzi M., Croisille J.P., *Recent Advances in the Study of a Fourth-Order Compact Scheme for the One-Dimensional Biharmonic Equation*, Journal of Scientific Computing, **53**, 55–79, 2012.
- [9] Liao, W., Zhu, J., Khaliq A. Q.M., *An efficient high-order algorithm for solving systems of reaction-diffusion equations*, Numerical Methods Partial Differential Eq., **18**, 340–354, 2002.
- [10] Koseff J. R., Street R. L., *The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations*, J. Fluids Eng. 106, (4), 390–398, 1984.
- [11] Bruneau C.H., Saad M., *The 2D lid-driven cavity problem revisited*, Computers & Fluids, (35), 326–348, 2006.
- [12] Erturk E. et al., *Fourth-order compact formulation of Navier–Stokes equations and driven cavity low at high Reynolds numbers*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, (50), 421–436, 2006.
- [13] Ghia U. et al., *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method*, Journal of Computational Physics, (48), 387–411, 1982.

-
- [14] Kudela H., Malecha Z., *Viscous flow modeling using the vortex particles method*, TASK Quarterly, **(13)**, 15–32, 2009.
- [15] Wang C. et al., *A semi-Lagrangian Vortex-In-Cell method and its application to high-Re lid-driven cavity flow*, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow 27, **(6)**, 1186–1214, 2017.
- [16] Becerra Sagredo J.T., *Z-splines: Moment Conserving Cardinal Spline Interpolation of Compact Support for Arbitrarily Spaced Data*, Eidgenössische Technische Hochschule, Research Report No. 2003-10, 2003.