

## NIEPEWNOŚCI WIELOPARAMETROWYCH POMIARÓW WIELKOŚCI SKORELOWANYCH

Zygmunt Lech WARSZA<sup>1</sup>, Jacek PUCHALSKI<sup>2</sup>

1. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP  
tel.: + 48 692033661 email: zlw1936@gmail.com
2. Główny Urząd Miar  
tel.: + 48 2258 9383 e-mail: jacek.puchalski@gum.gov.pl

**Streszczenie:** Przedstawiono metodę oceny niepewności pomiarów wieloparametrowych uwzględniającą skorelowania pomiędzy danymi wielkościami mierzonych opisanych niepewnościami składowymi typu A lub/i typu B. Jest to rozszerzenie zastosowania metody podanej w Suplemencie 2 do przewodnika wyrażania niepewności pomiarów o akronimie GUM. Jako przykład omówiono pośrednie pomiary menzurandu dwuparametrowego. Wyznaczono wzory dla macierzy kowariancji, niepewności i współczynnika korelacji menzurandu wejściowego i wyjściowego. Zastosowanie proponowanej metody zwiększy dokładność i wiarygodność oceny niepewności pomiarów wieloparametrowych i układów do ich realizacji.

**Słowa kluczowe:** pomiary wieloparametrowe, niepewności typu A i typu B, współczynnik korelacji, macierz kowariancji, menzurand 2D, macierzowa propagacja niepewności.

### 1. WPROWADZENIE

W pomiarach wieloparametrowych ocenia się estymatory wartości i niepewności wyników pomiarów oraz skorelowanie skojarzonych ze sobą wielkości jako elementów wieloparametrowego menzurandu czyli multimenzurandu. Jest to konieczne, gdy wyniki pomiarów tych wielkości, lub ich część będzie się wspólnie wykorzystywać. Tylko niekiedy pomiary te wykonuje się tym samym, a zwykle wieloma przyrządami lub też różnymi podzespołami systemu pomiarowego i przeprowadza się je w jednakowych lub odmiennych warunkach otoczenia. Rozrzut wartości obserwacji powtarzanych w pomiarach wieloparametrowych jest wywołany zarówno wspólnymi jak i różnymi przyczynami. Wielo-wariantowość sytuacji tworzy różne zależności pomiędzy niepewnościami skojarzonych wielkości mierzonych. Zacharow w pracy [5], przy wyznaczaniu niepewności pośrednich pomiarów jednoparametrowych rozróżniał skorelowanie wielkości wpływających zaobserwowane i takie, którego nie można wyznaczyć z danych pomiarowych, nazywane przez niego „logicznym”. Szacując dokładność pomiarów, skorelowanie to wyznacza się podobnie jak niepewności typu B.

W praktyce pomiarów wieloparametrowych występują różne sytuacje, których nie omawiają szczegółowo rekomendacje szacowania niepewności pomiarów zawarte w Suplemencie 2 [2] do przewodnika GUM [1] oraz inne przepisy międzynarodowe.

Po wprowadzeniu w przewodniku GUM niepewności do opisu dokładności pomiarów powstał pewien rozdźwięk z opisem dokładności przyrządów, urządzeń i systemów pomiarowych przez dopuszczalne błędy maksymalne. Z ich wartości, przy założeniu rozkładu równomiernego, wyznacza się odchylenie standardowe jako składową niepewności typu B przyrządu. Dla pomiarów różnych wartości tymi samymi przyrządami w różnych warunkach zwykle nie ma informacji o korelacji otrzymanych wyników tych pomiarów i należy dla bezpieczeństwa przyjąć współczynnik korelacji równy 1.

Celem tej publikacji jest prezentacja takiego rozszerzenia metody propagacji niepewności zawartej w Suplemencie 2 [2], które umożliwiłoby jednolite oszacowanie dokładności pomiarów wieloparametrowych, jak i układów do ich realizacji z uwzględnieniem skorelowania pomiędzy rozkładami odchyłek danych pomiarowych od estymatorów ich wartości opisanych niepewnościami typu A oraz/i typu B.

### 2. PROPAGACJA NIEPEWNOŚCI MULTIMENZURANDU

Do oceny dokładności w pośrednich pomiarach menzurandów wieloparametrowych wykorzystuje się metodę propagacji ich niepewności rekomendowaną w ujęciu macierzowym w Suplemencie 2 [2] przewodnika GUM [1]. Po analitycznym lub numerycznym rozwiązaniu równań wiążących elementy mierzzonego menzurandu wejściowego  $X$  i szacowanego menzurandu  $Y$  otrzymuje się układ równań:

$$Y = F(X) \quad (1)$$

gdzie:  $Y = [y_1, \dots, y_m]^T$ ;  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  – wektory, których elementami są wartości wielkości mierzonych tworzących oba wektorowe menzurandy.

Propagację niepewności w tych pomiarach opisuje się jako zależność pomiędzy macierzami kowariancji wielkości  $X$  i  $Y$ , przy linearyzacji funkcji  $F$  poprzez pochodne [2], tj.:

$$U_Y = S U_X S^T \quad (2)$$

w którym macierz wrażliwości  $S$  i macierze kowariancji  $U_X$ ,  $U_Y$  wielkości wejściowych  $X$  i wyjściowych  $Y$  są następujące:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, U_X = \begin{bmatrix} u_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_1n} u_{x_1} u_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_1n} u_{x_n} u_{x_1} & \dots & u_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_{y_1}^2 & \dots & \rho_{y_1m} u_{y_1} u_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y_1m} u_{y_m} u_{y_1} & \dots & u_{y_m}^2 \end{bmatrix} \quad (2a, b, c)$$

Wartości elementów wektora  $Y$  mogą być też następnie przetwarzane dalej wspólnie według innej funkcji, opisanej ogólnie wzorem (3):

$$Z = G(Y) \quad (3)$$

Wówczas dla wyznaczanych kolejno wartości elementów nowego multimenzurandu  $Z = [z_1, \dots, z_m]^T$  i elementów jego macierzy kowariancji  $U_Z$  z niepewnościami  $u_{z_1}, \dots, u_{z_m}$  stosuje się równanie wiążące macierze kowariancji  $U_Z$  i  $U_Y$ , też o takiej samej postaci jak (2), tj.:

$$U_Z = S_G U_Y S_G^T \quad (4)$$

w którym  $S_G$  jest macierzą wrażliwości utworzoną tak, jak  $S$ .

Wzory dla niepewności pomiarów mierzandów 3D i przykłady stosowania metody wektorowej w kilku elektrycznych układach pomiarowych DC i AC podano w pracach [3, 6–15].

Wyniki pośrednich pomiarów wieloparametrowych wyznacza się z danych pomiarowych wielkości  $x_i$  jako elementów bezpośrednio mierzonego mierzandów  $X$ , otrzymanych po przetworzeniu wielokrotnie powtórzonych obserwacji traktowanych w ogólnym przypadku jako losowe i uzyskanych w określonych warunkach otoczenia. Dokonuje się obróbki statystycznej otrzymanych surowych danych pomiarowych oraz koryguje się poprzez poprawki te z tych niepożądanych wpływów warunków otoczenia, które są znane. Warunki pomiaru mogą mieć charakter stały, albo też zmieniać się w czasie eksperymentu w znany sposób. Wówczas dodatkowe błędy systematyczne eliminuje się przez wprowadzenie poprawek, a wpływ pozostałych przyczyn niedokładności szacuje się wspólnie statystycznie.

Podstawą oceny niepewności pomiarów jest wyznaczenie jej składowych typu A i typu B. Niepewność całkowitą  $u$  zdefiniowano w GUM jako odchylenie standardowe rozkładu wypadkowego stanowiącego spłot dwóch niezależnych statystycznie rozkładów składowych. Pierwszy z nich opisuje statystycznie rozrzut otrzymanych eksperymentalnie wartości obserwacji pomiarowych. Drugi jest rozkładem hipotetycznym, który randomizuje przypuszczalne zmiany wyników różnego pochodzenia, w tym o charakterze systematycznym, ale nie znane co do wartości w trakcie wykonywania pomiarów. Zmiany te mogą pojawiać się losowo w długim okresie użytkowania mierzonego obiektu, przyrządu lub systemu pomiarowego i w różnych warunkach otoczenia dla nich dopuszczalnych, innych niż przy kalibracji przyrządu i pomiarach kontrolnych. Zbiory wartości opisanych tymi rozkładami są nieskorelowane. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu wypadkowego danych pomiarowych i rozkładów

składowych spełniają warunek  $p(x) = p(x_A) * p(x_B)$ . Stąd wynika, że dla każdej wielkości mierzonej  $x_i$  standardowa niepewność  $u_i$  rozkładu wypadkowego i standardowe niepewności  $u_{Ai}$  i  $u_{Bi}$  rozkładów składowych, jako ich odchylenia standardowe są powiązane sumą geometryczną:

$$u_i = \sqrt{u_{Ai}^2 + u_{Bi}^2} \quad (5)$$

Dla znanej funkcji opisującej gęstość prawdopodobieństwa, np. funkcji Gaussa dla rozkładu normalnego, z odchylenia standardowego  $u$  i współczynnika rozszerzenia  $k_p$  wyznacza się analitycznie niepewność rozszerzoną  $U$  o określonym prawdopodobieństwie pokrycia  $P$ , np. 95% lub 99%. Dla otrzymywanych eksperymentalnie rozkładów danych pomiarowych, niepewność rozszerzoną  $U$  wyznacza się też numerycznie metodą Monte Carlo.

Niepewność składowa  $u_{Ai}$  ocenia rozrzut obserwacji pomiarowych. Wyznacza się statystycznie tak, jak dla rozkładu normalnego [1] lub innych rozkładów [3] - [5]. Niepewność składową  $u_B$  szacuje się na podstawie subiektywnej wiedzy o przewidywanych zakresach i rozkładach wielkości wpływających i ich funkcjach oddziaływań. Niepewność  $u_B$  randomizuje spodziewane oddziaływania takich wpływów, których bieżące wartości w przeprowadzanych pomiarach nie są znane i brakuje danych aby obliczyć dla nich poprawki i skorygować wartości obserwacji pomiarowych. W znanych warunkach pracy o ograniczonym zakresie zmian wpływających wielkości, można przyjąć mniejszą wartość składowej  $u_B$  niż wynika z danych producenta dla zakresu dopuszczalnych warunków pracy przyrządu i badanego obiektu [4].

Dla każdej z wielkości bezpośrednio mierzonych  $x_i$  mierzandów  $X$  wyznacza się z danych pomiarowych niepewność typu A oraz szacuje się heurystycznie niepewności typu B i oblicza się standardowe niepewności wypadkowe  $u_i$  ze wzoru (5). Następnie dla mierzandów  $X$  tworzy się macierz kowariancji  $U_X$ , która uwzględnia skorelowanie i autokorelację [3] jego elementów. Wartości elementów macierzy kowariancji dla wyznaczanych pośrednio mierzandów  $Y$  oraz  $Z$  (obserwabli) uzyskuje się po zastosowaniu wzorów (2) - (4).

Istnieje wiele możliwości skorelowania wielkości  $x_i$  jako elementów mierzandów  $X$ . Rozrzuty wartości obserwacji zależą zarówno od wpływów warunków otoczenia na system pomiarowy i obiekt badany, jak i od zmian ich parametrów wewnętrznych. Skorelowania dotyczą zbiorów par wielkości mierzonych. Zachodzą one dla wartości ich obserwacji opisanych niepewnościami tylko jednego typu, bądź typu A, bądź typu B. Ich współczynniki korelacji oznaczymy odpowiednio indeksami dolnymi A i B. Próbkę pomiarową tego samego badanego obiektu w różnych eksperymentach pomiarowych przy tej samej niepewności  $u_B$  mogą mieć różne niepewności  $u_A$ , a więc i różne współczynniki korelacji  $\rho_A$ . Można je wyznaczyć statystycznie jeśli poprowadzi się pomiary mierzandów  $X$  tak, by obserwacje mierzonych wielkości uzyskiwać synchronicznie i w znanym czasie.

Wyniki heurystycznych oszacowań niepewności typu B i współczynników korelacji  $\rho_B$  mogą być zróżnicowane w praktyce, gdyż mierzy się różne wartości, na różnych zakresach jednego miernika lub nawet różnymi przyrządami

pomiarowymi. Różne są też dopuszczalne błędy maksymalne tych przyrządów, a więc i różne wynikające z nich niepewności typu B.. W ocenie skorelowania niepewności typu B w jak największym stopniu trzeba wykorzystać w pełni wcześniej pozyskaną wiedzę o takich pomiarach i nawet wykonać uzupełniające eksperymenty.

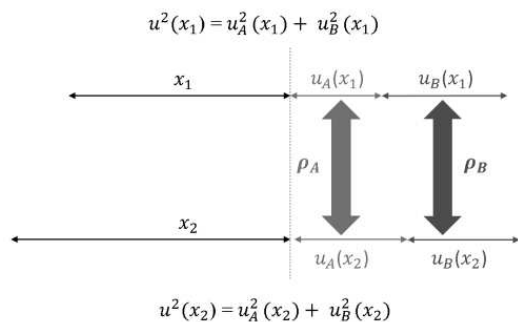
W modelu matematycznym zastosowanym w GUM przyjęto założenie, że niepewności składowe  $u_A$  i  $u_B$  są od siebie niezależne statystycznie i tak jest też zwykle w praktyce. Opisana wzorem (5) niepewność  $u_i$  mierzonej wartości  $x_i$  ma taką postać jak dla splotu dwu nieskorelowanych rozkładów wartości obserwacji (lub błędów pozornych jako odchyłeń od estymatora wartości), z których jeden ma tylko niepewność  $u_A$ , a drugi tylko  $u_B$ . Skorelowanie pomiędzy wielkościami multimenzurandu może zachodzić tylko między zbiorami bądź danych obserwowanych, bądź danych heurystycznych, które odpowiadają oszacowanym niepewnościom  $u_{Bi}$ . Wyjaśnia to bliżej przykład niepewności i współczynników korelacji menzurandu 2D podany na rysunku 1.

W pomiarach wieloparametrowych macierz kowariancji  $U_X$  można przedstawić jako sumę dwu macierzy składowych:

$$U_X = U_{XA} + U_{XB} \quad (6)$$

### 3. NIEPEWNOŚĆ SKORELOWANYCH POMIARÓW DWUPARAMETROWYCH (2D)

Przykład menzurandu 2D o skorelowanych wielkościach  $x_1, x_2$  podaje rysunek 1.



Rys. 1. Niepewności i współczynniki korelacji menzurandu 2D między danymi pomiarowymi  $\rho_A$  i wyznaczanymi heurystycznie  $\rho_B$

W pomiarach dwuparametrowych (2D) wielkości  $x_1$  i  $x_2$ , ich niepewności oznaczone jako  $u_{x1}$  i  $u_{x2}$ , są sumami geometrycznymi niepewności składowych typu A i B, opisanymi równaniami:

$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 \quad (7a)$$

$$u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \quad (7b)$$

W ogólnym przypadku wyniki pomiarów  $x_1, x_2$  mają różne wartości niepewności  $u_{1A}$  i  $u_{2A}$  oraz  $u_{1B}$  i  $u_{2B}$ . Jednakże, jeśli eksperymenty te odbywają się w jednakowych lub nawet podobnych warunkach, to wielkości mierzone mogą być skorelowane. Zbiory wartości ich obserwacji opisane niepewnościami składowymi jednego typu, tj.  $u_{1A}, u_{2A}$  oraz  $u_{1B}, u_{2B}$ , będą wówczas powiązane współczynnikami

korelacji  $1 > \rho_A > -1$  oraz  $1 > \rho_B > -1$ . Przykładem jest tu pomiar napięć i prądów tego samego obiektu w tych samych warunkach i przy zasilaniu z niestabilizowanej sieci elektrycznej. Dla menzurandu X skorelowania te ilustruje rysunek 1.

Elementy multimenzurandu wejściowego X mogą mieć ogólnie różne stopnie skorelowania zarówno typu  $\rho_A$ , jak i typu  $\rho_B$ . Wpływa to na dokładność wyników pomiaru elementów menzurandu wyjściowego Y wyznaczanych pośrednio z pomiarów X. W pomiarach 2D, aby wyznaczyć standardowe niepewności  $u_{y1}, u_{y2}$  i ich współczynnik korelacji  $\rho_{y1,2}$ , korzysta się z macierzowego zapisu prawa propagacji wariancji (2), które łączy ze sobą macierze kowariancji. Jeśli wnioski z pomiarów mają dotyczyć innych warunków podczas badania i użytkowania obiektu niż przy kalibracji przyrządu, to prócz bieżących rozrzutów wartości obserwacji o niepewnościach standardowych  $u_{1A}, u_{2A}$ , trzeba uwzględnić przewidywane wpływy zmian niepewności  $u_{1B}, u_{2B}$  i macierz kowariancji (6) menzurandu 2D przyjmując postać:

$$U_{x1,2} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

W macierzy  $U_{x1,2}$  występują niepewności zgodne z regułą sumowania wariancji, czyli dla kwadratów niepewności typu A i typu B w obu pomiarach. Współczynnik korelacji między wielkościami  $x_1$  i  $x_2$  opisują wzory:

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{u_{x1} u_{x2}} = \frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{\sqrt{u_{1A}^2 + u_{1B}^2} \sqrt{u_{2A}^2 + u_{2B}^2}} \quad (9)$$

Pomiary dwuelementowego (2D) menzurandu wejściowego X są szczególnym przypadkiem pomiarów wieloparametrowych opisywanych ogólnie wzorami (1)–(3) stosowanymi, gdy wielkości mierzone są ze sobą powiązane w obiekcie pomiarowym lub poprzez oddziałujące na nich wielkości zewnętrzne. Jeśli dla stosunków niepewności składowych i niepewności standardowych  $u_{x1}, u_{x2}$  przyjmie się oznaczenia:  $\frac{u_{1A}}{u_{x1}} = \sqrt{1 - k_{1B}^2}$ , gdzie  $0 \leq k_{1B} \equiv \frac{u_{1B}}{u_{x1}} \leq 1$ , to uzyska się prostszą postać wzoru (9) jako wzór (10):

$$\rho_{x1,2} = \rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B} \quad (10)$$

Dla obu bezpośrednio mierzonych wielkości współczynnik  $\rho_{x1,2}$  we wzorze (10) zależy wyłącznie od stosunków niepewności  $k_{iB}$ , gdyż suma geometryczna względnych składowych niepewności równa się 1

$$\left(\frac{u_{iB}}{u_{xi}}\right)^2 + \left(\frac{u_{iA}}{u_{xi}}\right)^2 = k_{iB}^2 + 1 - k_{iB}^2 = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2. \quad (10a)$$

Natomiast podobny warunek algebraicznego sumowania niepewności

$$\frac{u_{iB}}{u_{xi}} + \frac{u_{iA}}{u_{xi}} = k_{iB} + \sqrt{1 - k_{iB}^2} = 1$$

jest spełniony tylko dla  $k_{iB} = 0$  lub  $k_{iB} = 1, i = 1, 2$ .

Niektóre szczególne przypadki współczynnika korelacji  $\rho_{x1,2}$  dla wyników eksperymentów pomiarowych

o różnych wariantach par niepewności składowych  $u_{1A}$ ,  $u_{2A}$  oraz  $u_{1B}$ ,  $u_{2B}$  i ich współczynników korelacji  $\rho_A$  i  $\rho_B$ , podano w tabeli 1. Zawiera też ona skrajne przypadki dla kombinacji wartości  $\rho_A = 0$  lub  $1$  i  $\rho_B = 0$  lub  $1$ .

W przypadku, gdy  $\rho_A = 0$ ,  $\rho_B = 1$  i  $k_{1B}^2 \approx k_{2B}^2 \approx 1/2$ , otrzymuje się  $u_{xi} = \sqrt{2}u_{iB} = \sqrt{2}u_{iA}$  i  $i = 1, 2$  oraz  $\rho_{x1,2} = 1/2$ .

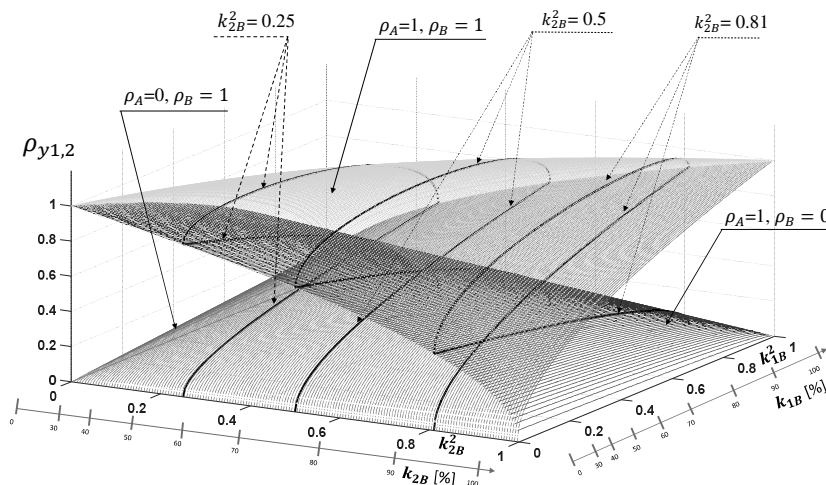
Tabela 1. Współczynniki korelacji  $\rho_{x1,2}$  wyników dwu pomiarów o różnych relacjach niepewności składowych  $u_A$  i/ oraz  $u_B$

Lp.	Niepewności typu A		Niepewności typu B		Współczynnik korelacji $\rho_{x1,2}$ elementów mierzandru wejściowego 2D
	Wartości	Współczynnik korelacji	Wartości	Współczynnik korelacji	
	$u_{1A}, u_{2A}$	$\rho_A$	$u_{1B}, u_{2B}$	$\rho_B$	$\frac{\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}}{\sqrt{u_{1A}^2 + u_{2A}^2} \sqrt{u_{1B}^2 + u_{2B}^2}}$ $\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B}$
1.	$u_{1A}, u_{2A}$	$\rho_A$	$u_{1B}, u_{2B}$	$\rho_B = 0$	$\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2}$
2.	$u_{1A}, u_{2A}$	$\rho_A = 0$	$u_{1B}, u_{2B}$	$\rho_B$	$\rho_B k_{1B} k_{2B}$
3.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A$	$\rho_A$	$u_{1B} = u_{2B} = u_B$	$\rho_B$	$\rho_A (1 - k_B^2) + \rho_B k_B^2$
4.	$u_{1A}, u_{2A}$	$\rho_A$	$u_{1B} = u_{2B} = u_B$	$\rho_B = 1$	$\rho_A \sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + k_{1B} k_{2B}$
5.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A$	$\rho_A = 1$	$u_{1B}, u_{2B}$	$\rho_B$	$\sqrt{1 - k_{1B}^2} \sqrt{1 - k_{2B}^2} + \rho_B k_{1B} k_{2B}$
6.	$u_{1A}, u_{2A}$	$\rho_A = 0$	$u_{1B}, u_{2B}$	$\rho_B = 0$	0
7.	$u_{1A} = u_{2A} = u_A$	$\rho_A$	$u_{1B} = u_{2B} = u_B$	$\rho_B$	0,5 ( $\rho_A + \rho_B$ )
		$\rho_A = 0$		$\rho_B = 1$	$\rho_{y1,2} = 1/2$
		$\rho_A = 1$		$\rho_B = 0$	
		$\rho_A = 1$		$\rho_B = 1$	$\rho_{y1,2} = 1$

#### 4. WYKRES WSPÓŁCZYNNIKA KORELACJI $\rho_{x1,2}$

Forma postaci funkcji (11b) pozostaje stała przy zamianie miejscami niepewności  $u_{1A}$  na  $u_{1B}$ ,  $u_{2A}$  na  $u_{2B}$  oraz  $\rho_A$  na  $\rho_B$ . Wystarczy więc przeanalizować zależności dla jednego typu niepewności A lub B, gdyż dla drugiego typu, przy tym samym zestawie zmiennych, zależności będą podobne wskutek symetrii tego wzoru. Do przedstawienia współczynnika korelacji skorzysta się

z ogólnej funkcji przedstawionej we wzorze (11b). Na rysunku 2 podano wykresy 3D współczynnika korelacji  $\rho_{x1,2} = \rho_{y1,2} = f(k_{1B}^2, k_{2B}^2)$  dwuelementowego mierzandru wejściowego X dla trzech par współczynników skorelowania jego składowych niepewności typu A i B. Są to płaszczyzny krzywoliniowe, na których są zaznaczone ślady przekrojów.



Rys. 2. Zależności współczynnika korelacji  $\rho_{y1,2} = f(k_{1B}, k_{2B})$  mierzandru X w postaci wykresów 3D dla trzech par współczynników skorelowania  $\rho_A, \rho_B$  jego danych o niepewnościach składowych typu A lub B:  $\rho_A = 0, \rho_B = 1$ ;  $\rho_A = 1, \rho_B = 1$ ;  $\rho_A = 1, \rho_B = 0$

#### 5. NIEPEWNOŚCI WZGLĘDNE

Przy opisie niepewności dla zakresów pomiarowych przyrządów i systemów oraz w pomiarach, których wzory zawierają działania multiplikatywne (mnożenie, dzielenie

i itd.), bardzo użyteczne są wzory wyrażone we względnych niepewnościach. Otrzymuje się je z wzorów dla niepewności bezwzględnych przez podstawienia:

$$u_i = x_i u_{ri}, u_{Ai} = x_i u_{rAi}, u_{Bi} = x_i u_{rBi}, \text{ dla } i = 1, 2.$$

Ze wzoru (9) dla współczynnika korelacji otrzymuje się inną jego postać:

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{rA1} u_{rA2} + \rho_B u_{rB1} u_{rB2}}{\sqrt{u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2} \sqrt{u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2}} \quad (11)$$

W podobny sposób wyznacza się niepewności względne wielkości wyjściowych:

$$u_r^2(x_1) \equiv u_{rx1}^2 = \frac{u_{A1}^2 + u_{B1}^2}{x_1^2} = u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2 \quad (12a)$$

$$u_r^2(x_2) \equiv u_{rx2}^2 = \frac{u_{A2}^2 + u_{B2}^2}{x_2^2} = u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2 \quad (12b)$$

Niepewności względne  $u_{rx1}$ ,  $u_{rx2}$  jako funkcje niepewności względnych  $u_{rA1}$ ,  $u_{rA2}$ ,  $u_{rB1}$ ,  $u_{rB2}$ , mają postacie

$$u_{rx1} = \sqrt{u_{rA1}^2 + u_{rB1}^2} \quad (13a)$$

$$u_{rx2} = \sqrt{u_{rA2}^2 + u_{rB2}^2} \quad (13b)$$

Współczynnik korelacji  $\rho_{y1,2}$  w macierzy kowariancji dla niepewności względnych wyraża wzór (13c)

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{rA1} u_{rA2} + \rho_B u_{rB1} u_{rB2}}{u_{rx1} u_{rx2}} \quad (13c)$$

Dla niepewności względnych typu A i B w podobny sposób jak poprzednio dla  $u_A$  i  $u_B$  można stworzyć macierz  $U_{rX}$  dla składowych niepewności względnych. Jeśli niepewności względne wielkości wejściowych są znane, np. jednakowe dla całego zakresu, to można się bezpośrednio posłużyć ich macierzowym równaniem propagacji o strukturze podobnej jak dla niepewności bezwzględnych, tj

$$U_{rY} = S_r \cdot U_{rX} \cdot S_r^T \quad (14)$$

gdzie:  $U_{rX}$ ,  $U_{rY}$ ,  $S_r = \begin{bmatrix} x_i & \partial y_j \\ y_j & \partial x_i \end{bmatrix}$  – macierze kowariancji dla niepewności względnych i macierz czułości o elementach oznaczonych indeksami  $i = 1, 2, 3$  dla wierszy oraz  $j = 1, 2, 3$  dla kolumn.

## 6. SKŁADOWE NIEPEWNOŚCI WYJŚCIOWYCH

Przy stosowaniu przyrządów i układów pomiarowych w różnych warunkach otoczenia i przy różnym losowym rozrzucie obserwacji pomiarowych może być również wymagane wyodrębnienie niepewności składowych typu A i B wielkości mierzonych Y oraz skorelowania par tych wielkości. Zanalizujemy to na przykładzie mierzonych 2D wg wzorów (7a) i (7b) dla  $X = [x_1, x_2]^T$ , tj.:

$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 \text{ i } u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2.$$

Macierz kowariancji mierzonych X wynosi

$$U_X = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Macierze  $U_A$  i  $U_B$  dla składowych niepewności wielkości wejściowych X są oznaczone następująco:

dla niepewności typu A

$$U_A = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 \end{bmatrix} \quad (16a)$$

dla niepewności typu B

$$U_B = \begin{bmatrix} u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (16b)$$

Transformację macierzy kowariancji  $U_A$  i  $U_B$  składowych niepewności mierzonych X realizuje się po linearyzacji funkcjonu  $Y=F(X)$  wg wzoru (2) w następujący sposób:

$$U_{Y_A} = S U_A S^T \text{ oraz } U_{Y_B} = S U_B S^T \quad (17a, b)$$

Macierz kowariancji mierzonych wyjściowych  $U_Y$  można wyznaczać dwojako:

- oszacować macierz  $U_X = U_A + U_B$  i z niej wyznaczyć bezpośrednio  $U_Y$ , lub

- z macierzy  $U_A$  i  $U_B$  znaleźć macierze  $U_{Y_A}$  i  $U_{Y_B}$  obu składowych niepewności  $u_{yi}$  wielkości wyjściowych.

Otrzymuje się:

$$U_Y = S U_X S^T = S (U_A + U_B) S^T \quad (18)$$

oraz

$$U_Y = U_{Y_A} + U_{Y_B} = S U_A S^T + S U_B S^T \quad (19)$$

Jeśli wyznacza się  $U_Y$ , to oba sposoby są równoważne. Sprawdziliśmy to dla modelu o dwuwymiarowych (2D) mierzonych X i Y. Natomiast niepewności składowe typów A oraz B elementów mierzonych wyjściowych  $U_Y$  i współczynniki korelacji każdego z tych typów wyznaczyć można z wzoru (19) nie spotkanego w literaturze.

## 7. PODSUMOWANIE

Przedstawiono rozszerzenie macierzowej metody wyznaczania niepewności w pomiarach pośrednich wieloparametrowych podanej w Suplemencie 2. Przewodnika Wyznaczania Niepewności GUM]. Uwzględnia ono oszacowanie skorelowania pomiędzy danymi pomiarowymi mierzonych wielkościami wejściowymi opisanymi niepewnościami typu A oraz typu B. Podano wzory ogólne i dla przykładu wyznaczono niepewności standardowe i ich składowe oraz współczynniki korelacji na wyjściu dla pomiarów dwuparametrowych.

W modelu tu zastosowanym założono zgodnie z GUM, że dla każdej z wielkości mierzonych składowe jej niepewności typu A oraz typu B są od siebie niezależne statystycznie i sumują się geometrycznie (pierwiastek z sumy ich kwadratów). Wynika stąd, że w pośrednich pomiarach wieloparametrowych skorelowanie wielkości wejściowych jest łącznym rezultatem tylko osobnych skorelowań danych opisanych przez ich niepewności A oraz B. Umożliwia to oszacowanie wpływu tych skorelowań na wartości elementów macierzy kowariancji. Otrzymana macierz wyjściowa jest podstawą oceny dokładności przy łącznym stosowaniu otrzymanych pośrednio wielkości ze sobą skojarzonych.

Współczynnik korelacji  $\rho_A$  dwu wielkości wejściowych można wyznaczyć eksperymentalnie, jeśli pomiary

przeprowadzi się synchronicznie. Współczynnik korelacji  $\rho_B$  ocenia się heurystycznie, tj. podobnie jak niepewności typu B, wykorzystując dotychczasową wiedzę opartą na doświadczeniu z wielu innych pomiarów i wnikliwą analizę danego eksperymentu. Podano też sposób wyznaczania składowych niepewności mierzonych pośrednio wielkości wyjściowych i ich korelacji.

Zastosowanie zaproponowanego rozszerzenia metody macierzowej umożliwi uzyskiwanie bardziej wiarygodnej ocenę niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich i może zwiększyć ich precyzję.

W celu przyspieszenia procesu wdrożenia tej metody do praktyki pomiarowej laboratoryjnej i przemysłowej, w tym stosowania jednolitego opisu dokładności przyrządów i układów pomiarowych oraz pomiarów z wykorzystaniem niepewności obok dopuszczalnych błędów maksymalnych, w poprzednich publikacjach autorów [8-14] omówiono kilka prostych, charakterystycznych przykładów szacowania niepewności i współczynników korelacji w pośrednich pomiarach 2D i 3D. Dotyczyły one pomiarów skojarzonych temperatur, indukcji pola magnetycznego i układów prądu stałego (DC) o kilku skojarzonych rezystancjach (gwiazda, mostek) i składowych impedancji przy prądzie przemiennym (AC). Wykresy wypadkowego współczynnika korelacji w zależności od stosunków niepewności i wariancji typu A i B dla charakterystycznych kilku par wartości współczynników korelacji  $\rho_A, \rho_B$  podaliśmy w pracy [14].

Tematykę zamierzamy kontynuować w kierunku opracowania metod jak najbardziej wiarygodnego heurystycznego oszacowania niepewności typu B i współczynników korelacji  $\rho_B$  pomiarów wieloparametrowych oraz metod oceny dokładności pomiarów wieloparametrowych o rozkładach niegaussowskich.

## 8. LITERATURA

1. JCGM, Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement, 100:2008
2. Supplement 2 to the ‘GUM- Extension to any number of output quantities ‘.102:2011
3. Warsza Zygmunt Lech, Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów. Monografia PIAP 2016
4. Dorozhovets M., Warsza Z. L., Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce. Przegląd Elektrotechniki nr 1, 2007, s.1-13
5. Zakharow I.P.: Estimating measurement uncertainty on the basis of observed and logical correlation. Measurement Techniques, vol. 50, No. 8, 2007

6. Warsza Z. L., Ezhela V. V.: Zarys teoretycznych podstaw wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych. Pomiary Automatyka Kontrola (PAK) v.57 nr 2-2011 s.175-179
7. Warsza Z.L., Ezhela V. V.: O wyrażaniu i publikowaniu danych pomiarów wieloparametrowych – stan aktualny a potrzeby. Pomiary Automatyka Robotyka (PAR) nr 10’2011 s. 68-76
8. Warsza Z.L.: Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements. Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX, ed. by Franco Pavese, Markus Bär et al, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 84, World Scientific Books 2012, Singapore pp. 418-425
9. Warsza Z.L. Part 1, and Warsza, Z. L.’ Puchalski, J. Part 2: Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples. PPT: in CD Proceedings of conference: Problems and Progress of Metrology ppm’18 Szczyrk 04-06. June 2018. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science
10. Warsza Z.L., Puchalski J.: Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami. Pomiary Automatyka Robotyka 2/2018 s. 31-40 DOI:1014311/PAR 228/31-
11. Warsza Z.L., Puchalski J., Ocena niepewności składowych prostokątnych impedancji wyznaczanych pośrednio z pomiarów składowych biegunowych i vice versa. Pomiary Automatyka Robotyka 3/2018, s. 61-67
12. Warsza, Z., Puchalski, J.: Estimation of uncertainties of multivariable indirect measurements on the example of two DC electrical circuits in: Ed. Szewczyk, R. at all, Automation 2019, AISC 920, pp. 624-635, Springer Nature Switzerland AG 2020, doi.org/10 1007/978-3-030-13273-6\_58
13. Warsza, Z.L., Idzkowski, A.: Accuracy description of circuits with RTD sensors dedicated to the temperature difference and average measurements. in book: Ed. Świder, J. et all: Mechatronics 2017 - Ideas for Industrial Applications, series: AISC 914, 2018 Springer Nature Switzerland AG. pp.435-446. doi.org/10 1007/978-3-030-15856-9
14. Warsza, Z. L.’ Puchalski, J.: Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności pomiarów wieloparametrowych. Część 1. Pomiary Automatyka Robotyka R.23, Nr1/2019. s.47-57 DOI: 10.14313/PAR\_231/47

## UNCERTAINTIES OF MULTIPARAMETER MEASUREMENTS OF CORRELATED QUANTITIES

An extended version of the vector method of uncertainty evaluation of indirect multivariable measurements given in Supplement 2 to the Guide on Expression of Uncertainty of Measurements is presented. The discussion was made for exemplary case of a two-parameter (2D) measurand with correlated input quantities. A proposed novelty is to consider the correlation of data described by individual components of the type A and / or type B uncertainties of measured input quantities. General formulas for the covariance matrix, output uncertainties and correlation coefficient were determined. Formulas for several characteristic specific cases are presented in table 1. Relative uncertainties are also considered.

**Keywords:** multivariate measurements, measurand 2D, correlations of the type A and type B uncertainty components, vector propagation of uncertainties, resultant correlation coefficients.