

# Typografowie, programiści i matematycy, czyli przypadek estetycznie zadowolającej interpolacji

## 1. Wstęp

Najbardziej rozpowszechnionymi w graficznych zastosowaniach komputerowych krzywymi są wielomiany (krzywe gięte) 2 i 3 stopnia, zwane odpowiednio B-spline'ami i krzywymi Béziera. Ogólnie, krzywe gięte stopnia  $n$ , zwane z kolei wielomianami Bernsteina (por. [6], s. 14, [3] oraz [8]), zdefiniowane są następującym wzorem

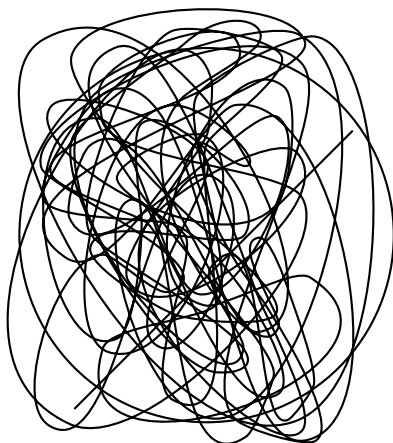
$$\mathbf{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{B}_i, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{B}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  są punktami w przestrzeni  $k$ -wymiarowej.

W praktyce oczywiście  $k=2$  lub  $k=3$ ; tu skupimy się na przypadku  $k=2$ ,  $n=3$ , czyli na krzywych Béziera na płaszczyźnie. Krzywe Béziera wykorzystywane są w języku POSTSCRIPT (także w fontach POSTSCRIPTowych), w formatach opisu strony takich jak SVG czy PDF, oraz w graficznych programach takich jak CorelDRAW, Adobe Illustrator czy openware'owy Inkscape. W tego rodzaju zastosowaniach podstawowym zagadnieniem jest problem interpolacji, czyli łączenia krzywych Béziera w sposób gładki, estetycznie satysfakcjonujący (ang. *aesthetically pleasing*). Pojedynczym łukiem Béziera można opisać jedynie niezbyt skomplikowane kształty; łączenie wielu łuków Béziera daje oczywiście znacznie większe możliwości.

Wydawać by się mogło, że pojęcie „estetycznej satysfakcji”, czyli „ładności”, w odniesieniu do problemu *stricte* matematycznego jest pozbawione sensu. Jednakże fizjologia oka dostarcza cennej wskazówki. Otóż ludzkie oko zdumiewająco łatwo wyróżnia w plątaninie linii okrąg i linię prostą (zob. rysunek 1 obok). Rozsądne, jak się wydaje, jest zatem przyjęcie hipotezy, że być może właśnie dlatego preferujemy krzywe zmieniające kierunek „łagodnie” (koło) lub w ogóle niezmienną kierunkowo (prosta).

W matematyce do badania zmian kierunku krzywej używa się wielkości zwanej krzywizną (zob. punkt 4 niżej). Łączenie krzywych giętych tak, by krzywizna możliwie mało się zmieniała, zaproponował J.R. Manning [7]. Okazuje się jednak, że zachowanie stałości krzywizny w punktach łączenia jest



Rys. 1. Zadanie: znajdź odcinek i okrąg

skomplikowane obliczeniowo i niekoniecznie potrzebne. Interesujące rozwiązanie autorstwa J. D. Hobby'ego [2], upraszczające w sposób istotny proces obliczeniowy dzięki pomysłowemu przybliżeniu krzywizny, zostało zastosowane przez D. E. Knutha w programie METAFONT [6], przeznaczonym w zasadzie do tworzenia fontów. Algorytm ten został później przeniesiony przez J. D. Hobby'ego do METAPOSTa (modyfikacji METAFONTa, generującej wynik w języku POSTSCRIPT).

Celem niniejszej pracy jest przyjrzenie się metodzie Hobby'ego, wskazanie jej wad i zalet, a także porównanie z innymi metodami. To interesujący przypadek, wart popularyzacji, pokazujący, jak ważnym ogniwem między typografem, tworzącym fonty, a programistą, tworzącym narzędzie dla typografa, jest matematyk, tworzący modele rzeczywistości (tu – model „gładkości”) i dostarczający tym samym programiście teoretycznej podstawy do budowania narzędzia.

W dalszym ciągu zakładając będziemy, że Czytelnik w zakresie matematyki ma wiedzę elementarną, to znaczy kojarzy na przykład pochodną funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t$  z granicą  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (f(t + \Delta t) - f(t)) / \Delta t$ . Szkic ten może się więc okazać mało interesujący dla matematyków, ze względu na omawianie i uzasadnianie faktów dla matematyka oczywistych. Z drugiej strony i dla niematematyków może się okazać nużący, dokładnie z tych samych względów. Jednak pomysł J. D. Hobby'ego na gładkie łączenie krzywych jest niewątpliwie perłą, wartą starannego i nieco bardziej przystępnego niż w pracach [2, 5] opisaną. Dlatego, choć to profesjonalistom może się wydać zbędne, często podawane są formy pośrednie przekształczanych wzorów.

## 2. Wyznaczniki

Zacznijmy od krótkiego przypomnienia pojęcia wyznacznika. Wyznacznik pary wektorów na płaszczyźnie,  $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ , czyli wyznacznik drugiego stopnia definiuje się jako

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_2 - x_2 y_1. \quad (2)$$

Przyda się nam w dalszym ciągu następująca własność wyznacznika, łatwa do sprawdzenia bezpośrednim rachunkiem dla wyznaczników drugiego stopnia

$$\det(\mathbf{v}_1 + p \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + q \mathbf{v}_1) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad (3)$$

gdzie  $p$  i  $q$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, oraz jego interpretacja geometryczna: wartość bezwzględna wyznacznika 2-wymiarowego to powierzchnia równoległoboku, którego krawędziami są wektory pojawiające się w definicji wyznacznika, natomiast znak wyznacznika zależy od wzajemnej orientacji wektorów w przestrzeni – dla płaszczyzny kierunek kąta między wektorami  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  przeciwny do kierunku wskazówek zegara daje w wyniku wyznacznik dodatni.

Tu mała dygresja – interpretacja powyższa jest w ogólnym wypadku na tyle ważna, że wybitny rosyjski matematyk Władimir I. Arnold w artykule poświęconym nauczaniu matematyki [1] podkreślił: *Wyznacznik macierzy jest (zorientowaną) objętością równoległościanu, którego krawędziami są kolumny macierzy. Gdy zaznajomi się studentów z tym sekretem (który jest starannie ukrywany w wyjałowionej algebraicznej metodzie nauczania), wówczas cała teoria wyznaczników staje się łatwa do zrozumienia [...]. Jeśli wyznaczniki są zdefiniowane w inny sposób, to każdy rozsądny człowiek zniechęci po wsze czasy wszystkie wyznaczniki.*

### 3. Różniczkowanie wielomianów Bernsteina

Pochodną krzywej zadanej parametrycznie wyznacza się, różniczkując składowe wektora określającego krzywą. Interpretacja fizyczna pierwszej i drugiej pochodnej jest oczywista: wyobraźmy sobie (punktowy) pojazd, którego położenie w chwili  $t$  jest wyznaczone przez  $(x(t), y(t))$ ;  $(x'(t), y'(t))$  określa po prostu kierunek i wartość prędkości, a  $(x''(t), y''(t))$  – kierunek i wartość przyspieszenia pojazdu. Na przykład wektory przeciwnie skierowane do wektorów  $\bar{\mathbf{B}}''(0)$  i  $\bar{\mathbf{B}}''(1)$ , uwidocznionych na rysunku 2, wskazują kierunek siły odśrodkowej, która działałaby na pasażera (punktowego oczywiście) pojazdu w punktach odpowiednio  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_n$ .

Wróćmy do wzoru (1) – na razie w postaci ogólnej. Zajmiemy się wyznaczeniem wartości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji  $\mathbf{B}(t)$  w punktach  $t = 0$  i  $t = 1$ , czyli w punktach węzłowych  $\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}(1) = \mathbf{B}_n$ . Jedno- i dwukrotne różniczkowanie daje w wyniku

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= n(1-t)^{n-1}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) + \mathbf{V}(t), \\ \mathbf{B}''(t) &= (n-1)n(1-t)^{n-2}((\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)) + \mathbf{W}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{V}(t)$  i  $\mathbf{W}(t)$  są pewnymi wielomianami (konkretna ich postać nas nie interesuje) takimi, że  $\mathbf{V}(0) = \mathbf{W}(0) = \mathbf{V}(1) = \mathbf{W}(1) = 0$ , skąd

$$\mathbf{B}'(0) = n(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0), \quad \mathbf{B}''(0) = (n-1)n((\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)). \quad (5)$$

Dla  $t=1$  otrzymuje się analogiczne zależności

$$\mathbf{B}'(1) = n(\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}), \quad \mathbf{B}''(1) = (n-1)n((\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1}) + (\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1})). \quad (6)$$

Zauważmy, że definiując pochodne „znormalizowane” jako

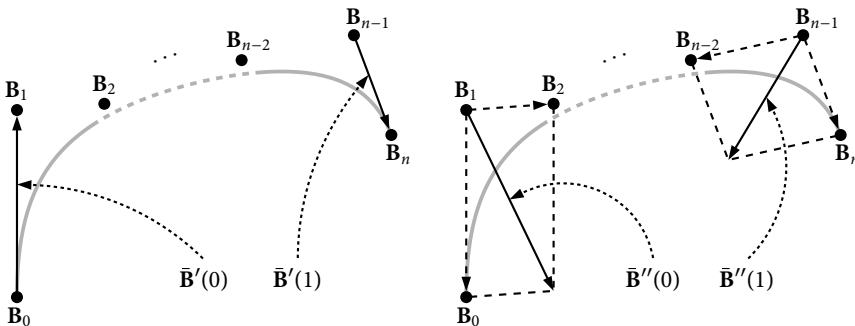
$$\bar{\mathbf{B}}'(t) \equiv (\bar{B}'_x(t), \bar{B}'_y(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\mathbf{B}'(t), \quad \bar{\mathbf{B}}''(t) \equiv (\bar{B}''_x(t), \bar{B}''_y(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(n-1)n}\mathbf{B}''(t), \quad (7)$$

możemy zależności (5) i (6) przepisać w postaci

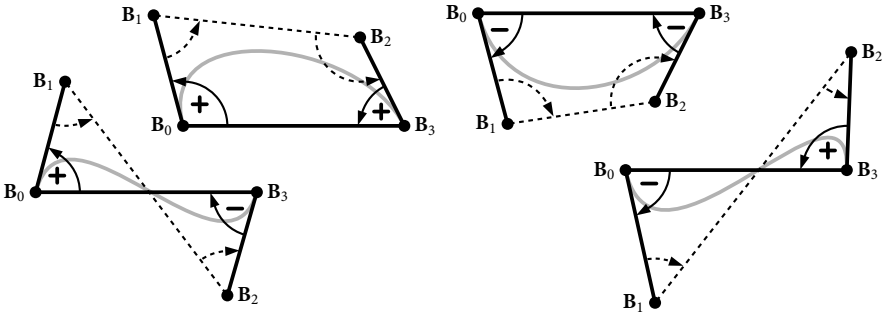
$$\bar{\mathbf{B}}'(0) = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0, \quad \bar{\mathbf{B}}''(0) = (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{B}}'(1) = \mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}, \quad \bar{\mathbf{B}}''(1) = (\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1}) + (\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}). \quad (9)$$

Interpretacja geometryczna, przedstawiona na rysunku 2, ułatwia zrozumienie formuł (8) i (9), a zwłaszcza zapisu drugiej pochodnej.



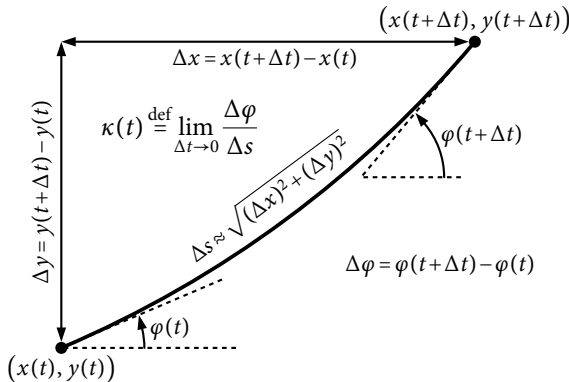
Rys. 2. Interpretacja geometryczna pierwszej i drugiej pochodnej wielomianu Bernsteina



Rys. 3. Konwencja ustalania znaku kąta  $\sphericalangle \mathbf{B}_a \mathbf{B}_b \mathbf{B}_c$  (o wartości bezwzględnej mniejszej od  $\pi$ ): znak kąta o wierzchołku  $\mathbf{B}_b$  skierowanego od ramienia  $\mathbf{B}_b \mathbf{B}_a$  do ramienia  $\mathbf{B}_b \mathbf{B}_c$  uznajemy za zgodny ze znakiem wyznacznika  $\det(\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b, \mathbf{B}_c - \mathbf{B}_b)$ ; strzałki oznaczają przyjętą orientację kątów, szarym kolorem zaznaczony został przebieg łuku Béziera określonego przez czworokąt  $\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3$

#### 4. Krzywizna

W dalszym ciągu będzie nam potrzebne ściśle określenie pojęcia krzywizny krzywej płaskiej. Dla naszych celów przyjmijmy prostą i naturalną definicję, zgodnie z którą krzywizna krzywej płaskiej to po prostu prędkość zmiany kierunku krzywej, a dokładniej zmiana kąta liczona w stosunku do długości krzywej – zob. rysunek 4.



Rys. 4. Definicja krzywizny  $\kappa(t)$  krzywej płaskiej zadanej parametrycznie jako  $(x(t), y(t))$ ; by zachować zgodność z definicją wyznacznika (2), kąty skierowane przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara uważać będziemy za dodatnie (por. rysunek 3)

Stosując elementarne przekształcenia wzoru na krzywiznę przedstawionego na rysunku 4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \frac{1}{\Delta s / \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{(\Delta x / \Delta t)^2 + (\Delta y / \Delta t)^2}} = \\ &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Zapisując pochodne z użyciem notacji zastosowanej w poprzednim punkcie, mianowicie  $x'(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ,  $y'(t) \equiv \frac{dy}{dt}$ , i stosując podstawowe wzory rachunku różniczkowego oraz zależność  $\varphi(t) = \arctg\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &\equiv \varphi'(t) = \left( \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Porównując powyższy wzór z definicją wyznacznika (2), bez trudu zauważymy, że licznik wzoru (11) to nic innego jak wyznacznik:  $\det\left(\left(x'(t), y'(t)\right), \left(x''(t), y''(t)\right)\right)$ . To wyjaśnia nasze zainteresowanie wyznacznikiem. Do wyznaczników jeszcze będziemy mieli okazję powrócić.

Łącząc równania (10) i (11), otrzymujemy ostatecznie

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}. \quad (12)$$

Powyższe wyprowadzenie jest dalekie od matematycznej precyzji, ale uściślenie wywodu nie wydaje się zbyt trudne (by uwzględnić np. przypadek  $x'(t) = 0$ , wystarczy zamiast funkcji  $\arctg$  użyć  $\text{arcctg}$ ). Otrzymanej formule (12) można nadać prostą interpretację geometryczną. Po pierwsze, linia prosta, opisana wzorem  $z(t) = (a_x t + b_x, a_y t + b_y)$ , gdzie  $a_x$ ,  $b_x$ ,  $a_y$  i  $b_y$  są liczbami rzeczywistymi, przy czym  $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$ , ma krzywiznę zerową, czego należało się spodziewać. Rozważmy więc mniej trywialny przykład, mianowicie krzywą definiującą okrąg o środku w początku układu współrzędnych, o promieniu  $R$ , obiegającą środek przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Krzywa taka zadana jest wzorem  $z(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Oczywiście  $z'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$  oraz  $z''(t) = (-R \cos(t), -R \sin(t))$ ; ze wzoru (12) wynika natychmiast zależność

$$\kappa = \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} = \frac{1}{|R|} = \text{const.}$$

Zauważmy, że zmiana orientacji krzywej na zgodną z kierunkiem ruchu wskazówek zegara,  $z(t) = (R \cos(t), -R \sin(t))$ , prowadzi do zmiany znaku krzywizny

$$\kappa = -\frac{1}{|R|}.$$

Przykład ten wyjaśnia, dlaczego wielkość  $\kappa^{-1}$  nazywa się *promieniem krzywizny* i dlaczego krzywe na płaszczyźnie zorientowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara noszą miano *zorientowanych ujemnie*, natomiast krzywe zorientowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara – *zorientowanych dodatnio*.

Znak krzywizny jest oczywiście konsekwencją przyjętej konwencji ustalania znaku kątów (rysunki 3 i 4). W przypadku linii prostej i okręgu krzywizna jest stała, ale w ogólnym wypadku jest to wielkość lokalna. Krzywizna dodatnia oznacza, że krzywa w danym punkcie skręca w lewo, krzywizna ujemna – że skręca w prawo. Punkty o zerowej krzywiznie noszą nazwę punktów przegięcia.

4.1. Krzywizna krzywych giętych

Wzór na krzywiznę (12) dla wielomianu Bernsteina wyrażony za pomocą pochodnych „znormalizowanych” (7) przyjmuje postać

$$\kappa(t) = \frac{B'_x(t)B''_y(t) - B'_y(t)B''_x(t)}{(B'_x(t)^2 + B'_y(t)^2)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \frac{\bar{B}'_x(t)\bar{B}''_y(t) - \bar{B}'_y(t)\bar{B}''_x(t)}{(\bar{B}'_x(t)^2 + \bar{B}'_y(t)^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Stąd, uwzględniając wzory (2), (8) i (9), łatwo wyznacza się krzywiznę dla  $t=0$  i  $t=1$

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{n-1}{n} \frac{\det((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0), (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1))}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0|^3}, \\ \kappa(1) &= \frac{n-1}{n} \frac{\det((\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}), (\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1}) + (\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}))}{|\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_n|^3}, \end{aligned} \quad (14)$$

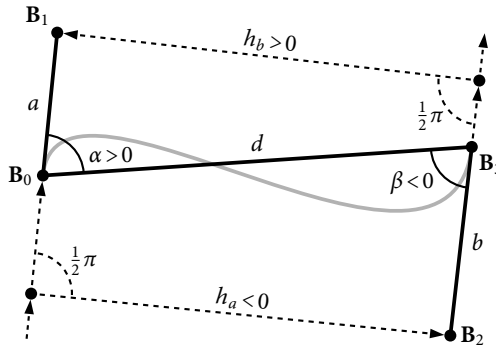
gdzie zapis  $|\mathbf{V}|$  oznacza długość wektora  $\mathbf{V}$ ; stąd dalej, korzystając z własności (3), otrzymuje się wzory

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{n-1}{n} \frac{\det((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0), (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1))}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0|^3}, \\ \kappa(1) &= \frac{n-1}{n} \frac{\det((\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}), (\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1}))}{|\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_n|^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Niech  $h_2^{0,1}$  oznacza odległość (skierowaną) punktu  $\mathbf{B}_2$  od prostej przechodzącej przez punkty  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_1$  i analogicznie niech  $h_{n-2}^{n-1,n}$  oznacza odległość punktu  $\mathbf{B}_{n-2}$  od prostej przechodzącej przez punkty  $\mathbf{B}_{n-1}$  i  $\mathbf{B}_n$ , przy czym  $h_2^{0,1}$  i  $h_{n-2}^{n-1,n}$  mają te same znaki co wyznaczniki odpowiednio  $\det((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0), (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1))$  i  $\det((\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1}), (\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1}))$  – por. rysunek 5. Innymi słowy, jeśli punkt  $\mathbf{B}_2$  leży na prawo od prostej skierowanej od  $\mathbf{B}_0$  do  $\mathbf{B}_1$ , to  $h_2^{0,1} < 0$ , jeśli na lewo, to  $h_2^{0,1} > 0$ . I analogicznie, jeśli  $\mathbf{B}_{n-2}$  leży na prawo od prostej skierowanej od  $\mathbf{B}_{n-1}$  do  $\mathbf{B}_n$ , to  $h_{n-2}^{n-1,n} < 0$ , jeśli na lewo, to  $h_{n-2}^{n-1,n} > 0$ .

Zgodnie z tym, co zostało powiedziane w punkcie 2, wartość bezwzględna wyznacznika pary wektorów na płaszczyźnie to pole odpowiedniego równoległoboku, a zatem

$$\begin{aligned} \det((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0), (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)) &= h_2^{0,1} |\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0|, \\ \det((\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_n), (\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-1})) &= h_{n-2}^{n-1,n} |\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_n|. \end{aligned} \quad (16)$$



Rys. 5. Interpretacja geometryczna wzorów (17) dla łuku Béziera ( $n=3$ ); krzywiznę w punktach  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_3$  określają wzory (18)

Stąd ostatecznie

$$\kappa(0) = \frac{n-1}{n} \frac{h_2^{0,1}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0|^2}, \quad \kappa(1) = \frac{n-1}{n} \frac{h_{n-2}^{n,n-1}}{|\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_n|^2}. \quad (17)$$

Wyprowadzenie wzorów (17) kończy rozważania dla przypadku ogólnego.

#### 4.2. Krzywizna łuków Béziera

Możemy teraz przystąpić do wyznaczenia wzorów na krzywiznę dla przypadku  $n = 3$ , czyli dla krzywych Béziera. Wzory te zastosujemy do gładkiego łączenia łuków Béziera.

Znak krzywizny, jak już wiemy, zależy od konwencji ustalania znaku kąta. Znak kąta w czworoboku  $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3$  (o wartości bezwzględnej mniejszej od  $\pi$ ) określać będziemy zgodnie z przyjętą konwencją, to znaczy każdy kąt będziemy uważać za skierowany od krawędzi poprzedniej do następnej (rysunki 3 i 4).

Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 5 – oczywiście  $\alpha > 0$ , natomiast  $\beta < 0$ . Zgodnie z definicją odległości skierowanej, wprowadzonej w punkcie 4.1,  $h_a < 0$  oraz  $h_b > 0$ . Przyjmując notację zastosowaną na rysunku 5, wzory na krzywiznę (17) dla punktów krańcowych  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_3$  można wyrazić następująco (niezależnie od konfiguracji wierzchołków czworoboku)

$$\kappa(0) = \frac{2}{3} \frac{h_a}{a^2}, \quad \kappa(1) = \frac{2}{3} \frac{h_b}{b^2}. \quad (18)$$

Teraz zajmiemy się dalszym przekształceniem wzorów (18) tak, by wyeliminować wielkości  $h_a$  i  $h_b$ , tj. wyrazić krzywiznę jako funkcję długości (wielkości zawsze nieujemnej) naciągów i cięciwy (odpowiednio  $a$ ,  $b$ , i  $d$ ) oraz kątów (skierowanych)  $\alpha$  i  $\beta$ . Z rysunku 6 (zamieszczonego na następnej stronie) wynika, że  $c = d - b \sin(\beta) \operatorname{ctg}(\alpha) - b \cos(\beta)$  oraz  $h_a = -c \sin(\alpha)$ , czyli

$$h_a = -(d \sin(\alpha) - b \sin(\beta) \cos(\alpha) - b \sin(\alpha) \cos(\beta)) = b \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha). \quad (19)$$

Analogicznie

$$h_b = a \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\beta). \quad (20)$$

Wykorzystując powyższe zależności, otrzymujemy ostatecznie wzory na krzywiznę łuku Béziera w punktach krańcowych, wyrażone za pomocą długości naciągów i kątów między naciągami a cięciwą

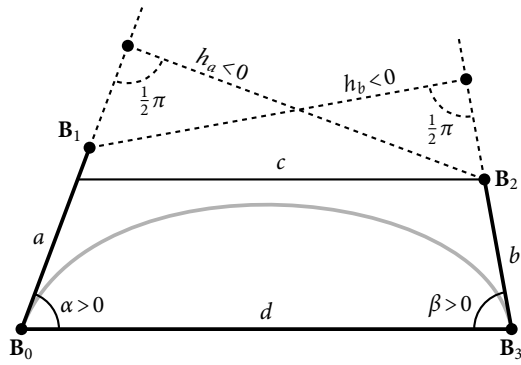
$$\kappa(0) = \frac{2}{3} \frac{b \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha)}{a^2}, \quad \kappa(1) = \frac{2}{3} \frac{a \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\beta)}{b^2}. \quad (21)$$

Podkreśmy raz jeszcze, że takie same wzory uzyskuje się niezależnie od konfiguracji wierzchołków czworoboku  $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3$ , czyli znaków kątów  $\alpha$  i  $\beta$  (por. rysunek 3).

#### 4.3. Osobliwości krzywizny

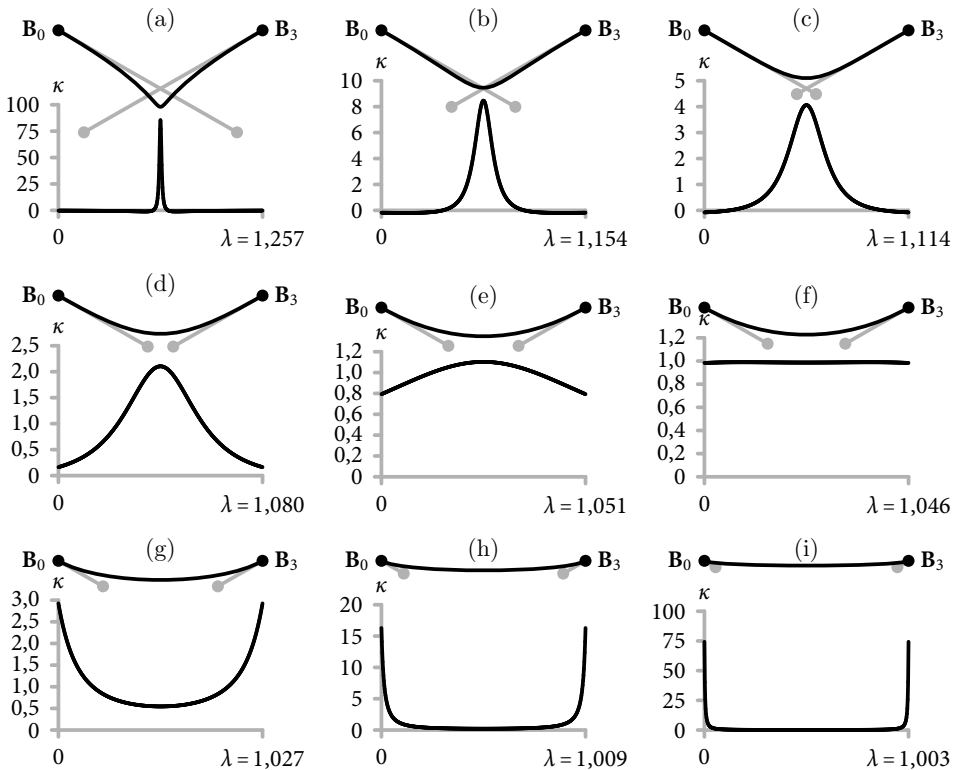
Matematyczne pojęcie krzywizny na ogół odzwierciedla to, co oko widzi – krzywe o krzywiznie zmieniającej się w niewielkim stopniu jesteśmy skłonni uznać za „ładnie ukształtowane”. Jeśli krzywizna się wyraźnie się zmienia, to miejsce, w którym zmiana zachodzi, w większości wypadków jesteśmy w stanie wskazać na pierwszy rzut oka, bez matematycznych rozważań.

Z równań (21) wynika jednak, że krzywizna może osiągać duże wartości, gdy odpowiednie naciągi są krótkie, a wręcz dążyć do nieskończoności w węzle, w którym jeden z naciągów ma zerową długość. Co gorsza, krzywizna nieskończona może



Rys. 6. Szkic pomocniczy do wyprowadzenia wzoru (21) opisującego zależność krzywizny od kątów  $\alpha$  i  $\beta$

być niezauważalna dla oka. Ilustruje to rysunek 7: dla przypadków (a) – (c) wyraźnie widoczna jest zmiana krzywizny w środku; przypadki (d) – (f) oko postrzega jako zbliżone do fragmentu okręgu; przypadki (g) – (i) ilustrują przejście łuku Béziera do cięciwy w miarę skracania naciągów – tu, paradoksalnie, krzywizna na końcach gwałtownie rośnie, choć oko tego nie dostrzega.



Rys. 7. Krzywizna  $\kappa$  łuku Béziera o jednostkowej cięciwie ( $|B_0 - B_3| = 1$ ),  $\lambda$  – długość łuku; przypadek (f) to efekt zastosowania wzoru (29)



### 5. Łuk Béziera a okrąg

Załóżmy, że potrafimy dla danych kątów  $\alpha$  i  $\beta$ ,  $-\pi < \alpha, \beta \leq \pi$  i długości cięciwy  $d \neq 0$ , wyliczyć długość naciągów ze wzorów:

$$a = \frac{1}{3} d \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\tau_a}, \quad b = \frac{1}{3} d \frac{\sigma(\alpha, \beta)}{\tau_b}, \quad (22)$$

gdzie  $\rho(\alpha, \beta)$  i  $\sigma(\alpha, \beta)$  są pewnymi funkcjami, bynajmniej nie zadanymi jednoznacznie (zajmiemy się nimi za chwilę), a liczby (dodatnie)  $\tau_a$  i  $\tau_b$  są zadanymi „naprężeniami” (ang. *tensions*). W programach METAFONT i METAPOST naprężenia można zadać w sposób jawny za pomocą operatora *tension* ([6], s. 129 – 132 i s. 136, zad. 14.15). Najczęściej w praktycznych zastosowaniach  $\tau_a = \tau_b = 1$  i taka jest też wartość domyślna, przyjmowana w programach METAFONT i METAPOST.

Przyjmijmy chwilowo, że  $\tau_a = \tau_b = 1$ . Załóżmy też, że  $d = 1$  (inaczej: dobierzmy takie jednostki, by  $d = 1$ ). Wówczas długość wektora pierwszej pochodnej w punktach  $t = 0$  i  $t = 1$  (por. formuły (5) i (6)) wynosi odpowiednio  $\rho(\alpha, \beta)$  i  $\sigma(\alpha, \beta)$ . Dlatego funkcje te noszą nazwę „funkcji prędkości”. Aby funkcje prędkości były użyteczne w zastosowaniach, którymi się tu zajmujemy, musi zachodzić podstawowy warunek symetrii, wynikający z tego, że zamiana zmiennych powinna prowadzić do przystającej figury geometrycznej (lustrzanego odbicia)

$$\rho(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha). \quad (23)$$

Zatem w istocie mamy do czynienia z jedną funkcją, ale wygodniej nam będzie odróżniać funkcję prędkości w punktach  $t = 0$  i  $t = 1$ .

W programach METAFONT i METAPOST funkcja prędkości jest określona dość skomplikowanym wzorem heurystycznym autorstwa J. D. Hobby’ego

$$\rho(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha) = \frac{2 + \sqrt{2} (\sin \alpha - \frac{1}{16} \sin \beta) (\sin \beta - \frac{1}{16} \sin \alpha) (\cos \alpha - \cos \beta)}{(1 + \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \cos \alpha + \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \cos \beta)}. \quad (24)$$

W pracy [2], s. 123 – 140, podane jest rozumowanie, które doprowadziło J. D. Hobby’ego do takiej formuły, a także alternatywna formuła (zdefiniowana dla  $0 < |\alpha| \leq \beta < \pi$ ), ponoć lepiej sprawdzająca się w asymetrycznych przypadkach, ale znacznie bardziej skomplikowana obliczeniowo i trudniejsza do analizy teoretycznej

$$\rho(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) + \gamma(\beta) \sin\left(\psi_\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right), \quad \sigma(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) - \gamma(\beta) \sin\left(\psi_\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right), \quad (25)$$

gdzie

$$f(\alpha, \beta) = \frac{m\mu^2 + \mu + 2n}{\mu + n \cos(v) + n}, \quad m = 0,2678306, \quad n = 0,2638750,$$

$$\mu = (\beta - \alpha) \left(\frac{\beta - \alpha}{2\beta}\right)^{1,402539}, \quad v = \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{0,7539063}, \quad (26)$$

$$\gamma(\beta) = \frac{1,17}{\pi} \beta - 0,15 \sin(2\beta), \quad \psi_\beta(x) = \pi \left( x + (x^2 - 1) \left( \left( 0,32 - \frac{\beta}{2\pi} \right) x + 0,5 - \frac{\beta}{2\pi} \right) \right).$$

Nieco uwagi doborowi funkcji  $\rho$  i  $\sigma$  poświęca D.E. Knuth w zbiorze esejów [4], s. 39 – 45, proponując między innymi wzór

$$\rho(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha) = \frac{2 \sin(\beta)}{\left(1 + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \quad (27)$$

i sugerując, jak go można ulepszyć.

Jako pierwszy formułę tego rodzaju, ale znacznie prostszą, zaproponował J.R. Manning w cytowanej już pracy [7] (wzór Hobby'ego (24) jest w istocie modyfikacją formuły Manninga)

$$\rho(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha) = \frac{2}{1 + c \cos(\beta) + (1 - c) \cos(\alpha)}. \quad (28)$$

Manning sugeruje wartość  $\frac{2}{3}$  dla współczynnika  $c$ . Pomysł formuły Manninga wywodzi się z łatwego do rachunkowego sprawdzenia spostrzeżenia: jeśli  $\alpha = \beta$ , to formuła  $\rho(\alpha) = 2/(1 + \cos(\alpha))$  pozwala na dobre przybliżenie okręgu za pomocą łuku Béziera. Mianowicie łuk  $\mathbf{B}(t)$ , którego oba naciągi tworzą z cięciwą o długości  $d$  kąt  $\alpha$  i mają długość  $\rho(\alpha)$  określoną wzorem

$$\rho(\alpha) = \frac{d}{3} \frac{2}{1 + \cos(\alpha)} \quad (29)$$

ma tę własność, że punkt  $\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}\right)$  pokrywa się ze środkiem odcinka okręgu opartego o tę samą cięciwę i przechodzącego przez jej końce  $\mathbf{B}(0)$  i  $\mathbf{B}(1)$  pod kątem  $\alpha$ . Taki łuk Béziera, zwłaszcza dla niezbyt dużych kątów, jest nieodróżnialny optycznie od okręgu – więcej na temat precyzji takiego przybliżenia można znaleźć w [4]; por. też rysunek 7f.

Podsumowując te wywody, odnotujmy, że funkcja prędkości ma w zamierzeniu być uogólnieniem, heurystycznym oczywiście, na dwa parametry funkcji  $\rho(\alpha)$  gwarantującej możliwie dobre przybliżenie (równanie (29)) okręgu za pomocą łuku Béziera. Oczywiście pozostaje to w ścisłym związku z naszym zasadniczym celem, tzn. dążeniem do uzyskania możliwie gładkiego optycznie połączenia łuków Béziera – dzięki funkcjom prędkości w rodzaju tych zdefiniowanych powyżej łuki Béziera powinny optycznie „naśladować” okrąg, który z racji stałej krzywizny jest idealnym kandydatem na „wzorzec estetyczny”. Okazuje się, że jest to spostrzeżenie zasadnicze dla ostatecznego rezultatu.

## 6. Gładkie łączenie łuków Béziera – metoda Hobby'ego

Mamy wreszcie zgromadzony cały arsenał niezbędnych środków, by zmierzyć się z następującym zadaniem: dany jest ciąg  $n + 1$  punktów na płaszczyźnie  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ ,  $n > 1$ ; należy połączyć te punkty łukami Béziera tak, by wynikowa krzywa prezentowała się możliwie gładko.

Warunek *sine qua non* jest oczywisty – w punktach złączenia krzywa nie powinna gwałtownie zmieniać kierunku. Oznacza to, że naciągi w punktach złączenia muszą być współliniowe. (Współliniowość naciągów jest warunkiem słabszym niż równość pochodnych. Równość pochodnych, zgodnie ze wzorami (5) i (6), oznacza dodatkowo równość długości naciągów.)

Warunek ten nie gwarantuje jednoznaczności rozwiązania. Dodatkowym warunkiem mogłoby być żądanie zachowania krzywizny w miejscach złączenia, ale prowadziłyby to do skomplikowanego układu równań trygonometrycznych.

Częstym zabiegiem, nie zawsze należycie uzasadnionym, stosowanym przez matematyków i fizyków w takich przypadkach jest zastąpienie funkcji jej przybliżeniem liniowym, w tym wypadku zastąpienie funkcji sinus funkcją liniową, a funkcji prędkości – funkcją tożsamościowo równą 1

$$\sin(\alpha) \approx \alpha, \quad \rho(\alpha, \beta) \approx \sigma(\alpha, \beta) \approx 1. \quad (30)$$

(Dla formuł (24) i (28)  $\rho(0, 0) = \sigma(0, 0) = 1$ ; formuły (25) i (27) z definicji są nieokreślone dla  $\alpha = \beta = 0$ ). Przybliżenie to daje się uzasadnić matematycznie dla małych (co do wartości bezwzględnej) wartości argumentów, jednakże stosować je będziemy także dla wartości argumentów znacznie odbiegających od zera. Zatem równie dobrze można przyjąć przybliżenie (30) jako heurystyczne założenie upraszczające.

Stosując zależność (30) do wzoru na krzywiznę łuku Béziera w punktach skrajnych, otrzymanego z połączenia wzorów (21) oraz (22)

$$\kappa(0) = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{3} d \frac{\sigma(\alpha, \beta)}{\tau_b} \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha)}{\left(\frac{1}{3} d \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\tau_a}\right)^2} = \frac{2\tau_b^{-1} \sigma(\alpha, \beta) \sin(\alpha + \beta) - 6 \sin(\alpha)}{d \tau_a^{-2} \rho^2(\alpha, \beta)}, \quad (31)$$

$$\kappa(1) = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{3} d \frac{\rho(\alpha, \beta)}{\tau_a} \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\beta)}{\left(\frac{1}{3} d \frac{\sigma(\alpha, \beta)}{\tau_b}\right)^2} = \frac{2\tau_a^{-1} \rho(\alpha, \beta) \sin(\alpha + \beta) - 6 \sin(\beta)}{d \tau_b^{-2} \sigma^2(\alpha, \beta)},$$

otrzymujemy

$$\kappa(0) \approx \bar{\kappa}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\tau_b^{-1}(\alpha + \beta) - 6\alpha}{d \tau_a^{-2}}, \quad \kappa(1) \approx \bar{\kappa}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\tau_a^{-1}(\alpha + \beta) - 6\beta}{d \tau_b^{-2}}. \quad (32)$$

Funkcja  $\bar{\kappa}$ , zdefiniowana powyżej, to „krzywizna pozorna” (ang. *mock curvature*; słowo *mock* oznacza także atrapę), wprowadzona przez J.D. Hobby’ego w [2], s. 123–140, wspomniana przez D.E. Knutha w [6], s. 130–132, i omówiona szerzej w [5], § 274–277, stanowiąca klucz do problemu gładkiego łączenia krzywych Béziera: najpierw z układu równań liniowych sformułowanych na podstawie zależności (32) wyznaczamy kąt między cięciwą a naciągami, a następnie z równań (22) – długości naciągów.

### 6.1. Równania

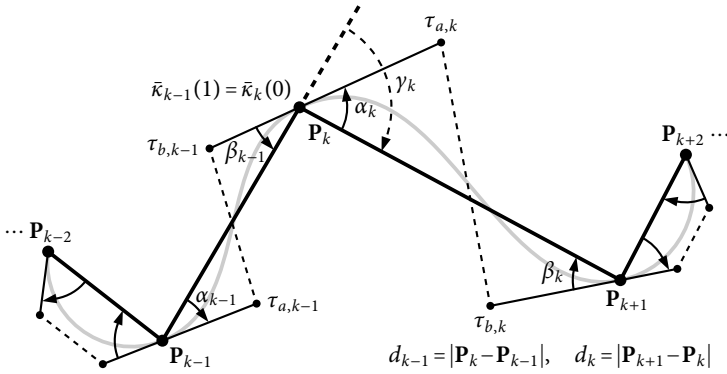
Na styku łuków Béziera żądać więc będziemy zachowania pozornej krzywizny, sprowadzając zadanie do rozwiązywania układu równań liniowych. Wyznaczenie tych równań to kwestia nieco żmudnych, acz elementarnych rachunków.

Przyjmijmy oznaczenia i zależności przedstawione na rysunku 8, zamieszczonym na następnej stronie.

Zauważmy po pierwsze, że żądanie, by naciągi w punktach złączenia były współliniowe oznacza, iż

$$\alpha_k + \beta_{k-1} + \gamma_k = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (33)$$

gdzie  $\gamma_k$  oznacza kąt zmiany kierunku łamanej  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$  w punkcie  $\mathbf{P}_k$ .



Rys. 8. Oznaczenia użyte przy formułowaniu układu równań liniowych (38); indeks  $k$  odnosi się (inaczej niż w [5]) do wielkości związanych z łukiem Béziera opartym o cięciwę  $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$

Po drugie, warunek zachowania krzywizny pozornej w punkcie  $\mathbf{P}_k$  prowadzi do równania

$$\bar{\kappa}_{k-1}(1) \equiv \frac{2\tau_{a,k-1}^{-1}(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1}) - 6\beta_{k-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}} = \frac{2\tau_{b,k}^{-1}(\alpha_k + \beta_k) - 6\alpha_k}{d_k\tau_{a,k}^{-2}} \equiv \bar{\kappa}_k(0). \quad (34)$$

Korzystając z zależności (33), można wyeliminować wielkości  $\beta_{k-1}$  i  $\beta_k$  z równania (34), otrzymując

$$\frac{\tau_{a,k-1}^{-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k - \gamma_k) - 3(-\alpha_k - \gamma_k)}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}} - \frac{\tau_{b,k}^{-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1} - \gamma_{k+1}) - 3\alpha_k}{d_k\tau_{a,k}^{-2}} = 0, \quad (35)$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{a,k-1}^{-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}}\alpha_{k-1} + \left( \frac{3 - \tau_{a,k-1}^{-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}} + \frac{3 - \tau_{b,k}^{-1}}{d_k\tau_{a,k}^{-2}} \right)\alpha_k + \frac{\tau_{b,k}^{-1}}{d_k\tau_{a,k}^{-2}}\alpha_{k+1} = \\ = -\frac{3 - \tau_{a,k-1}^{-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}}\gamma_k - \frac{\tau_{b,k}^{-1}}{d_k\tau_{a,k}^{-2}}\gamma_{k+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Wprowadzając jednoliterowe oznaczenia dla wielkości znanych

$$\begin{aligned} A_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_{a,k-1}^{-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}}, \quad B_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3 - \tau_{a,k-1}^{-1}}{d_{k-1}\tau_{b,k-1}^{-2}}, \quad C_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3 - \tau_{b,k}^{-1}}{d_k\tau_{a,k}^{-2}}, \\ D_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_{b,k}^{-1}}{d_k\tau_{a,k}^{-2}}, \quad E_k \stackrel{\text{def}}{=} -B_k\gamma_k - D_k\gamma_{k+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

otrzymujemy układ  $n - 1$  równań liniowych z  $n + 1$  niewiadomymi

$$\begin{aligned} A_1\alpha_0 + (B_1 + C_1)\alpha_1 + D_1\alpha_2 &= E_1, \\ A_2\alpha_1 + (B_2 + C_2)\alpha_2 + D_2\alpha_3 &= E_2, \\ A_3\alpha_2 + (B_3 + C_3)\alpha_3 + D_3\alpha_4 &= E_3, \\ &\vdots \\ A_{n-1}\alpha_{n-2} + (B_{n-1} + C_{n-1})\alpha_{n-1} + D_{n-1}\alpha_n &= E_{n-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

Potrzebne są zatem jeszcze dwa równania.

Jeżeli wynikiem ma być krzywa zamknięta, to  $\alpha_n = \alpha_0$ , czyli problem redukuje się do  $n$  niewiadomych. Brakujące równanie otrzymuje się zakładając stałość krzywizny pozornej w punkcie  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_n$

$$A_0\alpha_{n-1} + (B_0 + C_0)\alpha_0 + D_0\alpha_1 = E_0. \quad (39)$$

Jeżeli wynikiem ma być krzywa otwarta, to albo kąty  $\alpha_0$  i  $\alpha_n$  muszą być dane jawnie, co po prostu redukuje liczbę niewiadomych o 2, albo trzeba poszukać innego warunku. Zanim zajmiemy się tym zagadnieniem, rozpatrzmy pewien czysto techniczny szczegół – otóż kątem, który chcemy wyznaczyć, jest w istocie  $\beta_{n-1}$ , gdyż  $\alpha_n$  znajduje się poza łamaną  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ . Jednak wygodniej jest – ze względu na symetrię wzorów – operować niewiadomą  $\alpha_n$ , dlatego przyjmiemy sztuczny warunek

$$\gamma_n = 0. \quad (40)$$

Tym samym zależność (33) dla kątów  $\beta_0$  i  $\beta_{n-1}$  w przypadku krzywej otwartej przyjmuje postać

$$\beta_0 = -\alpha_1 - \gamma_1, \quad \beta_{n-1} = -\alpha_n. \quad (41)$$

Jeżeli chodzi o krzywiznę, to można na przykład założyć, że znana jest pozorna krzywizna w punktach skrajnych, zadana jawnie lub pośrednio. Pośrednim warunkiem mogłoby być żądanie równości krzywizn w punkcie skrajnym i sąsiednim:  $\bar{\kappa}_0(0) = \bar{\kappa}_0(1)$  i  $\bar{\kappa}_{n-1}(0) = \bar{\kappa}_{n-1}(1)$ , co można w prosty sposób uogólnić

$$\bar{\kappa}_0(0) = \omega_0 \bar{\kappa}_0(1), \quad \omega_n \bar{\kappa}_{n-1}(0) = \bar{\kappa}_{n-1}(1), \quad \omega_0, \omega_n \geq 0. \quad (42)$$

W implementacji metody Hobby'ego został wykorzystany ten właśnie pomysł, nie ma natomiast możliwości liczbowego zadania wartości krzywizny pozornej w danym punkcie. Dodatkowe parametry  $\omega_0$  i  $\omega_n$  noszą nazwę „skręcenia” (ang. *curl*; inne znaczenie – lok, kędzior). W programach METAFONT i METAPOST można zadać jawnie skręcenie na końcach ścieżki za pomocą operatora *curl* ([6], s. 128 i nast.); domyślna wartość skręcenia wynosi 1. Warunki (42) po rozwinięciu wzorów na krzywiznę pozorną z wykorzystaniem wzorów (32) przyjmują postać

$$\frac{2\tau_{b,0}^{-1}(\alpha_0 - \alpha_1 - \gamma_1) - 6\alpha_0}{d_0 \tau_{a,0}^{-2}} = \omega_0 \frac{2\tau_{a,0}^{-1}(\alpha_0 - \alpha_1 - \gamma_1) + 6(\alpha_1 + \gamma_1)}{d_0 \tau_{b,0}^{-2}}, \quad (43)$$

$$\omega_n \frac{2\tau_{b,n-1}^{-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) - 6\alpha_{n-1}}{d_{n-1} \tau_{a,n-1}^{-2}} = \frac{2\tau_{a,n-1}^{-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + 6\alpha_n}{d_{n-1} \tau_{b,n-1}^{-2}}.$$

Porządkując równania (43) z wykorzystaniem zależności (41) otrzymujemy

$$\left( \frac{\tau_{b,0}^{-1}}{\tau_{a,0}^{-2}} - \frac{3}{\tau_{a,0}^{-2}} - \frac{\tau_{a,0}^{-1}\omega_0}{\tau_{b,0}^{-2}} \right) \alpha_0 - \left( \frac{\tau_{b,0}^{-1}}{\tau_{a,0}^{-2}} - \frac{\tau_{a,0}^{-1}\omega_0}{\tau_{b,0}^{-2}} + \frac{3\omega_0}{\tau_{b,0}^{-2}} \right) \alpha_1 = \left( \frac{\tau_{b,0}^{-1}}{\tau_{a,0}^{-2}} - \frac{\tau_{a,0}^{-1}\omega_0}{\tau_{b,0}^{-2}} + \frac{3\omega_0}{\tau_{b,0}^{-2}} \right) \gamma_1, \quad (44)$$

$$\left( \frac{\tau_{b,n-1}^{-1}\omega_n}{\tau_{a,n-1}^{-2}} - \frac{3\omega_n}{\tau_{a,n-1}^{-2}} - \frac{\tau_{a,n-1}^{-1}}{\tau_{b,n-1}^{-2}} \right) \alpha_{n-1} - \left( \frac{\omega_n \tau_{b,n-1}^{-1}}{\tau_{a,n-1}^{-2}} - \frac{\tau_{a,n-1}^{-1}}{\tau_{b,n-1}^{-2}} + \frac{3}{\tau_{b,n-1}^{-2}} \right) \alpha_n = 0,$$

Mnożąc pierwsze z równań (44) obustronnie przez  $-\tau_{a,0}^{-2}$ , a drugie przez  $-\tau_{b,n-1}^{-2}$  (dzięki czemu uzyskuje się wzory łatwiej porównywalne ze wzorami podanymi w [5]), otrzymujemy ostatecznie brakujące dwa równania

$$C_0 \alpha_0 + D_0 \alpha_1 = E_0, \quad (45)$$

$$A_n \alpha_{n-1} + B_n \alpha_n = 0,$$

gdzie

$$C_0 = \omega_0 \frac{\tau_{a,0}^{-3}}{\tau_{b,0}^{-2}} + 3 - \tau_{b,0}^{-1}, \quad D_0 = \omega_0 \frac{\tau_{a,0}^{-2}}{\tau_{b,0}^{-2}} (3 - \tau_{a,0}^{-1}) + \tau_{b,0}^{-1}, \quad E_0 = -D_0 \gamma_1, \quad (46)$$

$$A_n = \omega_n \frac{\tau_{b,n-1}^{-2}}{\tau_{a,n-1}^{-2}} (3 - \tau_{b,n-1}^{-1}) + \tau_{a,n-1}^{-1}, \quad B_n = \omega_n \frac{\tau_{b,n-1}^{-3}}{\tau_{a,n-1}^{-2}} + 3 - \tau_{a,n-1}^{-1}.$$

Oczywiście nasuwa się pytanie o rozwiązywalność sformułowanego powyżej układu równań liniowych. W ten sposób wracamy do wyznaczników, bowiem do badania tego problemu matematycy używają właśnie wyznaczników (stopnia równego liczbie niewiadomych); odpowiednimi „wektorami” są kolumny (lub wiersze) współczynników układu równań. Jeżeli wyznacznik danego układu równań jest niezerowy, to układ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Nie będziemy się zajmować zaawansowaną matematyczną analizą tego konkretnego zagadnienia – zainteresowanych odsyłamy do [2]. Poprzestaniemy na przytoczeniu bez dowodu wyniku podanego w [2] (wniosek z twierdzenia 1; zob. też [5], § 276): jeżeli dla  $0 \leq k \leq n-1$  przyjmiemy  $\tau_{a,k} \geq \frac{3}{4}$ ,  $\tau_{b,k} \geq \frac{3}{4}$  (wbudowane ograniczenie METAFONTa i METAPOSTa), to układy równań dla ścieżki zamkniętej (38)+(39) i otwartej (38)+(45) mają jednoznaczne rozwiązania. Ponadto zaburzenie wprowadzone w danym węźle, spowodowane np. zmianą położenia węzła, zanika wykładniczo w miarę oddalania się od tego węzła; nieco precyzyjniej: zmiana warunków w węźle  $k$  powoduje na ogół zmianę kąta w węźle  $j$  proporcjonalną do  $2^{-|k-j|}$ . Odnotować jednak należy, że są sytuacje, w których drobne zaburzenia choćby w jednym węźle mogą prowadzić do globalnych zmian kształtu krzywej wynikowej (zob. punkt 6.4, rysunki 10 i 11).

### 6.2. Przypadek $n = 1$

Dotychczas zakładaliśmy, że  $n > 1$ . Rozważania można rozszerzyć na przypadek  $n = 1$ , wymaga to jednak przyjęcia dodatkowych założeń.

Jeżeli  $n = 1$  i mamy do czynienia z krzywą zamkniętą, to rozsądnie jest założyć, że jest to przypadek zdegenerowany, czyli  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$ , a długość obu naciągów wynosi zero – por. równanie (22). Zauważmy, że METAFONTowa konstrukcja  $(0, 0) \dots (1, 0) \dots$  cycle odpowiada w istocie przypadkowi  $n = 2$ :  $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (0, 0) = \mathbf{P}_0$ .

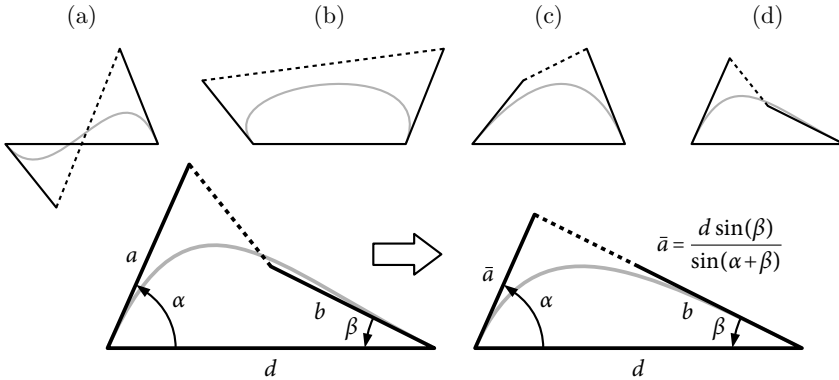
Jeżeli  $n = 1$  i mamy do czynienia z krzywą otwartą, to przypadek zdegenerowany  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$  traktujemy podobnie jak wyżej; w przeciwnym razie układ równań redukuje się do dwóch równań (45). Ponieważ  $y_n = 0$  (warunek (40)), zatem  $E_0 = 0$ , a tym samym  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ , o ile wyznacznik macierzy równań się nie zeruje. Jednakże dla domyślnej wartości współczynników określających *curl* i *tension*, czyli 1,  $C_0 = D_0 = A_1 = B_1 = 3$ , tym samym wyznacznik układu równań (45) jest równy 0, co z kolei oznacza, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań, zatem znów musimy przyjąć dodatkowe założenie. Najprościej jest założyć, że nie zadanie żadnego z kątów implikuje zawsze  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ .

Jeżeli kąt  $\alpha_0$  jest zadany, to  $\alpha_1$  wyznacza się z drugiego równania układu (45), i na odwrót, jeżeli kąt  $\alpha_1$  jest zadany, to  $\alpha_0$  wyznacza się z pierwszego równania. W ten sposób dochodzimy do sytuacji, w której oba kąty są albo zadane jawnie, albo wyliczone – pozostaje zatem tylko wyliczyć długość naciągów ze wzorów (22).

### 6.3. Operator *atleast*

Powyższe rozważania wyjaśniają zasadę działania prawie wszystkich METAFONTowych konstruktorów ścieżkowych. Dla kompletności omówimy jeszcze dość specyficzny operator *atleast* ([6], s. 129, 132 oraz s. 136, zad. 14.15), modyfikujący działanie operatora *tension* (zob. punkt 5, równanie (22)). Jest to wprawdzie opera-

tor wbudowany w silnik METAFONTowy, ale w zasadzie można by zaimplementować go za pomocą makr METAFONTowych. Przepis jest następujący: w pierwszym etapie pomijamy operator (modyfikator) `atleast`, czyli stosujemy zwykły operator `tension` i sprowadzamy w ten sposób problem do znanego zagadnienia.



Rys. 9. Implementacja operatora `tension atleast`: uwzględniana jest jedynie konfiguracja punktów kontrolnych przedstawiona na rysunku (d), konfiguracje (a), (b) i (c) są ignorowane

Schemat dalszego postępowania zilustrowany jest na rysunku 9. Przypuśćmy, że znaleźliśmy wszystkie naciągi, stosując wyżej opisany algorytm. Sprawdzamy teraz, czy końce cięciwy i naciągów nie tworzą w którymś z segmentów czworokąta wklęsłego. Jeżeli tak, to przedłużenie jednego z naciągów przecina drugi – ten drugi naciąg skracamy, przesuując jego koniec do punktu przecięcia (co z jednej strony oznacza zwiększenie naprężenia, a z drugiej – wprowadzenie nieciągłości krzywizny pozornej). Dokładniej, długość skróconego naciągu ( $\bar{a}$  na rysunku 9) wyznacza się z twierdzenia sinusów. W ten sposób można uzyskać łuki Béziera bez punktów przegięcia, aczkolwiek czasem (gdy naciąg „skracający” jest bardzo krótki) rezultaty mogą być zaskakujące.

#### 6.4. Niestabilność algorytmu interpolacji – problem kąta półpełnego

Jednym z kluczowych kroków algorytmu Hobby’ego jest wyznaczenie kątów  $\gamma_k$  zmiany kierunku łamanej  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$  w poszczególnych węzłach – zob. rysunek 8 i równanie (33). Jeżeli łamana zmienia kierunek o kąt, którego wartość bezwzględna różni się istotnie od kąta półpełnego ( $\pi$ ), to algorytm interpolacji zachowuje się stabilnie, to znaczy małe zmiany położenia punktów  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$  powodują małe zmiany kształtu wynikowej krzywej.

Niestety, dla kątów zbliżonych do kąta półpełnego pojawia się zasadniczy problem, nie będący bynajmniej specyfiką programów METAPOST i METAFONT. Jak się wydaje, jest to wręcz problem nieusuwalny, tym bardziej że w obrębie grafiki dyskretnej (ogólnie: metod numerycznych) drobne zaburzenia spowodowane ograniczoną dokładnością obliczeń, są nieuniknione.

W przypadku programów METAFONT i METAPOST bezpośrednim źródłem kłopotów jest przyjęta przez autorów zasada, że wszystkie kąty mają być co do

wartości bezwzględnej mniejsze niż  $\pi$ . Jeśli w obliczeniach pojawi się kąt niespełniający tej zasady, to jest sprowadzany do odpowiedniego przedziału przez dodanie lub odjęcie wielokrotności kąta pełnego  $2\pi$ . Na przykład kąt  $\pi + \varepsilon$ , gdzie  $\pi > \varepsilon > 0$ , zostanie zastąpiony kątem  $\pi + \varepsilon - 2\pi = -\pi + \varepsilon$ . Jeżeli  $\varepsilon \approx 0$ , to można się spodziewać zachowań niestabilnych (pomijamy tu kwestię niedokładności reprezentacji liczby  $\pi$  w arytmetyce dyskretnej).

Żeby zobaczyć, jak może przejawiać się niestabilność, rozważmy trywialny przykład – cykliczną ścieżkę skonstruowaną na dwóch węzłach,  $\mathbf{P}_0$  i  $\mathbf{P}_1$ . Jak zostało wspomniane w podpunkcie 6.2, wygodnie jest myśleć o takim zadaniu jako o konstruowaniu ścieżki dla trzech punktów,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$  i  $\mathbf{P}_2$ , przy czym  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_2$ , co oznacza, że łamana  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  skręca o kąt półpełny w punktach  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_2$  i  $\mathbf{P}_2$ . Pytanie – w lewo czy w prawo?

Dla takiego przypadku  $\alpha_0 = \alpha_2$  i równania (38) i (39) sprowadzają się do układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi

$$\begin{aligned} (B_0 + C_0) \alpha_0 + (A_0 + D_0) \alpha_1 &= E_0, \\ (A_1 + D_1) \alpha_0 + (B_1 + C_1) \alpha_1 &= E_1. \end{aligned} \quad (47)$$

Współczynniki po lewej stronie układu równań (47) mają bardzo prostą postać, mianowicie

$$A_0 = A_1 = D_0 = D_1 = \frac{1}{d}, \quad B_0 = B_1 = C_0 = C_1 = \frac{2}{d}, \quad (48)$$

gdzie  $d = |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|$ . Współczynniki  $E_0$  i  $E_1$  zależą od kątów zwrotu łamanej  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  (zob. równanie (33))

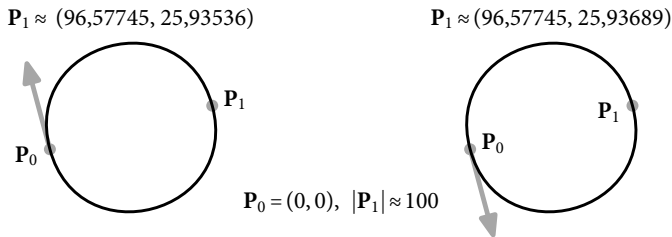
$$E_0 = -\frac{2\gamma_0 + \gamma_1}{d}, \quad E_1 = -\frac{\gamma_0 + 2\gamma_1}{d}. \quad (49)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4\alpha_0 + 2\alpha_1 &= -(2\gamma_0 + \gamma_1), \\ 2\alpha_0 + 4\alpha_1 &= -(\gamma_0 + 2\gamma_1). \end{aligned} \quad (50)$$

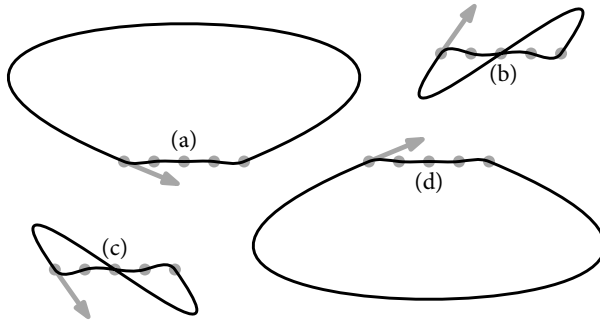
Jeżeli założymy skręt w lewo, czyli  $\gamma_0 \approx \pi$  i  $\gamma_1 \approx \pi$ , to  $\alpha_0 \approx \frac{1}{2}\pi$  i  $\alpha_1 \approx \frac{1}{2}\pi$ , a jeśli w prawo, czyli  $\gamma_0 \approx -\pi$  i  $\gamma_1 \approx -\pi$ , to  $\alpha_0 \approx -\frac{1}{2}\pi$  i  $\alpha_1 \approx -\frac{1}{2}\pi$ . Jeżeli więc zamiast kąta  $\approx \pi$  do obliczeń zostanie użyty kąt  $\approx -\pi$ , to ścieżka wynikowa zmieni orientację na przeciwną.

W przypadku, gdy łamana „zawraca”, to znaczy skręca o kąt zbliżony do kąta półpełnego, algorytm zastosowany w programach METAFONT i METAPOST pró-



Rys. 10. Niewielka zmiana położenia punktu  $\mathbf{P}_1$  wpływa na orientację krzywej wynikowej (szara strzałka); krzywa po lewej stronie rysunku została utworzona METAPOSTem za pomocą konstrukcji  $(0,0) \dots ((100,0) \text{ rotated } 15.03189) \dots \text{cycle}$ , a krzywa po prawej stronie – za pomocą konstrukcji  $(0,0) \dots ((100,0) \text{ rotated } (15.03189+.0003)) \dots \text{cycle}$





Rys. 11. Minimalna zmiana położenia jednego punktu może zmienić nie tylko orientację, ale i przebieg krzywej wynikowej; dla przypadku (a) punkty są rozłożone równomiernie:  $P_i = (20i, 0)$  dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ ; przypadek (b) odpowiada przesunięciu  $P_1$  o  $2^{-16}$  w górę, przypadek (c) – przesunięciu  $P_4$  o  $2^{-16}$  w dół, a przypadek (d) – przesunięciu  $P_0$  o  $2^{-16}$  w dół; we wszystkich przypadkach użyta została METAFONTowa konstrukcja  $P0..P1..P2..P3..P4..cycle$

buje tę sytuację wykryć i na ogół wybiera kąt dodatni (zob. [5], § 454). Jednakże czasami, mimo starannych zabezpieczeń, algorytm nie jest w stanie odróżnić błędów zaokrągleń od założonego celowo skrętu o kąt ujemny zbliżony do półpełnego.

Teoretycznie mogłyby wystąpić przypadki  $\gamma_0 \approx -\pi$  i  $\gamma_1 \approx \pi$  oraz  $\gamma_0 \approx \pi$  i  $\gamma_1 \approx -\pi$ , co prowadziłyby do utworzenia ścieżki w kształcie ósemki. Okazuje się, że programy METAFONT i METAPOST mogą w pewnych przypadkach utworzyć ścieżkę o orientacji ujemnej (rysunek 10), natomiast „ósemka” nigdy nie powstaje dla ścieżki dwuwęzłowej.

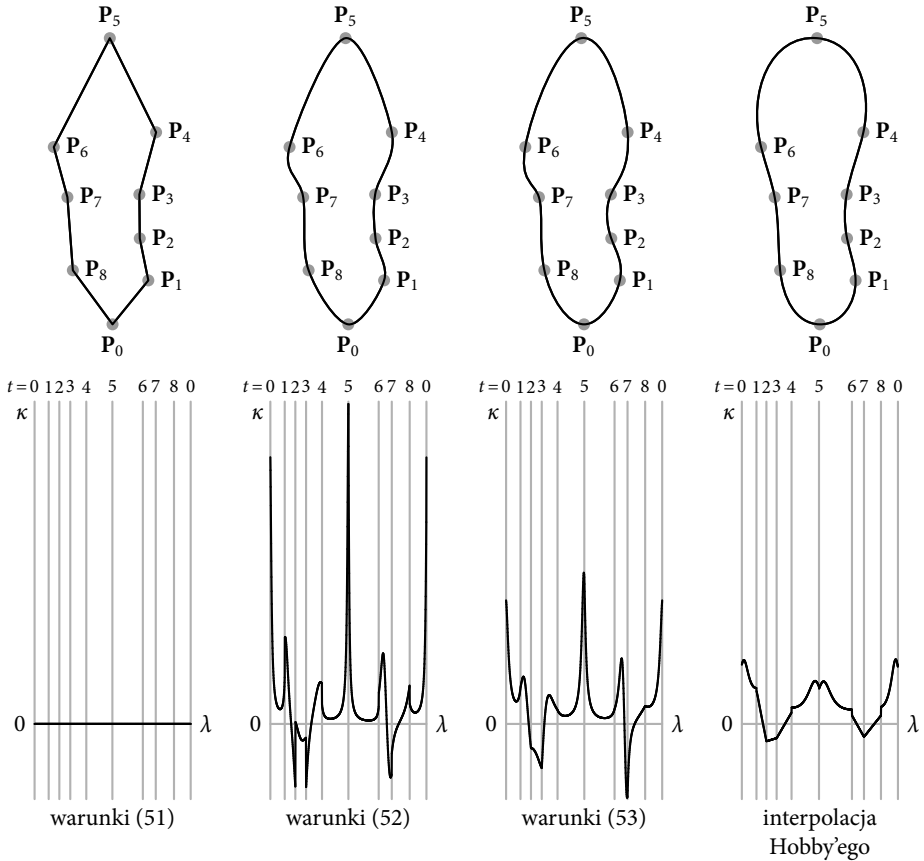
Na podstawie dotychczasowych rozważań nietrudno przewidzieć, że w przypadku wielu węzłów ułożonych na linii prostej dużo łatwiej o niestabilność. Nie wdając się w szczegółową analizę tego rodzaju przypadków, poprzestaniemy na przytoczeniu jeszcze jednego przykładu, tym razem krzywej zbudowanej na 5 węzłach rozłożonych równomiernie wzdłuż linii prostej (poziomej). Przesunięcie (w pionie) jednego z punktów o  $2^{-16}$ , czyli najmniejszą dodatnią wartość dopuszczalną w programie METAFONT i „standardowym” (bez zwiększonej precyzji obliczeń) programie METAPOST powoduje nie tylko zmianę orientacji, ale również zmianę kształtu krzywej wynikowej – zob. rysunek 11.

### 6.5. Inne szczegóły techniczne

Jasne jest, że implementacja algorytmu tak skomplikowanego jak opisany powyżej obfituje w szczegóły techniczne. Wszystkich nie sposób omówić w opracowaniu tego rodzaju. Informacje na temat konkretnych rozwiązań implementacyjnych, takich na przykład jak to, że METAFONT wymusza ograniczenie  $\leq 12$  na wartość funkcji prędkości (równanie (24)), zainteresowani znajdą w [5], choć trzeba uprzedzić, że zgłębianie tego dokumentu nie jest łatwym zadaniem.

### 7. Porównanie wybranych metod interpolacji

Opisany w punkcie 6 algorytm interpolacyjny Hobby’ego sprawdza się znakomicie w zastosowaniach praktycznych (pomijając rzadko trafiające się w praktyce przypadki osobliwe, omówione w podpunkcie 6.4), o czym dobrze wiedzą użytkow-



Rys. 12. Porównanie metod interpolacji dla krzywej zamkniętej; skala krzywizny  $\kappa$  jest wspólna dla wszystkich przypadków ( $\lambda$ , podobnie jak na rysunku 7, oznacza długość ścieżki)

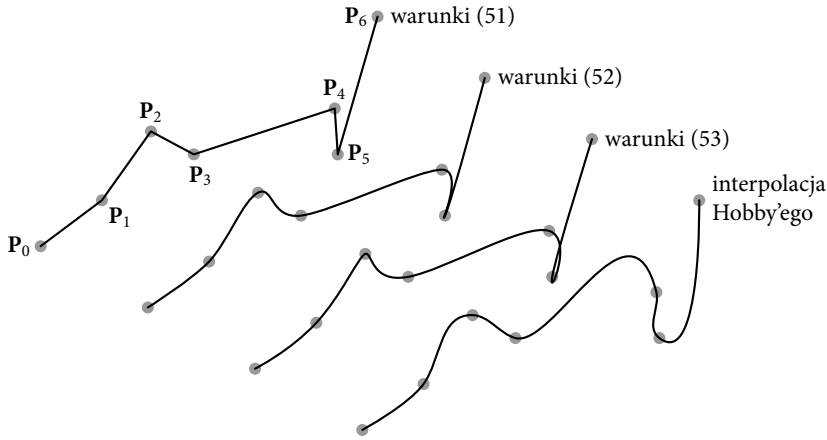
nicy programów METAFONT i METAPOST. Nie oznacza to, że algorytm ten należałoby polecać w każdej sytuacji. Czasami warto skorzystać z innych algorytmów.

Niech będzie dany jak poprzednio ciąg punktów  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, n > 1$ ; niech dalej  $\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^a, \mathbf{P}_{k+1}^b$  i  $\mathbf{P}_{k+1}$  będą punktami węzłowymi łuku Béziera opartego o cięciwę  $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$  ( $a$  – ang. *after*,  $b$  – ang. *before*).

Najprostszym niewątpliwie sposobem połączenia węzłów jest użycie łamanej

$$\mathbf{P}_k^a = \mathbf{P}_k + \frac{1}{3}(\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k), \quad \mathbf{P}_k^b = \mathbf{P}_k + \frac{1}{3}(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_k). \quad (51)$$

Użytkownicy METAFONTa i METAPOSTa nie muszą w sposób jawny wyliczać naciągów – takie łączenie punktów otrzymuje się za pomocą operatora „--”. Podobny efekt optyczny dałoby nałożenie warunków  $\mathbf{P}_k^a = \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^b = \mathbf{P}_k$ . METAFONTowy operator „---”, czyli „..tension infinity..”, daje zbliżony efekt, mianowicie  $\mathbf{P}_k^a \approx \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^b \approx \mathbf{P}_k$ ; mimo iż w grę wchodzi rozbieżność na poziomie błędów zaokrążeń, to mogą one prowadzić do zauważalnych optycznie (i czasem dość zaskakujących) różnic w kształcie krzywej.



Rys. 13. Porównanie wybranych metod interpolacji dla przykładowego 7-punktowego zbioru danych; na krańcach nałożony jest dodatkowy warunek  $P_0 = P_0^a$ ,  $P_6 = P_6^b$  (wyjątek: interpolacja łamaną)

Czasem wygładzenie naroży jest wskazane. Wówczas zastosowanie następującego wzoru:

$$P_k - P_k^b = P_k^a - P_k = \frac{1}{3} \frac{(P_{k+1} - P_{k-1})}{2}, \quad (52)$$

czyli jawne zadanie pochodnej (wzór (5)), może dać całkiem zadowalające efekty.

Metoda ta ma charakter lokalny, to znaczy zmiana współrzędnych punktu  $P_k$  wpływa na wynik interpolacji jedynie w punktach sąsiednich  $P_{k-2}$ ,  $P_{k-1}$ ,  $P_{k+1}$  i  $P_{k+2}$ .

Metodą nielokalną, ale znacznie prostszą od metody omówionej w punkcie 6, jest założenie równości (ciągłości) pierwszej i drugiej pochodnej w punktach łączenia (zob. wzory (5) i (6))

$$P_k - P_k^b = P_k^a - P_k, \quad (53)$$

$$(P_{k-1}^a - P_k^b) + (P_k - P_k^b) = (P_k - P_k^a) + (P_{k+1}^b - P_k^a).$$

Jak już zostało odnotowane, interpolacja METAFONTowa, czyli interpolacja Hobby'ego, przeważnie działa satysfakcjonująco. Dobrze ilustruje to przykład zaczerpnięty z prac [2] i [7] przedstawiony na rysunku 12. Zauważmy, że ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej (warunki (53)) oznacza ciągłość krzywizny (równanie (12)), natomiast interpolacja METAFONTowa na ogół prowadzi do nieciągłości krzywizny (rysunek 12,  $t = 1, 4, 6, 8$ ).

Jednak interpolacja Hobby'ego, wykazująca najmniejsze wahania krzywizny, daje w rezultacie optycznie gładszą krzywą niż krzywa uzyskana za pomocą warunku (53), Okazuje się bowiem, że nieciągłości krzywizny mogą być praktycznie niezauważalne dla oka, o ile skokowi krzywizny nie towarzyszy wyraźna zmiana kierunku krzywej (por. też uwagi poczynione w punkcie 4.3). I odwrotnie – chociaż przy łączeniu węzłów łamaną krzywizna jest stała (równa zero, z wyjątkiem węzłów, gdzie jest nieokreślona), oko natychmiast zauważa te punkty, gdyż nie jest tam zachowany kierunek krzywej.

Typowym zadaniem, w którym interpolacja Hobby'ego raczej się nie sprawdza, jest wizualizacja danych empirycznych – METAFONT generuje krzywe zbyt

„obłe” – zob. rysunek 13. Również warunek (53), jak widać, może dać nie najlepszy efekt – wykres raczej nie powinien się zapętląć. W tego rodzaju wypadkach lepiej skorzystać z możliwie najprostszej metody – np. (51) lub (52).

Wymienione w tym punkcie metody doczekały się oczywiście wielu modyfikacji, których nie będziemy tutaj omawiać. Nie oznacza to, że nie są one warte zainteresowania, wręcz przeciwnie – dobrze wiedzieć, że znakomity bezsprzecznie METAFONTowy algorytm interpolacji czasem można z dobrym skutkiem zastąpić innym, prostszym algorytmem.

### Cytowana literatura

1. Arnold Władimir I., *On teaching mathematics*. 1997.  
<http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html>, dostęp 14.04.2013,  
 tłum. polskie: [http://main3.amu.edu.pl/~wiadmat/017-026\\_wa.wm37.pdf](http://main3.amu.edu.pl/~wiadmat/017-026_wa.wm37.pdf),  
 dostęp 14.04.2013.
2. Hobby John. D., *Smooth, Easy to Compute Interpolating Splines*. „Discrete and Computational Geometry” 1986 vol. 1(2).  
<ftp://db.stanford.edu/pub/cstr/reports/cs/tr/85/1047/CS-TR-85-1047.pdf>,  
 dostęp 14.04.2013.
3. Joy Kenneth I., *Bernstein Polynomials*. 2000.  
<http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/CAGDNotes/Bernstein-Polynomials.pdf>, dostęp 14.04.2013.
4. Knuth Donald E., *Digital Typography*. CSLI Publications, Stanford California 1999.
5. Knuth Donald E., *METAFONT: The Program, Computers & Typesetting vol. D*. Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1986.
6. Knuth Donald E., *The METAFONTbook, Computers & Typesetting vol. C*. Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1986.
7. Manning J. R., *Continuity Conditions for Spline Curves*. „Computer Journal” 1974 vol. 17(2), s. 181–186.  
<http://comjnl.oxfordjournals.org/content/17/2/181.full.pdf>,  
 dostęp 14.04.2013.
8. [http://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany\\_Bernsteina](http://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Bernsteina), dostęp 14.04.2013.

### Abstract

*Typographers, programmers and mathematicians or the case of an aesthetically pleasing interpolation*

The reason for preparing this report is that the author has been convinced for many years that John D. Hobby’s algorithm for connecting Bézier segments, implemented by Donald E. Knuth in METAFONT and later transferred by Hobby to METAPOST, based on the notion of a “mock curvature”, is a genuine pearl which deserves both proper acknowledgement and a far wider awareness of its existence. Of course, one can find nearly all the necessary details in the relevant papers by Hobby and in the METAFONT source, but, needless to say, it is not easy to dig through the publications. The present paper provides a full mathematical description of Hobby’s interpolation algorithm, discusses its advantages and disadvantages (in particular, its instability) and compares Hobby’s approach with a few selected simpler approaches.