TECHNIKA TRANSPORTU SZYNOWEGO

Leszek MAJKUT

WYKORZYSTANIE ROZWIĄZAŃ FUNDAMENTALNYCH DO WYZNACZENIA CZĘSTOŚCI WŁASNYCH KABIN POJAZDÓW*

Streszczenie

W artykule opisano możliwości wykorzystania rozwiązania fundamentalnego do wyznaczania częstości drgań własnych przestrzeni zamkniętych. Porównano metodykę analizy z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych i Metody Elementów Brzegowych wraz ze wskazaniem wad i zalet każdej z metod w porównaniu z metodą opartą na rozwiązaniu fundamentalnym.

WSTĘP

Projektanci kabin pojazdów drogowych czy szynowych muszą wziąć po uwagę wiele rożnych wymagań dotyczących bezpieczeństwa i komfortu obsługi lub/i podróżnych. Jednym z takich wymagań, niestety bardzo często pomijanych na etapie projektowania, jest odstrojenie częstości drgań własnych kabiny od częstości drgań wymuszonych, różnych drgających elementów konstrukcyjnych kabiny. W praktyce inżynierskiej tego rodzaju problemy rozwiązuje się już na etapie eksploatacji wykorzystując różne metody związane z adaptacją pomieszczeń zamkniętych. Brak takiego rozstrojenia pomiędzy częstościami powoduje, m.in. zwiększenie poziomu hałasu w kabinie, co wpływa na zmniejszenie komfortu pracy obsługi lub/i pasażerów oraz zmniejszenie trwałości zmęczeniowej drgających elementów.

W pracy opisano kilka metod numerycznych akustyki falowej pozwalających na wyznaczenie poszukiwanych częstości drgań własnych. Pokrótce opisano zalety i wady Metody Elementów Skończonych, Metody Różnic Skończonych i Metody Elementów Brzegowych oraz szczegółowo Metodę Rozwiązań Fundamentalnych. Największy problemem związanym z wykorzystaniem powyższych metod to konieczność znajomości warunków brzegowych w postaci impedancji akustycznej. Problem ten wynika z faktu, że w dotychczasowej praktyce inżynierskiej do analizy akustycznej wykorzystywano przede wszystkim metody akustyki geometrycznej, dla których warunki brzegowe podawane są w postaci współczynników pochłaniania. Problem znalezienia zależności pomiędzy współczynnikiem pochłaniania, a impedancją akustyczną materiału był wielokrotnie analizowany w Katedrze Mechaniki i Wibroakustyki, Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie, a jednym z efektów tej pracy jest rozprawa doktorska R. Olszewskiego [8], gdzie można znaleźć zależności łączące te wielkości.

* Praca wykonana w ramach badań statutowych nr 11.11.130.885

W pracy pominięto opisy i analizę z wykorzystaniem metod akustyki geometrycznej takich jak metodę źródeł pozornych czy śledzenia promienia oraz metod energetycznych takich jak echogram czy Statystyczna Analiza Energii.

1. PORÓWNANIE METOD OBLICZENIOWYCH AKUSTYKI FALOWEJ

W praktyce inżynierskiej najczęściej wykorzystywana jest Metoda Elementów Skończonych, ze względu na powszechnie akceptowaną dokładność obliczeń i łatwą dostępność (implementacje MES znaleźć można w wielu pakietach inżynierskich oraz dostępnych darmowych programach komputerowych). Do zalet tej metody obliczeń należy również brak konieczności przeprowadzenia jakichkolwiek obliczeń wstępnych. Problemem z wykorzystaniem tej metody do obliczeń pola akustycznego jest konieczność podziału na elementy całej analizowanej przestrzeni. Ze względu na to, że obliczenia dynamiczne z wykorzystaniem MES są obliczeniami przybliżonymi niezbędny jest bardzo gęsty podział na elementy (w praktyce przyjmuje się taki podział by na długość fali przypadało co najmniej sześć elementów [6])[1]. Tak gęsty podział prowadzi do znacznego zwiększenia rzędu macierzy głównej analizowanego problemu i co za tym idzie do wydłużenia czasu i kosztów obliczeń. Przy analizie ekonomicznej obliczeń nie wolno zapomnieć, że takie obliczenia należy przeprowadzić wielokrotnie tzn. po każdej modyfikacji strukturalnej układu.

Wszystkie wymienione powyżej zalety i wady można również wykorzystać do opisu Metody Różnic Skończonych.

Inną, choć znacznie mniej popularną metodą obliczeniową jest Metoda Elementów Brzegowych, w której równania różniczkowe zastępuje się odpowiednio skonstruowanymi równaniami całkowymi. Idea MEB jest w zasadzie taka sama jak MES, z tą różnicą, że w MEB podziałowi na elementy podlega jedynie brzeg rozpatrywanego obszaru. Prowadzi to w sposób naturalny do obniżenia wymiaru przestrzeni o jeden, tzn. brzeg obszaru trójwymiarowego jest obszarem dwuwymiarowym, a tylko on podlega podziałowi na elementy skończone. Obniżenie wymiaru skutkuje zmniejszeniem wymiaru macierzy głównej problemu, a więc czasu i kosztów obliczeń. Do wad metody zaliczyć można wymagany duży nakład pracy poświęcony na obliczenia wstępne, niezbędne w tej metodzie. Obliczenia te związane są z wyznaczeniem (obliczeniem) odpowiednich całek z funkcji z osobliwością (funkcja zmierzająca do nieskończoności dla jednej zmiennej niezależnej). Te właśnie obliczenia wstępne są główną przeszkodą w popularyzacji tej metody. Kłopotliwe przy obliczeniach numerycznych jest również to, że macierze główne analizowanego problemu są pełne w odróżnieniu od pasmowych macierzy w analizie MES.

Proponowana Metoda Rozwiązań Fundamentalnych wydaje się mieć zalety obu wcześniej opisanych metod tzn. zbędne są jakiekolwiek obliczenia czy analiza wstępna jak w metodzie MES, jednocześnie nie ma konieczności podziału na elementy całego analizowanego obszaru [1,2]. Co więcej zbędna jest również dyskretyzacja brzegu obszaru [4,10]. Niezbędny jest jedynie wybór odpowiedniej ilości punktów na brzegu (tzw. punktów kolokacyjnych) i taka sama lub większa ilość punktów źródłowych poza (na zewnątrz) analizowanego obszaru (szczegóły w kolejnym punkcie pracy). Macierz główna analizowanego problemu ma wymiar: ilość punktów kolokacyjnych x ilość punktów źródłowych. Do rozwiązania takiego problemu wykorzystuje się metodę minimalizacji sumy kwadratu błędu lub rozkład według wartości osobliwych – rozkład SVD.

Jedyną wielkością konieczną przy analizie MRF jest znajomość rozwiązania fundamentalnego [3,5], czyli funkcji Greena równania różniczkowego opisującego

[1] Przy górnej granicy częstotliwości słyszalnych rzędu 20kHz, długość fali akustycznej wynosi około 1.7cm, co zgodnie z wymaganiami prowadzi do maksymalnego wymiaru elementu rzędu 25mm.

analizowany problem początkowo – brzegowy. Niezbędna jest również oczywiście znajomość geometrii i warunków brzegowych.

Do wad tej metody zaliczyć należy możliwość analizy jedynie prostych geometrii, konieczność znajomości funkcji Greena analizowanego problemu, nierozwiązanym dotąd problemem jest optymalna (ze względu na błąd metody) ilość i położenie zarówno punktów kolokacyjnych, jak i punktów źródłowych, im dalej od brzegu obszaru umieszczone są punkty źródłowe tym większa dokładność obliczeń, ale jednocześnie macierze główne stają się źle uwarunkowane, w takich przypadkach do rozwiązania stosuje się ciągłą lub dyskretną regularyzację.

2. METODA ROZWIĄZAŃ FUNDAMENTALNYCH

Poszukiwanie częstości drgań własnych układu akustycznego związane jest z poszukiwaniem nietrywialnego rozwiązania równania różniczkowego postaci (równanie Helmholtza):

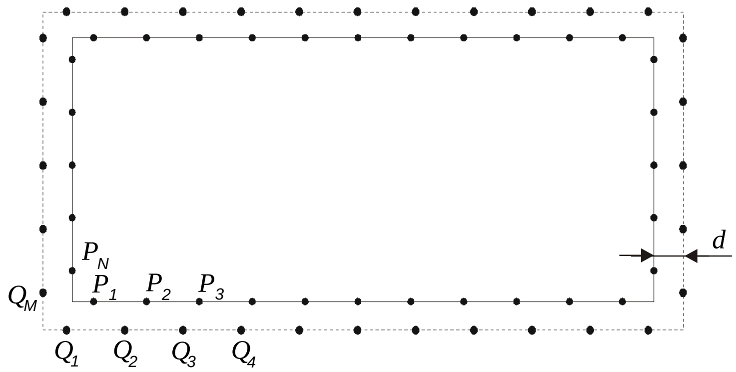
$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{1}$$

spełniającego warunki brzegowe postaci:

$$p + Z \cdot v = 0 \tag{2}$$

gdzie: k – liczba falowa, Z - impedancja akustyczna brzegu, $p = i\omega\rho\,\phi$ – ciśnienie akustyczne, $v = -\text{grad}\,\phi$ – prędkość, ρ - gęstość ośrodka (powietrza), ω - częstość.

Ideą Metody Rozwiązań Fundamentalnych jest założenie, że rozwiązanie problemu (1) aproksymowane jest przez liniową kombinację rozwiązań fundamentalnych (funkcji Greena) pochodzących od źródeł umieszczonych poza (na zewnątrz) analizowanego obszaru. Przykład takiego obszaru pokazany jest na rys.1



Rys.1. Przykład rozmieszczenia punktów kolokacyjnych P_i i źródłowych Q_j

Rozwiązanie równania (1) w dowolnym punkcie obszaru P aproksymowane jest sumą rozwiązań pochodzących od wszystkich źródeł Q_j, czyli:

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^{M} c_j G(P, Q_j) \tag{3}$$

gdzie: ϕ – wartość potencjału akustycznego w punkcie P; $G(P,\ Q_j)$ – dynamiczna funkcja Greena; Q_j – punkty źródłowe rozwiązań fundamentalnych umieszczone poza, na zewnątrz analizowanego obszaru; punkty P należą do analizowanego obszaru (P_i to punkty brzegowe obszaru).

Współczynniki c_j wyznaczane są metodą eliminacji Gaussa (równa ilość punktów P_i i Q_j) lub metodą minimalizacji kwadratu błędu, tak by równanie (3) spełniało warunki brzegowe (2) rozważanego problemu.

Funkcja Greena G wyznaczona jest dla każdej częstości drgań jako rozwiązanie równania Helmholtza postaci:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(P,Q) \tag{4}$$

gdzie: $k = \omega/c$ – liczba falowa; c – prędkość dźwięku, ω - częstość wymuszenia, $\delta(P, Q)$ – funkcja delta Diraca.

Rozwiązanie fundamentalne (funkcja Greena) dane jest równaniem [7]:

$$G(P,Q) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} K_0(k\, r(P,Q)) & \text{w } \mathrm{R}^2 \\ \dfrac{1}{2\pi\, r(P,Q)} e^{-ik\, r(P,Q)} & \text{w } \mathrm{R}^3 \end{cases} \tag{5}$$

gdzie: K_0 – zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu, $r(P,Q)$ - odległość euklidesowa między punktami P i Q.

Do wyznaczenia poszukiwanych współczynników c_j niezbędna jest znajomość prędkości cząstki akustycznej. W tym celu należy wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji Greena (5) w kierunku wektora normalnego do brzegu (tzn. prostopadłego) skierowanego na zewnątrz, w każdym z punktów brzegowych P_i. Pochodna kierunkowa funkcji Greena, oznaczona przez $H(P,Q)$, opisana jest równaniem:

$$H(P,Q) = \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi} K_1(k\, r(P,Q)) \dfrac{\partial r(P,Q)}{\partial n} & \text{w } \mathrm{R}^2 \\ \dfrac{(i\, k\, r(P,Q) - 1)}{2\pi\, r^2(P,Q)} e^{-ik\, r(P,Q)} \dfrac{\partial r(P,Q)}{\partial n} & \text{w } \mathrm{R}^3 \end{cases} \tag{6}$$

Odpowiednie równania (6) i (5) przy założeniu (3) należy podstawić do równań opisujących warunki brzegowe (2):

$$i\omega\rho \cdot \sum_{j=1}^{M} c_j \cdot G(P_i, Q_j) - Z \cdot \sum_{j=1}^{M} c_j \cdot H(P_i, Q_j) = 0 \tag{7}$$

Równanie postaci (7) należy napisać dla każdego punktu P_i leżącego na brzegu analizowanego obszaru. Tak powstały układ N (ilość punktów kolokacyjnych) równań z M (ilość punktów źródłowych) niewiadomymi zapisać można w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = 0 \tag{8}$$

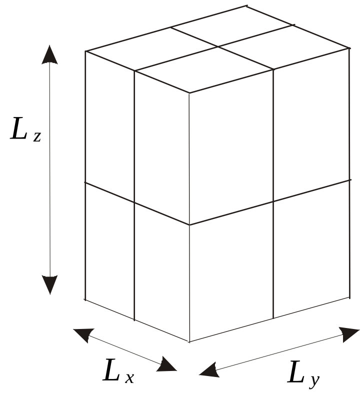
gdzie: $C^T = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_j, \dots, c_M]$;

Częstości drgań własnych analizowanego problemu początkowo – brzegowego opisanego równaniem (1) z warunkami (2), wyznacza się z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej tj. det $\boldsymbol{A} = 0$.

Poprawność wyników uzyskanych opisaną metodą sprawdzono w pierwszej kolejności na prostym modelu przestrzeni prostopadłościennej, po czym na uproszczonym modelu wnętrza samochodu osobowego.

3. PRZYKŁADY

W celu sprawdzenia poprawności analizy MRF wyznaczono częstości drgań własnych przestrzeni akustycznej w postaci prostopadłościanu o wymiarach L_x = 0.6m, L_y = 0.8m i L_z = 1m. Analizowaną objętość pokazano na rys.2.



Rys.2. Prostopadłościenna analizowana objętość

Częstości drgań własnych takiego „pomieszczenia” wyznaczyć można analitycznie, korzystając z zależności:

$$k(n_x, n_y, n_z) = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \tag{9}$$

W tab. 1 zebrano wartości własne (liczba falowa *k*) wyznaczone z zależności (9) i Metodą Rozwiązań Fundamentalnych.

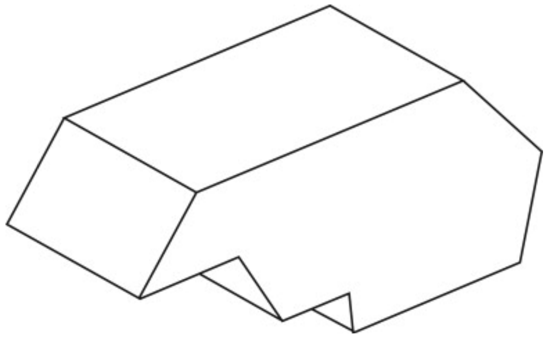
Tab1. Wartości własne obiektu pokazanego na rys.1

wartości własne *k* z (9)	błąd względny [%]
3.1416	5.4
3.9270	5.6
5.0290	7.1
5.2360	4.4
6.1062	6.7
6.2832	7.2
6.5450	7.8
7.2599	5.8

W każdym przypadku obliczeń odległość *d* (rys.1) między brzegiem analizowanego obszaru, a punktami źródłowymi ustalono na równą 0.3m.

Powyższe obliczenia przeprowadzono dla tej samej ilości punktów brzegowych i źródeł równej 54 (9 na każdej ścianie). Wstępne analizy autora wskazują, że zwiększenie ilości punktów powoduje zmniejszenie błędu względnego.

Drugim analizowanym w pracy przykładem jest uproszczony model wnętrza samochodu osobowego, który pokazano na rys.3.



Rys.3. Uproszczona objętość kabiny pojazdu

Wyniki analizy Metodą Rozwiązań Fundamentalnych porównano z wynikami analizy Metodą Elementów Skończonych. W analizie MES wykorzystano darmowe oprogramowanie Salome (http://www.salome-platform.org) i Code Aster (http://www.code-aster.org). Wyniki analizy (przeliczone na wartości własne) zebrano w tab.2 i porównano z wynikami analizy MRF.

Tab2. Wartości własne obiektu pokazanego na rys.3

wartości własne z analizy MES	błąd względny [%]
3.2673	7.9
5.2391	16.8
5.7214	16.7
6.1797	15.8
6.8986	16.2
7.7838	20.3
8.1293	13.6
8.6671	14.0

Zdaniem autora zwiększenie ilości punktów brzegowych i źródłowych powinno znacznie obniżyć różnice w wyznaczonych wartościach własnych.

PODSUMOWANIE

W pracy opisano wady i zalety metod numerycznych akustyki falowej. Szczegółowo opisano Metodę Rozwiązań Fundamentalnych jako alternatywną do Metody Elementów Skończonych, Metody Różnic Skończonych czy Metody Elementów Brzegowych.

Wyniki analiz z wykorzystaniem prostych modeli geometrycznych, zebrane w tab.1 i tab.2 wskazują na duży potencjał proponowanej metody. Dalsze prace autora związane będą z analizą wpływu ilości i rozmieszczenia punktów brzegowych na dokładność obliczeń. Podobny problem dotyczy ilość i odległości od brzegu punktów źródłowych.

EIGEN VALUE PROBLEM OF VEHICLE CAB WITH METHOD OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS

Abstract

In the paper the possibility of Method of Fundamental Solutions (MFS) for the calculation of acoustic eigenvalues is described. The proposed method is compared with other numerical methods of wave acoustic. The advantages and disadvantages of Finite Element Method (FEM), Finite Difference Method (FDM) and Boundary Element Method (BEM) are described and compared to proposed MFR method.

BIBLIOGRAFIA

1. Alves C.J.S., Antunes P.R.S.: *The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigenfrequences and eigenmodes of 2D simply connected shapes*. Computers, Materials & Continua 2005, nr 2.
2. Alves C.J.S., Chen C.S.: *A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems*. Advances in Computational Mathematics 2005, nr 23.
3. Alves C.J.S., Valtchev S.S.: *Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering*. Engineering Analysis with Boundary Elements 2005, nr 53.
4. Kang S.W., Lee M.J. Kang Y.J.: *Vibration analysis of arbitrary shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function.* Journal of Sound and Vibration 1999, nr 221
5. Karageorghis A.: *The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation*. Applied Mathematics Letters 2001, nr 69.
6. Majkut L.: *Diagnostyka wibroakustyczna uszkodzeń elementów konstrukcyjnych.* Instytut Technologii Eksploatacji Radom 2010.
7. Marczuk R., Majkut L.: *Modelling of Green function in a rectangular room based upon the geometrical-filtration model.* Archives of Acoustics 2006 nr 31.
8. Olszewski R. *Zastosowanie metody elementów skończonych i brzegowych do analizy pola akustycznego.* Rozprawa doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica Kraków 2005.
9. Reutskiy S.Y.: *The method of fundamental solutions for eigenproblems with Laplace and biharmonic operators*, Computers, Materials & Continua 2005, nr 2.
10. Reutskiy S.Y.: *The method of external sources for eigenvalue problems with Helmholtz equation.* Computer Modeling in Engineering & Science 2006, nr 12.

Autor:

dr hab. inż. Leszek MAJKUT – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza w Krakowie