

Analiza porównawcza analitycznych i numerycznych metod wyznaczania wyężenia kół stosowanych w pompach zębatych

Piotr Osiński, Paweł Bury, Artur Klucznik

1. Wstęp

Pompy zębate są to pompy wyporowe rotacyjne o stałej wydajności tłoczenia. Ciecz robocza jest transportowana w przestrzeniach międzyzębnych z obszaru ssania do obszaru tłoczenia poprzez obracające się i współpracujące ze sobą koła zębate. Wśród zalet można wymienić takie cechy, jak: prosta konstrukcja, stosunkowo duże wartości uzyskiwanych ciśnień tłoczenia (nawet do 30 MPa), małe gabaryty, wysoka sprawność, niska cena, a także stosunkowo duża trwałość. Główną wadą jest natomiast pulsacja spowodowana nierównomiernością wydajności, co prowadzi do generowania drgań i hałasu. Pompy te znalazły zastosowanie głównie w obrabiarkach, maszynach roboczych oraz ciągnikach rolniczych. Podstawowe kryterium podziału pomp zębatych to rodzaj zazębienia. Wówczas można wyróżnić pompy o zazębieniu wewnętrznym oraz o zazębieniu zewnętrznym [9, 10, 11, 12, 13, 14]. W artykule przedstawiono obliczenia dla pompy o zazębieniu zewnętrznym, które opisano poniżej.

W pompach tych ciecz robocza transportowana jest w przestrzeniach międzyzębnych ograniczonych powierzchniami dwóch sąsiednich zębów oraz korpusem pompy. Koło czynne jest napędzane przez wałek, na którym jest osadzone i który przenosi moc z silnika napędowego. Koło bierne z kolei jest napędzane przez koło czynne. W przypadku tych pomp ważne jest zachowanie odpowiednich luzów występujących między czółami wieńców kół zębatych a korpusem łożyska oraz między wierzchołkami zębów a korpusem pompy. Zbyt małe luzy mogą powodować tarcie kół o obudowę, co może skutkować uszkodzeniami lub zatarciem. Zbyt duże luzy z kolei mogą powodować występowanie dużych przecieków, a w konsekwencji spadek ciśnienia w komorze tłocznej. W pompach zębatych o zazębieniu zewnętrznym mogą występować koła o zarysie zębów ewolwentowym lub cykloidalnym [9, 10, 11, 12, 13, 14]. W dalszej części skupiono się na kołach o zarysie ewolwentowym.

Zarys ewolwentowy otrzymuje się poprzez obtaczanie bez poślizgu półprostej po kole zasadniczym o promieniu r_b . Dla kół o tym zarysie można wyróżnić wymienione niżej zalety i wady [1, 2, 3, 4, 7].

Zalety:

- łatwy pomiar cech zębienia;
- stały kierunek siły działające na zęby oraz jej stała wartość są możliwe dzięki prostemu odcinkowi przyporu (nie występuje pulsacja, drgania, hałas);

Streszczenie: W artykule przedstawiono porównanie wyników obliczeń wyężeniowych kół zębatych otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych oraz metodą elementów skończonych. Został przedstawiony model matematyczny i tok obliczeń oraz uzyskane wyniki dla analizowanej jednostki. Przedstawione wyniki są efektem prac badawczo-rozwojowych realizowanych w Laboratorium Napędów Hydraulicznych i Wibroakustyki Maszyn Politechniki Wrocławskiej (www.lhiw.pwr.edu.pl).

Abstract: This article presents a comparison of the results of strength calculation of gears received by analytical calculations and finite element method. The text has been described a mathematical model, the calculation and the results of the calculations for analyzed pump unite. The presented results are the effect of ongoing research and development in Laboratory Hydraulic and Vibroacustics Machines Technical University of Wrocław (www.lhiw.pwr.edu.pl).

- nie są czułe na zmianę odległości między osiami;
- możliwa jest dokładna obróbka przy pomocy prostych narzędzi uniwersalnych.

Wady:

- mała powierzchnia styku zębów powoduje powstawanie na ich powierzchni dużych nacisków, co skutkuje zwiększeniem ryzyka zatarcia;
- występują poślizgi.

Koła zębate o zarysie zębów ewolwentowym stosuje się m.in. w reduktorach i różnego rodzaju przekładniach oraz w pompach zębatych [1, 2, 3, 4, 7].

W celu określenia wytrzymałości kół zębatych przeprowadza się obliczenia naprężeń zginających zredukowanych u podstawy zęba oraz naprężeń stykowych [1, 4, 6, 8].

Zbyt wysokie naprężenia u podstawy zęba mogą doprowadzić do odkształcenia plastycznego zęba, co skutkuje niewłaściwą pracą, uszkodzeniem bądź zatarciem współpracujących kół lub wyłamaniem się zęba [1, 4, 6, 8].

Przekroczenie dopuszczalnych naprężeń stykowych może doprowadzić do wystąpienia zjawiska zwanego pittingiem. Wówczas na powierzchni zęba powstają drobne pęknięcia, do których dostaje się czynnik roboczy i powoduje ich rozszerzenie oraz wykuszanie cząstek materiału, które następnie trafiają do obiegu, mogąc uszkodzić inne elementy układu, natomiast zużyte powierzchnie zębów trą o siebie i powodują dalsze zużywanie się powierzchni [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Na wartość nacisku dopuszczalnego wpływ mają [1, 2, 3, 4, 5]:

- twardość powierzchni zęba;
- staranność wykonania uzębienia – wraz ze wzrostem dokładności obróbki i gładkości powierzchni zębów wzrasta trwałość przekładni;
- smarowanie – zmniejsza siły tarcia między zębami, a także może obniżać temperaturę pracy. Im lepkość oleju jest większa, tym zużycie przekładni jest mniejsze.

W celu zwiększenia wytrzymałości oraz polepszenia jakości powierzchni zębów stosuje się jej utwardzanie poprzez hartowanie indukcyjne albo płomieniowe, azotowanie lub nawęglanie. W wyniku tego zabiegu otrzymuje się odporną na ścieranie i twardą powierzchnię oraz plastyczny rdzeń [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

W niniejszym artykule zestawiono dwa podejścia do zagadnienia wytrzymałości kół zębatych stosowanych w hydraulicznych pompach zębatych. Posłużono się znanymi metodami analitycznymi do wyznaczania doraźnej wytrzymałości zębów na zginanie oraz na naciski powierzchniowe. Dodatkowo dla wyznaczonych analitycznie wartości obciążeń wykonano obliczenia numeryczne.

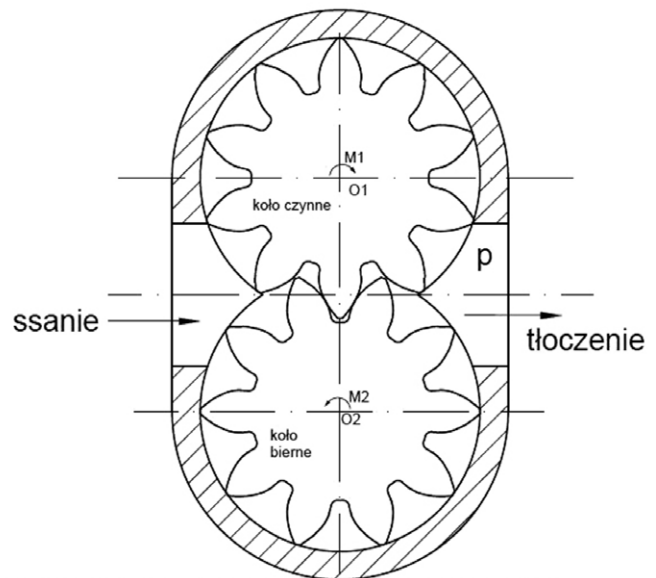
2. Model analityczny

Jak już wspomniano wcześniej, w pompie zębatej obracające się koła powodują przemieszczanie cieczy znajdującej się w przestrzeniach międzyzębnych z obszaru ssania do obszaru tłoczenia. W strefie tłoczenia panuje wyższe ciśnienie niż w ssącej, które powoduje obrót kół w przeciwnym kierunku niż kierunek tłoczenia. Aby temu przeciwdziałać, należy na oba koła przyłożyć odpowiedni moment. Ze względu na to, że w rozpatrywanej konstrukcji pompy tylko jedno koło jest napędzane, na wałek napędowy pompy należy przyłożyć moment równy sumie momentów na kołach czynnym i biernym [9, 11, 12, 14]. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wartości ciśnienia tłoczenia: ciśnienie nominalne $p_{nom} = 28$ MPa oraz ciśnienie maksymalne $p_{max} = 32$ MPa. Do obliczeń przyjęto następujące uproszczenia [1, 9, 12]:

- nie ma strat tarcia;
- odcinek przyporu jest linią prostą;
- zęby kół zębatych nie ulegają odkształceniu;
- zazębienie występuje w jednym punkcie w danym momencie;
- ciecz jest nieściśliwa;
- występuje luz między zębami.

Moment na kole czynnym M_1 i biernym M_2 opisany jest następującymi zależnościami [9, 12]:

$$M_1 = \frac{pb}{2}(r_{w1}^2 - e_1^2) \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat pompy zębatej [16]

$$M_2 = \frac{pb}{2}(r_{w2}^2 - e_2^2) \quad (2)$$

gdzie:

p – jest ciśnieniem tłoczenia;

b – szerokością wieńca;

r_w – promieniem wierzchołkowym;

e – odległością punktu styku od osi koła.

Punkty na rysunku 2 oznaczone literami A, B, C, D są to punkty zazębienia, znajdujące się na linii przyporu, dla których wykonano obliczenia. Punkty A', B', C', D' ukazują, w jakich miejscach na powierzchni zęba koła czynnego następuje zazębienie.

Moment na wałku pompy wynosi [12]:

$$M_w = M_1 + M_2 \quad (3)$$

W tabeli 1 przedstawiono uzyskane wyniki momentu działającego na koło bierne i czynne oraz moment przyłożony do wału badanej pompy.

Korzystając z wyznaczonych wartości momentu, można wyznaczyć naprężenie skręcające wałek [15]:

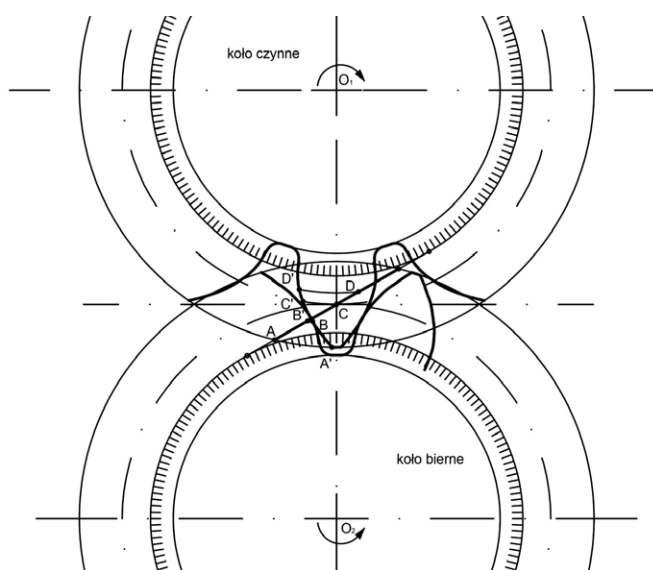
$$\tau_s = \frac{M_w}{W_o} \quad (4)$$

gdzie W_o jest wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie dla wału o średnicy d_w [15]:

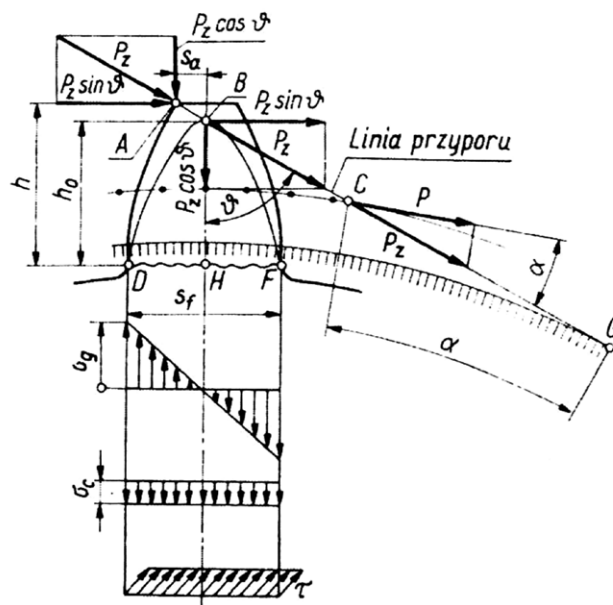
$$W_o = \frac{\pi d_w^3}{16} \quad (5)$$

Tabela 1. Zestawienie wartości momentów na kole czynnym, biernym i wałku napędowym [16]

Opis	Zmienna	Jednostka	Wartość dla punktu styku			
			A	B	C	D
Moment na kole czynnym dla p_{nom}	M_1^{nom}	[Nm]	0,0	45,6	76,3	94,2
Moment na kole czynnym dla p_{max}	M_1^{max}	[Nm]	0,0	52,1	87,2	107,6
Moment na kole biernym dla p_{nom}	M_2^{nom}	[Nm]	114,3	98,8	76,3	53,6
Moment na kole biernym dla p_{max}	M_2^{max}	[Nm]	130,6	112,9	87,2	61,3
Moment na wałku pompy dla p_{nom}	M_w	[Nm]	114,3	144,4	152,6	147,8
Moment na wałku pompy dla p_{max}	M_w	[Nm]	130,6	165,0	174,4	168,9



Rys. 2. Odległości punktów przyporu od środków kół zębatach [16]



Rys. 3. Model wykorzystany do obliczeń wyężenia zęba u podstawy [1]

W celu wyznaczenia wyężenia zęba u podstawy konieczne jest określenie wszystkich składowych naprężeń w przekroju niebezpiecznym. Ząb można traktować jako jednostronnie utwierdzoną belkę, a przekrojem niebezpiecznym jest najwęższy przekrój w rejonie utwierdzenia, a więc w obszarze stopy zęba. Obciążenie można rozłożyć na dwie składowe, prostopadłą i równoległą do osi zęba, które generują zginanie, ściskanie i ścinanie zęba. Na rysunku 3 przedstawiono model działania sił wraz ze stosownymi oznaczeniami.

Z powyższego rysunku można wyznaczyć sumę momentów zginających ząb u podstawy [1]:

$$M_g = P_z h \sin(\vartheta) + P_z s_a \cos(\vartheta) \quad (6)$$

gdzie:

- p_z – jest siłą działającą wzdłuż linii przyporu na ząb;
- ϑ – kąt pomiędzy linią przyporu a symetralną zęba;
- h – ramię momentu zginającego;
- s_a – połowa grubości zęba w punkcie przyłożenia siły;
- e – odległością punktu styku od osi koła.

Siłą działającą wzdłuż linii przyporu na koło czynne obliczono wg wzoru:

$$P_z = \frac{M_2}{r_b} \quad (7)$$

gdzie r_b jest promieniem koła zasadniczego i wynosi:

$$r_b = r_t \cos(\alpha_t) \quad (8)$$

Wyznaczając wartości działającego momentu gnącego na podstawę zęba, możemy wyznaczyć wartość naprężenia gnącego zgodnie z poniższą zależnością [1]:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_g} \quad (9)$$

Znając szerokość wieńca koła zębatego b oraz grubość zęba u podstawy s_f , można obliczyć wskaźnik wytrzymałości na zginanie[1]:

$$W_g = \frac{bs_f^2}{6} \quad (10)$$

gdzie:

b – jest szerokością wieńca;

s_f – grubość zęba w rozpatrywanym przekroju.

Naprężenia ściskające σ_c i naprężenie ścinające τ wyznaczono zgodnie z zależnościami [1]:

$$\sigma_c = \frac{P_z \cos(\vartheta)}{bs_f} \quad (11)$$

$$\tau = \frac{P_z \cos(\alpha)}{bs_f} \quad (12)$$

Naprężenie zredukowane wg Hubera obliczono ze wzoru [1]:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_g - \sigma_c)^2 + 3\tau^2} \quad (13)$$

Jak wspomniano we wstępie, poza wytrzymałością zęba u podstawy istotną rolę pełnią naprężenia stykowe na powierzchni czynnej zęba. Wartości maksymalnych naprężeń stykowych można wyznaczyć na podstawie wzorów Hertza [1]:

$$\sigma_{Hmax}^2 = \frac{2P_z}{\frac{1}{2}b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) \cdot \frac{1}{2\pi(1 - \nu^2)} \quad (14)$$

Uwzględniając fakt, że zarówno koło czynne, jak i bierne wykonane jest z tego samego materiału, można uprościć wzór do następującej postaci:

$$\sigma_{Hmax}^2 = \frac{P_z E}{2\pi b(1 - \nu^2)} * \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) \quad (15)$$

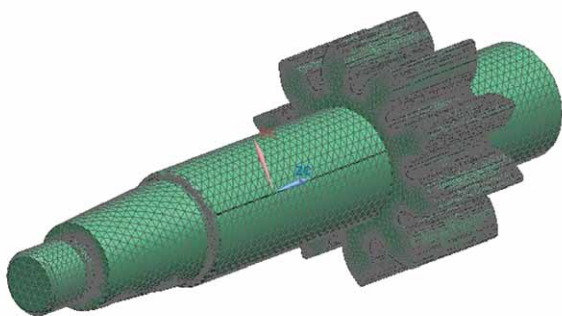
gdzie ϱ_1, ϱ_2 są promieniami krzywizny stykających się powierzchni i dla zębów kół zębatach wynoszą:

$$\varrho_1 = e_1 \sin(\beta_1) \quad (16)$$

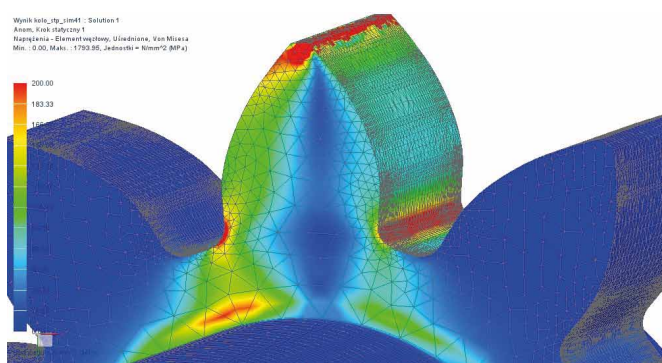
$$\varrho_2 = e_2 \sin(\beta_2) \quad (17)$$

3. Obliczenia numeryczne

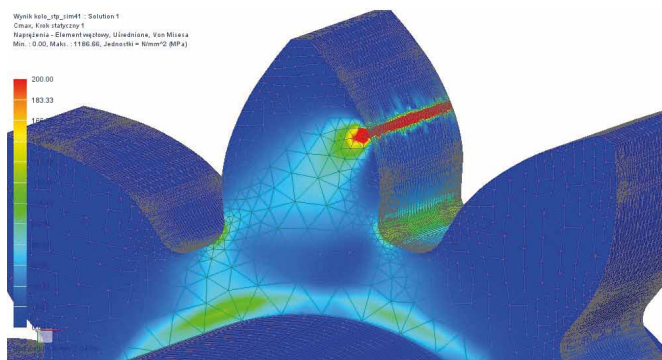
Obliczenia numeryczne przeprowadzono, wykorzystując dyskretny model koła zębatego powstały poprzez nałożenie siatki typu TETRA10 o wielkości 2 mm na uprzednio zbudowany trójwymiarowy model geometryczny koła czynnego. Siatkę zagęszczono przy zakrzywionych krawędziach.



Rys. 4. Dyskretny model analizowanego koła zębatego



Rys. 5. Rozkład naprężeń zredukowanych u podstawy zęba i w miejscu przyłożenia siły dla punktu A dla ciśnienia nominalnego



Rys. 6. Rozkład naprężeń zredukowanych u podstawy zęba i w miejscu przyłożenia siły dla punktu C dla ciśnienia maksymalnego

Powierzchnia stożkowa wału została unieruchomiona wzdłuż osi Z oraz wokół osi Z. Powierzchnie walcowe wału zostały unieruchomione wzdłuż osi X i Y oraz wokół osi X i Y (wał nie ulega zginaniu). Siły przyłożono do czterech różnych krawędzi pod różnym kątem. Dla każdego punktu zazębienia rozpatrzono po dwie wartości siły, odpowiednio dla ciśnienia nominalnego oraz maksymalnego [16].

Obciążenie zęba zostało zrealizowane poprzez przyłożenie siły do krawędzi odpowiadającej linii styku. Wartość i kierunek siły P_z zostały przyjęte zgodnie z obliczeniami analitycznymi (zależność (2.5)). Rozkłady naprężeń przedstawiono dla dwóch

przypadków: siła przyłożona w punkcie A dla ciśnienia nominalnego (rys. 5) oraz siła przyłożona w punkcie C dla ciśnienia maksymalnego (rys. 6). W obu przedstawionych przypadkach zgodnie z oczekiwaniami obserwujemy koncentrację naprężeń w obszarze przyłożenia siły, który odpowiada za styk współpracujących zębów, oraz w rejonie stopy, w największym przekroju w rejonie stopy zęba.

4. Zestawienie wyników

W tabelach 2, 3 i 4 przedstawiono wyniki obliczeń otrzymane zarówno metodą analityczną, jak i numeryczną. Obliczenia wykonano dla tych samych punktów zazębienia oraz obciążeń, tak aby można było dokonać ich porównania. W celu ilościowego ich porównania określono dwa następujące parametry:

Błąd bezwzględny:

$$\Delta x = |x_n - x_a| \quad (18)$$

Błąd względny:

$$\delta x = \frac{|x_n - x_a|}{x_a} \quad (19)$$

gdzie:

x_a – jest wielkością wyznaczoną metodą analityczną;

x_n – wielkością wyznaczoną metodą numeryczną.

5. Podsumowanie i wnioski

Uzyskane wyniki dają zadowalającą zbieżność wyników ze sprawdzonymi w praktyce metodami analitycznymi. Największy błąd uzyskujemy dla naprężeń stykowych i dochodzi on niemal do 40%, jednakże biorąc pod uwagę metodę obciążenia zęba w tylko jednej linii węzłów, błąd ten jest dopuszczalny. Jeżeli byłaby konieczność określenia z większą dokładnością naprężeń stykowych, konieczne byłoby przyjęcie modelu bardziej zbliżonego do warunków rzeczywistych, w którym obszar styku składałby się z kilku węzłów w przekroju czołowym, a wywierany nacisk byłby zamodelowany jako kontakt z zębem koła współpracującego.

Naprężenia zginające oraz skręcające dają zdecydowanie lepszą zbieżność z obliczeniami analitycznymi, ze względu na fakt, iż nie są one bezpośrednio poddane wpływowi uproszczeń przyjętych w sposobie obciążenia zęba. Główną przewagą stosowania metody numerycznej w obliczeniach wytrzymałościowych jest możliwość uzyskania mapy rozkładu naprężeń w całej objętości modelu koła zębatego, a nie jak w przypadku metod analitycznych dla rozpatrywanego przekroju. Szczegółowa analiza rozkładu naprężeń pozwala na wykrycie obszarów, w których dochodzi do spiętrzeń naprężeń, bezpośrednio wpływających na trwałość zmęczeniową elementu.

Literatura

- [1] OCHĘDUSZKO K.: *Koła zębate. Tom I. Konstrukcja*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2009.

Tabela 2. Porównanie wartości naprężeń zredukowanych [16]

	A		B		C		D		Jedn.
	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	
σ_{red}^a	139,4	159,3	88,0	100,6	54,2	62,0	34,2	39,0	MPa
σ_{red}^n	158,2	180,8	90,8	103,8	48,0	54,9	26,3	30,1	MPa
$\Delta\sigma_{red}$	18,8	21,5	2,8	3,2	6,2	7,1	7,9	9,0	MPa
$\delta\sigma_{red}$	13,5	13,5	3,2	3,2	11,5	11,5	23,0	23,0	%

Tabela 3. Porównanie wartości naprężeń skręcających [16]


	A		B		C		D		Jedn.
	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	
τ^a	37,2	42,6	47,1	53,8	49,8	56,9	48,2	55,1	MPa
τ^n	39,3	44,9	48,4	55,4	50,6	57,8	48,7	55,7	MPa
$\Delta\tau$	2,1	2,4	1,4	1,6	0,8	0,9	0,5	0,6	MPa
$\delta\tau$	5,6	5,6	2,9	2,9	1,6	1,6	1,1	1,1	%

Tabela 4. Porównanie wartości naprężeń stykowych [16]

	A		B		C		D		Jedn.
	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	p_{nom}	p_{max}	
σ_{Hmax}^a	1697	1814	1231	1316	1027	1098	887	948	MPa
σ_{Hmax}^n	1794	2050	1350	1543	1038	1187	542	620	MPa
$\Delta\sigma_{Hmax}$	97	236	119	227	11	90	345	328	MPa
$\delta\sigma_{Hmax}$	5,7	13,0	9,7	17,3	1,1	8,1	38,9	34,6	%

- [2] OSIŃSKI Z.: *Podstawy konstrukcji maszyn*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [3] DZIAMA A.: *Przekładnie zębate*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- [4] JACYNO Cz.: *Podstawy konstrukcji maszyn. Cz. 6a. Przekładnie zębate. Podstawy geometrii ząbów i obliczeń wytrzymałościowych*. Politechnika Szczecińska, Szczecin 1980.
- [5] NADOLNY K.: *Tribologia kół zębatych: zagadnienia trwałości i niezawodności*. Instytut Technologii Eksploatacji, Radom 1999.
- [6] MAZIARZ M.: *Obliczenia wytrzymałościowe przekładni zębatych, walcowych i stożkowych*. Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1994.

- [7] JAŚKIEWICZ Z.: *Przekładnie walcowe. Tom I. Geometria – wytrzymałość – dokładność wykonania*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1992.
- [8] MÜLLER L.: *Przekładnie zębate: obliczenia wytrzymałościowe*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [9] STRYCZEK S.: *Napęd hydrostatyczny. Tom I. Elementy*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1990.
- [10] STRYCZEK J.: *Koła zębate maszyn hydraulicznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007.
- [11] KOLLEK W.: *Podstawowe zagadnienia teorii napędów hydraulicznych*. SITMP, Wrocław 1979.
- [12] KOLLEK W.: *Pompy zębate, konstrukcja i eksploatacja*. Ossolineum, Wrocław 1996.
- [13] OSIŃSKI P.: *Wysokociśnieniowe i niskopulsacyjne pompy zębate o ząbieniu zewnętrznym*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2013.
- [14] JUDIN E.M.: *Pompy zębate. Główne parametry i ich obliczanie*. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1958.
- [15] FISCHER U. i in.: *Poradnik mechanika*. REA, Warszawa 2008.
- [16] KLUCZNIK A.: *Analityczne i numeryczne obliczenia wytrzymałościowe kół zębatych stosowanych w pompach o ząbieniu zewnętrznym*. Praca magisterska, Wydział Mechaniczny, Politechnika Wroclawska, Wrocław 2016.

 dr hab. inż. Piotr Osiński – Kierownik Laboratorium. Laboratorium Napędów Hydraulicznych i Wibroakustyki Maszyn. Katedra Eksploatacji Systemów Logistycznych, Systemów Transportowych i Układów Hydraulicznych. Politechnika Wroclawska

mgr inż. Paweł Bury – Pracownik dydaktyczno-naukowy, asystent. Katedra Eksploatacji Systemów Logistycznych, Systemów Transportowych i Układów Hydraulicznych. Politechnika Wroclawska.

inż. Artur Klucznik – absolwent studiów inżynierskich Politechniki Wrocławskiej, dyplomant na studiach magisterskich.

artykuł recenzowany