ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLII (2006)

Tomasz Szarek (Katowice)

O wymiarze wykresu funkcji nigdzie nieróżniczkowalnej

Kiedy w Ostenfolde (Westfalia) na świat przychodził Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31 października 1815 roku), liczne grono znamienitych matematyków tego okresu trwało w głębokim przekonaniu, że każda funkcja ciągła ma pochodną w znaczącym podzbiorze swojej dziedziny. Jeden spośród nich, A. M. Ampère[1], próbował nawet uzasadnić powyższe przekonanie. Trudno mówić o precyzyjnym dowodzie, choćby i z tego powodu, że to dopiero Weierstrass ustalił standardy ścisłości, do których jesteśmy przywyczajeni w dzisiejszej matematyce.

18 lipca 1872 r. w swoim wykładzie w Akademii Berlińskiej Karl Weierstrass, ku osłupieniu słuchaczy, przedstawił przykład funkcji rzeczywistej, która jest ciągła w każdym punkcie, w żadnym natomiast punkcie nie istnieje jej pochodna. Ma ona następującą postać:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$, b jest dowolną liczbą nieparzystą taką, że

$$ab > 1 + 3\pi/2.$$

W czasie wykładu Weierstrass przyznał, że słyszał od uczniów Riemanna, że już ich Mistrz sugerował istnienie kontrprzykładu do twierdzenia Ampère'a, to znaczy twierdzenia, które wyrazić można w następujący sposób: *każda funkcja ciągła jest różniczkowalna poza kilkoma izolowanymi punktami.* Niestety kontrprzykład ten nie został opublikowany i jedyna wiedza na jego temat pochodzi właśnie od Weierstrassa. Z kolei funkcja Weierstrassa była pierwszym opublikowanym przykładem funkcji ciągłej ni-

[1] A. M. Ampère, *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui condusent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque* J. École Polytech. **6** (1806), No. 13, 148–181.

gdzie nieróżniczkowalnej, nawiasem mówiąc opublikowanym nie przez Weierstrassa, jak moglibyśmy się domyślać, ale przez profesora Uniwersytetu w Heidelbergu Paula du Bois-Reymonda[2]. Złożoną do druku pracę du Bois-Reymonda recenzował Weierstrass, który w liście do jej autora, 23 listopada 1873 r., zwrócił uwagę, że wynik nie jest nowy i był już prawdopodobnie dobrze znany Riemannowi. Pomimo to Redakcja zdecydowała się opublikować pracę Reymonda, który zresztą – oddajmy mu sprawiedliwość – pomieścił w poprawionej wersji komentarze znamienitego recenzenta.

Z czasem okazało się, że pierwszeństwo, jeśli chodzi o konstrukcję funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie ma pochodnej, przysługuje jeszcze komu innemu. Wydaje się, że najwcześniej, bo już w roku 1830, taki przykład podał czeski matematyk Bernard Bolzano. Fakt ten odkryto jednak bardzo późno, a mianowicie w latach 20-tych XX wieku. Zresztą w roku 1860, a więc jeszcze przed wykładem Weierstrassa w Akademii Berlińskiej, inny, podobny przykład podał szwajcarski matematyk Charles Cellérier, opublikowano go jednak już po jego śmierci, w roku 1890.

Własnościom funkcji Weierstrassa poświęcona jest praca G. Hardy'ego z roku 1916[3]. Dowodzi się w niej, że jeżeli $0 < a < 1$ oraz $ab > 1$, to funkcja Weierstrassa $W(x)$ w żadnym punkcie nie ma pochodnej ograniczonej. Oczywiście, jeżeli $ab < 1$, to $W(x)$ jest różniczkowalna. Ostatnio M. Hata pokazał, że jeżeli $ab \geqslant 5,603\cdots$, to funkcja Weierstrassa nie ma nawet pochodnej nieskończonej[4].

Co to jest wymiar? Zbiory na płaszczyźnie takie jak punkt, linia prosta czy wnętrze kwadratu nie przedstawiają trudności dla naszej wyobraźni. Chcielibyśmy, aby miały wymiar równy odpowiednio: zero, jeden i dwa. Przyjmując nową definicję wymiaru pragnęlibyśmy zagwarantować, że spełnione będą cztery następujące własności:

(1) Dla zbioru jednopunktowego $\{p\}$, $\dim\{p\} = 0$, zaś dla przedziału jednostkowego I, $\dim I = 1$.

(2) Jeżeli $X \subset Y$, to

$$\dim X \leqslant \dim Y.$$

(3) Jeżeli $\{X_j\}$ jest przeliczalną rodziną domkniętych podzbiorów $\mathbb{R}^n$,

---

[2] P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, J. Reine Angew. Math. **79** (1875), 21–37.

[3] G. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301–325.

[4] M. Hata, *Singularities of Weierstrass type functions*, Journal d'Analyse Mathématique, **51** (1988), 62–90.

to

$$\dim\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right) = \sup_{j\geqslant 1} \dim X_j.$$

(4) Dla każdego odwzorowania Φ z pewnej podrodziny homeomorfizmów z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\dim(\Phi(X)) = \dim X.$$

Jeżeli w warunku (4) przyjmiemy, że ta podrodzina homeomorfizmów to po prostu rodzina wszystkich homeomorfizmów z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, dostaniemy definicję wymiaru, który będzie *topologicznie niezmienniczy*. Nie jest wcale łatwo pokazać, że punkty (1)–(4) są niesprzeczne. Urysohn skonstruował topologicznie niezmienniczy wymiar, który spełnia powyższe cztery warunki przyjmując przy tym wartości całkowite. Dla wymiaru tego, zwanego *wymiarem topologicznym*, zwyczajowo przyjmuje się oznaczenie $\dim_T$. Jego idea opiera się na uogólnieniu postulatu żądającego, by wymiar kuli w przestrzeni 3–wymiarowej był 3, a z kolei wymiar jej brzegu, a więc sfery, wynosił 2. W definicji wymiaru topologicznego przechodzimy bowiem indukcyjnie z wymiaru brzegu danego zbioru do wymiaru samego zbioru. Więcej szczegółów na temat wymiaru topologicznego odnaleźć można w klasycznej już monografii Hurewicza i Wallmana[5]. Między innymi możemy się tam zapoznać z niezwykle pasjonującymi próbami uogólniania dostępnych każdemu intuicji długości, powierzchni czy objętości zbioru na już nieintuicyjne, bardzo skomplikowane podzbiory przestrzeni euklidesowych. Wymieńmy w tym miejscu nazwiska największych, którzy mierzyli się z tym problemem: Borel zainicjował badania w tym kierunku, zachęcał zresztą Lebesgue'a do pracy nad teorią miary i całki na początku XX wieku; Carathéodory uogólnił idee lebesgue'owskie rozważając miary s-wymiarowe w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$; Hausdorff zauważył, że s ma sens również wtedy, gdy przyjmuje wartość ułamkową. Stąd już tylko krok do definicji wymiaru Hausdorffa.

Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Dla $\alpha > 0$ i $\varepsilon > 0$ definiujemy miarę zewnętrzną zbioru A wzorem

$$\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A) = \inf \sum_i |A_i|^\alpha,$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich rodzinach zbiorów A_i takich, że $A \subset \bigcup A_i$, oraz $|A_i| < \varepsilon$, gdzie $|\cdot|$ oznacza średnicę zbioru A. α-wymiarową miarę Hausdorffa zbioru A definiujemy następującym wzorem

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A).$$

Wymiarem Hausdorffa zbioru A nazywamy wartość

$$\dim_H A = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}.$$

[5] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948.

Warto zauważyć, że wymiar Hausdorffa spełnia warunki (1)–(4), przy czym jest on niezmienniczy ze względu na wszystkie transformacje lipschitzowskie takie, że transformacje do nich odwrotne są również lipschitzowskie (tzw. transformacje bi-lipschitzowskie).

Niepodobna nie wspomnieć, że niektórzy nazywają *fraktalem* każdy taki zbiór, którego wymiar topologiczny jest ostro mniejszy od wymiaru Hausdorffa.

Blisko związany z wymiarem Hausdorffa jest tak zwany wymiar Minkowskiego, który definiujemy w następujący sposób: górny i dolny wymiar Minkowskiego zbioru A określamy odpowiednio

$$\overline{\dim}_M A = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}$$

oraz

$$\underline{\dim}_M A = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon},$$

gdzie $N_\varepsilon(A)$ oznacza najmniejszą liczbę kul o promieniu ε potrzebnych do pokrycia zbioru A. Jeżeli $\overline{\dim}_M A = \underline{\dim}_M A$, to wspólną wartość nazywamy wymiarem Minkowskiego zbioru A i oznaczamy $\dim_M A$. Spełnione są następujące nierówności:

TWIERDZENIE 1. *Dla każdego zbioru A mamy*

$$\dim_T A \leqslant \dim_H A \leqslant \underline{\dim}_M A.$$[6]

O wymiarze wykresu funkcji Weierstrassa. W tej części rozważań zajmować się będziemy wymiarem wykresu funkcji. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ symbolem G_f oznaczać będziemy jej wykres, to znaczy zbiór $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Dwa następujące twierdzenia podają oszacowania górne i dolne dla wymiaru Minkowskiego. Przypomnijmy, że funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać *funkcją β-hölderowską*, jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, iż

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\beta$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 2. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją β-hölderowską dla $\beta \in (0, 1]$. Wówczas $\overline{\dim}_M G_f \leqslant 2 - \beta$.*

[6] Pierwsza z tych nierówności to tak zwane twierdzenie Szpilrajna z roku 1937. Ostatnio A. Lasota zaproponował badanie innego wymiaru, tzw. *wymiaru koncentrującego* albo *Lévy'ego*. Można pokazać, że jest on niemniejszy niż wymiar topologiczny i niewiększy od wymiaru Hausdorffa. Zob. J. Myjak, T. Szarek, *Szpilrajn type theorem for concentration dimensions*, Fund. Math. **172** (2002) 19–25.

Oszacowanie dolne dla dolnego wymiaru Minkowskiego wymaga nałożenia dodatkowych założeń na funkcję. Otóż będziemy mówili, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *odwrotnie β-hölderowska*, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że dla każdego przedziału $[t, s]$ istnieje podprzedział $[t_1, s_1]$ i spełniony jest warunek $|f(t_1) - f(s_1)| \geqslant c|t - s|^\beta$.

TWIERDZENIE 3. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotnie β–hölderowską. Wówczas* $\underline{\dim}_M G_f \geqslant 2 - \beta$.

W cytowanej uprzednio pracy G. Hardy dowodzi, że jeżeli $ab > 1$, to wówczas funkcja Weierstrassa $W(x)$ jest β–hölderowska i odwrotnie β-hölderowska dla

$$\beta = \frac{-\log a}{\log b}.$$

Wobec tego wnioskiem z Twierdzeń 2 i 3 jest następujący fakt:

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli $ab > 1$, to*

$$\dim_M G_W = 2 + \frac{\log a}{\log b}.$$

Dla wymiaru Hausdorffa sytuacja nie jest taka prosta. W zasadzie nie dysponujemy narzędziami, które pozwalają szacować wymiar Hausdorffa od dołu. Jedyne jakie posiadamy, to tak zwany *lemat Frostmana*[7]. Oczywiście z Twierdzeń 1 i 4 natychmiast otrzymujemy oszacowanie górne dla wymiaru Hausdorffa:

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli $ab > 1$, to*

$$\dim_H G_W \leqslant 2 + \frac{\log a}{\log b}.$$

Problem oszacowania dolnego pozostaje w zasadzie otwarty. Wyniki, które w tym zakresie istnieją, z pewnością mają charakter częściowy i nie w pełni zadowalający. I tak D. Mauldin i S. Williams wykazali[8], że jeżeli $ab > 1$, to

$$\dim_H G_W = 2 + \frac{\log a}{\log b} + O\left(\frac{1}{\log b}\right).$$

Niedawno F. Przytycki i M. Urbański dowiedli[9], że w przypadku, gdy $ab > 1$, wykres funkcji Weierstrassa jest fraktalem, to znaczy

$$\dim_H G_W > 1.$$

---

[7] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.

[8] R. D. Mauldin, S. C. Wiliams, *On the Hausdorff dimension of some graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., **298** (1986), 793-803.

[10] F. Przytycki, M. Urbański, *On the Hausdorff dimension of some fractal sets*, Studia Math., **93** (1989), 155–186.

Hipoteza mówiąca, że

$$\dim_H G_W = 2 + \frac{\log a}{\log b}.$$

wciąż czeka na pogromcę.

Tomasz Szarek
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
Bankowa 14
40–007 Katowice
e-mail: szarek@intertele.pl