

Estymacja parametrów mierzandru dla danych z rozkładów niesymetrycznych metodą maksymalizacji wielomianu (PMM)

Zygmunt Lech Warszawa

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Serhii Zabolotnii

Czerkasy State Technological University, Ukraina

Streszczenie: Przedstawiono sposób wyznaczania estymatorów wartości i niepewności mierzandru niekonwencjonalną metodą maksymalizacji wielomianu stochastycznego (PMM) dla próbki danych pomiarowych pobranych z populacji modelowanej zmienną losową o rozkładzie niesymetrycznym. W metodzie PMM stosuje się statystykę wyższego rzędu i opis z użyciem momentów lub kumulantów. Wyznaczono wyrażenia analityczne dla estymatorów wartości i niepewności standardowej typu A mierzandru za pomocą wielomianu stopnia $r = 2$. Niepewność standardowa wartości mierzandru otrzymana metodą PMM zależy od skośności i kurtozy rozkładu. Jest ona mniejsza od średniej arytmetycznej wyznaczanej wg przewodnika GUM i bliższa wartości teoretycznej dla rozkładu populacji danych. Jeśli rozkład ten jest nieznan, to estymatory momentów i kumulantów wyznacza się z danych pomiarowych próbki. Sprawdzono skuteczność metody PMM dla kilku podstawowych rozkładów.

Słowa kluczowe: estymator, rozkład niesymetryczny, wielomian stochastyczny, wartość średnia, wariancja, skośność i kurtoza

1. Wprowadzenie

Proces wyznaczania rezultatu pomiarów obejmuje statystyczne szacowanie wartości i rozszerzonej niepewności mierzandru. Ocenia się je na podstawie próbki zawierającej dane obserwacji pomiarowych pobrane z ich populacji o losowym rozrzucie wartości. Rozrzut ten można modelować określonym rozkładem prawdopodobieństwa. W większości stosuje się jednomodalne rozkłady symetryczne, w tym głównie rozkład normalny (Gausa) oraz rozkłady: równomierny, trójkątny, trapezowe, Laplace i inne [1]. W przewodniku GUM [2], traktowanym jak norma międzynarodowa, zaleca się by rozrzut danych pomiarowych opisywać niepewnością typu A wyniku pomiaru i szacować ją identycznie, jak dla rozkładu normalnego. Sposób ten jest jednak niepoprawny przy konieczności modelowania rozrzutu danych pomiarowych rozkładami niegaussowskimi. Z identyfikacji i analizy danych pomiarowych występujących

w praktyce pomiarowej wynika, że w niektórych przypadkach trzeba też stosować rozkłady niesymetryczne wskutek występowania asymetrycznych błędów przypadkowych [3–6]. Powstają one przy nieliniowym równaniu pomiaru, skorelowaniu torów pomiarowych oraz istnieniu zarówno stałych jak i zmieniających się deterministycznie w trakcie pomiarów niezidentyfikowanych, a więc i nieusuniętych błędów systematycznych.

Jedną z ostatnio proponowanych zmian w zaleceniach GUM jest stosowanie podejścia Bayesa [7, 8] wraz z metodą największej wiarygodności. Do prawidłowego doboru metody pomiaru oraz obliczenia niepewności pomiarów niezbędna jest wstępna identyfikacja i przybliżenie rozrzutu danych odpowiednim dla danego zadania pomiarowego rozkładem prawdopodobieństwa [9]. Realizuje się to zarówno metodami analitycznymi [10], jak i przy pomocy modelowania statystycznego metodą Monte Carlo [2, Supl. 1], [15]. Podejście Bayesa wymaga jednak informacji *a priori* o funkcji rozkładu danych pomiarowych. Cechuje je także potencjalnie wysoki stopień złożoności przy analizie parametrów. W pracy [11] i w monografii [24 rozdz. 9] przedstawiono podejście alternatywne, które nie wymaga identyfikacji rozkładu. Polegała ona na rozmnożeniu danych próbki pomiarowej metodą *bootstrap* i sprawdzeniu, który ze zbioru jedno- i kilkuelementowych estymatorów ma dla tych danych najmniejszą wariancję.

Poniżej omawia się inne podejście alternatywne o nazwie Metoda Maksymalizacji Wielomianu i akronimie PMM utworzonym od angielskiej wersji tej nazwy. Metodę tę zaproponował Kunchenko [15, 16]. Umożliwia ona tworzenie modeli

Autor korespondujący:

Zygmunt L. Warszawa, zlw@op.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 26.09.2017 r., przyjęty do druku 02.11.2017 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

opartych na statystyce wyższego rzędu dla różnych funkcji zmiennych losowych. Wzory stają się prostsze, gdy w opisie używa się kumulantów, które łatwo wyznacza się numerycznie za pośrednictwem momentów. Metodę PMM można stosować jako narzędzie matematyczne do przetwarzania danych statystycznych w takich dziedzinach jak: rozpoznawanie obrazów funkcji [17], identyfikacja punktu wystąpienia zmian statystycznych parametrów sygnału (ang. *change point*) [18, 19], wykrywanie i estymacja parametrów sygnałów na tle niegaussowskich zakłóceń [20] oraz wielu innych. Autorzy badają możliwości zastosowania metody PMM w metrologii i technice pomiarowej, w tym do wyznaczania ocen wartości i niepewności pomiarów. Badania te wykazały już, że metoda ta (w połączeniu z opracowaniem modeli probabilistycznych opartych na statystyce wyższych rzędów i ich opisem przez momenty i kumulanty) ma szereg zalet. Upraszcza się proces syntezy i można równocześnie uwzględnić probabilistyczne właściwości kilku parametrów. Poprawia się szacowanie dokładności pomiarów, gdyż wariancje estymowanych parametrów są wówczas mniejsze. Mniejsze też jest prawdopodobieństwo błędnych decyzji.

Opis różnych rozkładów prawdopodobieństwa przez kumulanty wykorzystuje się dotąd bardzo rzadko w praktyce pomiarowej. Jest on mniej znany niż z użyciem momentów rozkładu, mimo że wzory używane w analizie zmiennych losowych są prostsze. Na przykład rozkład normalny ma nieskończenie wiele momentów parzystych, zaś wszystkie jego kumulanty rzędu $r > 2$ są równe zero. Omówimy krótko podstawowe właściwości kumulantów.

Kumulanty są współczynnikami rozwinięcia w szereg Taylora-MacLaurina logarytmu charakterystycznej funkcji $f_{\xi}(u)$ zmiennej losowej ξ [21]. Opisują to wzory:

$$\kappa_r = j^{-r} \left[\frac{d^r \ln f_{\xi}(u)}{du^r} \right]_{u=0}, \quad f_{\xi}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) e^{jux} dx$$

gdzie: κ_r – kumulant rzędu r , $p_{\xi}(x)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa (PDF).

W analizie statystycznej używa się też bezwymiarowych współczynników kumulantów $\gamma_r = \kappa_r \kappa_2^{-r/2}$. Najbardziej znane są: współczynnik kumulanta asymetrii γ_3 oraz współczynnik kumulanta kurtozy γ_4 . Zalety użycia kumulantów [21] są następujące:

- są to odrębne parametry statystyczne rozkładów zmiennej losowej, alternatywne do momentów i w pewnym stopniu niezależne od siebie;
- kumulanty wyznacza się bardzo prosto z momentów próbki (tabela 1 kolumna lewa);
- pewną liczbą kumulantów wyższego rzędu (lub ich współczynnikami) można scharakteryzować w prosty sposób stopień niegaussowskości zmiennej losowej;
- bardzo ważną właściwością kumulantów jest ich niezależność (inwariantność) na przesunięcie argumentu i zmiany skali zmiennych losowych (tab.1 kolumna prawa),

– właściwość addytywności, tj. kumulant i -tego rzędu dla sumy niezależnych statystycznie zmiennych losowych jest sumą kumulantów wszystkich składowych tego rzędu.

Przykładem zastosowania tego opisu właściwości zmiennej losowej w metrologii jest zaproponowana w [12] metoda kurtozy do wyznaczania błędów pomiaru sumy zmiennych losowych o różnych rozkładach. Jednak zakres stosowania algorytmu tej metody ogranicza się do składowych losowych opisywanych symetrycznymi rozkładami PDF (funkcja gęstości prawdopodobieństwa), a jej analityczno-graficzny sposób realizacji jest trudny do automatyzacji.

W pracy [13], za pomocą kumulantów wykonano analizę modeli układów pomiarowych z addytywnymi i multiplikatywnymi błędami przypadkowymi w torach przetwarzania sygnałów. Zaś w [14] zbadano szczegółowo rolę współczynnika kumulanta rzędu 4 (kurtozy) jako istotnego parametru rozkładów symetrycznych. Zależności pierwszych czterech kumulantów próbki od jej momentów początkowych oraz podstawowe operacje na kumulantach podano w tabeli 1. Wzory dla κ_2 i następujących upraszczają się jeśli $\alpha_1 = 0$, czyli gdy wyraża się je przez momenty centralne próbki.

2. Cel badań i matematyczny model pomiarów

Zastosowanie metody maksymalizacji wielomianu stochastycznego PMM jako niekonwencjonalnego narzędzia matematycznego do wyznaczania parametrów wyniku pomiarów wielokrotnych o wartościach danych pobranych losowo z rozkładu symetrycznego autorzy omówili w [23]. Poniżej przedstawiamy zastosowanie metody PMM dla próbek danych pomiarowych z rozkładów asymetrycznych. Celem tej pracy jest:

- zastosowanie metody maksymalizacji wielomianu (o angielskim akronimie PMM) do syntezy algorytmów estymacji parametrów mierzandów dla modeli rozkładu błędów asymetrycznych opisanych kumulantami,
- analiza teoretyczna dokładności estymatorów parametrów wielomianu,
- zbadanie skuteczności powyższych algorytmów modelowania statystycznego.

Rozpatrywać będziemy pomiary stałej wartości oczekiwanej θ pojedynczej wielkości mierzonej jako szczególny przypadek instrumentalnego badania mierzandów. Wynik pomiaru wyznacza się na podstawie szeregu powtórzonych obserwacji pomiarowych tej wielkości, lub zależnego od niej sygnału ξ . Wskutek wielu różnych oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych oraz niedoskonałości instrumentarium (przrzędy, system pomiarowy) wartości pozyskanych obserwacji, czyli surowe dane pomiarowe podlegają rozrzutowi. Są one obciążone występowaniem niepożądanymi składowymi, tj. błędami pomiarowymi o charakterze zdeterminowanym (błędy systematyczne o wartościach: stałych i zmiennych, dryft oraz zakłócenia oscylacyjne) oraz losowym

Tabela 1. Wzory łączące kumulanty i momenty początkowe oraz podstawowe właściwości kumulantów

Table 1. Patterns connecting cumulants and initial moments and basic properties of cumulants

Wyznaczanie kumulantów z momentów początkowych	Podstawowe właściwości kumulantów	
$\kappa_1 = \alpha_1$	równoważność	$\kappa_1(X+c) = \kappa_1(X) + c$
$\kappa_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	inwariantność	$\kappa_i(X+c) = \kappa_i(X), \quad i \geq 2$
$\kappa_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3$	jednorodność	$\kappa_i(c^i X) = c^i \kappa_i(X)$
$\kappa_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_1^2 - 6\alpha_1^4$	addytywność	$\kappa_i(X+Y) = \kappa_i(X) + \kappa_i(Y)$

(błędy przypadkowe, outliers). Surowe dane należy oczyścić z błędów systematycznych o wartościach znanych *a priori*, lub wykrytych w procesie pomiarowym [24 rozdz.2]. Dane pomiarowe koryguje się poprzez poprawki, a wpływy o nieznanach wartościach, ale o przewidywanych zakresach ich zmian, randomizuje i opisuje się niepewnością typu B [2].

Ze skorygowanych eksperymentalnych danych próbki, jako wynik pomiarów wyznacza się metodami statystycznymi estymator wartości mierzanej θ oraz rozkład niepewności typu A i jej wartość standardową u_A . Niepewność rozszerzoną U , czyli przedział, w którym może znajdować się wynik pomiarów z określonym prawdopodobieństwem P , otrzymuje się bądź ze splotu rozkładów niepewności typu A i B wyznaczony metodą Monte Carlo (MC) [2 Supl.1], bądź z geometrycznej sumy ich niepewności standardowych

$$U = k_p \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

k_p – współczynnik rozszerzenia zależny od rozkładu splotu i P .

Dalszy tekst dotyczy zastosowania statystycznej metody wielomianowej PMM do wyznaczania wartości i niepewności wyniku pomiarów. Zbiór uzyskanych i skorygowanych przez poprawki wartości obserwacji pomiarowych stanowi próbkę danych $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ pobranych z populacji generalnej jako zbioru wszystkich możliwych ich wartości. Populacja ta składa się z niezależnych i jednolicie rozproszonych losowo elementów opisanych modelem $\xi = \theta + \eta$. W pomiarach $\theta = const$ jest wartością mierzoną, a η – dowolnie rozłożoną, w tym i asymetrycznie, zmienną losową opisującą właściwości probabilistyczne przypadkowych błędów pomiaru w postaci rozkładu prawdopodobieństwa, bądź przez sekwencję kumulantów i ich współczynników. W takim modelu matematycznym kumulant populacji pierwszego rzędu κ_1 jest wartością mierzoną wraz z przesunięciem o niewyeliminowany błąd systematyczny, kumulant drugiego rzędu κ_2 określa wariancję składowej losowej, a współczynniki kumulantów wyższych rzędów $\gamma_3, \gamma_4, \dots$ opisują stopień odchylenia danego rozkładu od rozkładu Gaussa. Natomiast za pomocą kumulantów obliczonych ze skorygowanych danych pomiarowych próbki wyznacza się wynik pomiaru $\hat{\theta}$ jako estymator wartości mierzanej θ oraz jego niepewność typu A.

3. Metoda maksymalizacji wielomianu (PMM)

Według metody PMM podanej przez Kunchenkę [15], oszacowania czyli estymatory parametrów statystycznych wielkości mierzanej θ wyznacza się rozwiązując równanie stochastyczne [23, 24 rozdz.10]

$$\sum_{i=1}^r h_i(\theta) [\hat{\alpha}_i - \alpha_i(\theta)] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (1)$$

gdzie: r – jest stopniem wielomianu użytego do estymacji parametrów, $\alpha_i(\theta)$, $\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i$ – i -tego rzędu momenty początkowe: teoretyczny, tj. dla populacji oraz dla próbki o n danych pomiarowych.

Współczynniki $h_i(\theta)$ dla $i = \overline{1, r}$ są rozwiązaniami układu algebraicznych równań liniowych rzędu r dla warunków minimalizacji wariancji estymatora θ , tj.:

$$\sum_{i=1}^r h_i(\theta) F_{i,j}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \alpha_j(\theta), \quad j = \overline{1, s} \quad (2)$$

gdzie: $F_{i,j}(\theta) = \alpha_{i+j}(\theta) - \alpha_i(\theta)\alpha_j(\theta)$

Układ równań (2) rozwiązuje się analitycznie metodą Kramera:

$$h_i(\theta) = \frac{\Delta_{ir}}{\Delta_r}, \quad i = \overline{1, r},$$

gdzie: $\Delta_r = \|F_{i,j}\|$; $(i, j = \overline{1, r})$ – wyznacznik główny układu równań (2) o wymiarze r , Δ_{ir} – wyznacznik otrzymany z Δ_r po zastąpieniu i -tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych układu równań (2). $\Delta_r = \|F_{i,j}\|$;

W pracach [15, 16] Kunczenko wykazał, że oceny wielomianowe $\hat{\theta}$ będące rozwiązaniami układu równań stochastycznych o postaci (1) są spójne i asymptotycznie nieobciążone. Do wyznaczenia ocen niepewności pomiaru trzeba określić ilość wydobytej informacji o szacowanej wielkości θ , opisanej ogólnie równaniem

$$J_{r,n(\theta)} = n \sum_{i=1}^r h_i(\theta) \frac{d}{d\theta} \alpha_i(\theta), \quad (3)$$

Sens statystyczny funkcji $J_{r,n(\theta)}$ jest taki sam, jak w klasycznej koncepcji Fischera o ilości informacji. Jeżeli $n \rightarrow \infty$, to jej odwrotność dąży do wariancji estymatora θ , tj.:

$$\sigma_{(\theta)r}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{r,n(\theta)}^{-1}. \quad (4)$$

4. Wielomianowe oszacowania wartości mierzanej

Wyrażenia analityczne staną się prostsze po dokonaniu standaryzacji danych oryginalnej próbki pomiarowej, tj.:

$$x_v \equiv (z_v - \kappa_1) / \sqrt{\kappa_2}, \quad \text{dla } v = \overline{1, n} \quad (5)$$

Otrzymuje się unormowaną próbkę $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Jest ona zbiorem znormalizowanych danych pomiarowych o wartości oczekiwanej takiej, jak estymator wartości parametru θ , ale o wariancji równej 1.

Z podstawowego wzoru (1) dla metody PMM wynika, że przy szacowaniu z użyciem wielomianu stopnia $r = 1$, wartość estymatora $\hat{\theta}$ wielkości θ jest rozwiązaniem równania:

$$h_1(\theta) [\hat{\alpha}_1 - \theta] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad (6)$$

Z postaci wyrażenia (6) wynika, że przy dowolnej wartości czynnika $h_1(\theta) \neq 0$ można je przekształcić w statystykę liniową. Estymator $\hat{\theta}_{(1)}$ parametru θ jest wówczas średnią arytmetyczną:

$$\hat{\theta}_{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \quad (6a)$$

Estymator $\hat{\theta}_{(1)}$ o postaci (6a) jest też oszacowaniem wartości oczekiwanej zmiennej losowej wyznaczanym klasyczną metodą momentów (MM). Estymator o postaci (6a) ma najmniejszą wariancję dla danych pomiarowych próbki tylko wtedy, gdy zmienna losowa ma rozkład Gaussa i ponadto jej pobrane losowo wartości $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nie są skorelowane [1, 24 rozdz. 3].

Jeśli rozkład danych pomiarowych jest inny niż normalny, to do wyznaczenia estymatorów o niepewności mniejszej niż dla wartości średniej należy stosować metody alternatywne. Należy też do nich niekonwencjonalny sposób szacowania estymatorów nieliniowych metodą PMM, która wykorzystuje optymalizację wielomianów stochastycznych.

Według metody PMM z wielomianem stopnia $r = 2$ (i przy unormowaniu danych próbki) estymatorem parametru θ jest rozwiązanie równania:

$$h_1(\theta)[\hat{\alpha}_1 - \theta] + h_2(\theta)[\hat{\alpha}_2 - (\theta^2 + 1)]_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (7)$$

gdzie: $h_1(\theta)$ i $h_2(\theta)$ – współczynniki optymalne.

Współczynniki $h_1(\theta)$ i $h_2(\theta)$ dla $r = 2$ minimalizują wartość poszukiwanego estymatora parametru θ . Znajduje się je rozwiązując układ dwóch równań liniowych o postaci (2)

$$h_1(\theta) + h_2(\theta)[2\theta + \gamma_3] = 1$$

$$h_1(\theta)[2\theta + \gamma_3] + h_2(\theta)[4\theta^2 + 4\theta\gamma_3 + (2 + \gamma_4)] = 2\theta$$

Otrzymuje się wyrażenia:

$$h_1(\theta) = 1 + \frac{2\theta\gamma_3 + \gamma_3^2}{2 - \gamma_3^2 + \gamma_4}, \quad (8a)$$

$$h_2(\theta) = -\frac{\gamma_3}{2 - \gamma_3^2 + \gamma_4} \quad (8b)$$

Po wstawieniu tych współczynników do (1), równanie służące do oszacowania parametru θ przyjmuje postać:

$$\gamma_3\theta^2 - [2\gamma_3\hat{\alpha}_1 - (2 + \gamma_4)]\theta - (2 + \gamma_4)\hat{\alpha}_1 + \gamma_3[\hat{\alpha}_2 - 1]_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (9)$$

Z analizy wyrażenia (9) wynika, że dla rozkładu symetrycznego ($\gamma_3 = 0$), to kwadratowe równanie przekształca się w liniowe o jednym tylko rozwiązaniu, takim samym jak dla równania (6). Jeśli $\gamma_3 \neq 0$, to równanie (9) ma dwa pierwiastki:

$$\hat{\theta}_{(2)1,2} = \hat{\alpha}_1 - \frac{2 + \gamma_4}{2\gamma_3} \pm \sqrt{1 - [\hat{\alpha}_2 - (\hat{\alpha}_1)^2] + \left(\frac{2 + \gamma_4}{2\gamma_3}\right)^2} \quad (10)$$

Przy stosowaniu metody wielomianowej PMM, jeśli istnieje kilka możliwych rozwiązań równania (6), to należy wybrać pierwiastek będący liczbą rzeczywistą. Według wzoru (3) pozyska się wówczas maksymalną ilość informacji $J_{r(\theta)}$ i najmniejszą wartość wariancji.

W przedstawianych tu badaniach dotyczących zastosowania metody PPM w analizie pomiarów, zasadę wyboru pierwiastka równania (10) jako optymalnego estymatora parametru θ określa punkt zmiany znaku współczynnika asymetrii, tj. dla $\gamma_3 = 0$. Tak więc oszacowaniem parametru θ , wyznaczonym za pomocą wielomianu stopnia $r = 2$, jest estymator $\hat{\theta}_{(2)}$

$$\hat{\theta}_{(2)} = \hat{\theta}_{(1)} + \delta_{(2)}, \quad (11)$$

o współczynniku korekcyjnym $\delta_{(2)}$ w postaci rozwiniętej

$$\delta_{(2)} = -\frac{2 + \gamma_4}{2\gamma_3} + \text{sign}(\gamma_3) \left[1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v \right)^2 \right) + \left(\frac{2 + \gamma_4}{2\gamma_3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(11a)

5. Analiza dokładności estymatorów wielomianu

Metodą wielomianową PMM i parametry wyznaczone z danych próbki za pomocą wielomianu r -tego stopnia oznaczane się będzie dalej w tekście dolnym indeksem (r).

Niepewność pomiaru wg metody PMM $_{(r)}$ proponuje się oceniać ilościowo za pomocą współczynnika redukcji wariancji

$$g_{(\theta)r} = \frac{\sigma_{(\theta)r}^2}{\sigma_{(\theta)1}^2} \quad (12)$$

Jest to stosunek wariancji $\sigma_{(\theta)r}^2$, odchyleń od estymatora $\hat{\theta}_{(r)}$ parametru θ , wyznaczonego metodą PMM $_{(r)}$ oraz wariancji $\sigma_{(\theta)1}^2$ odchyleń od estymatora liniowego $\hat{\theta}_{(1)}$ opisanego wzorem (6a) i szacowanego metodą PMM $_{(1)}$ z wielomianem stopnia $r = 1$ (czyli tak samo, jak metodą momentów MM).

Estymator liniowy $\hat{\theta}_{(1)}$ o postaci (6a) jest nieobciążony (o wartości początkowej równej zero) i zgodny [1]. Jego wariancja $\sigma_{(\theta)1}^2$ nie zależy od wartości szacowanego parametru, ale wyłącznie od wariancji składowej losowej danych pomiarowych (kumulant drugiego rzędu $\kappa_2 = m_2$) i od ich liczby n w próbce:

$$\sigma_{(\theta)1}^2 = \frac{\kappa_2}{n} \quad (13)$$

Z wyrażenia (8) opisującego optymalne współczynniki metody PMM oraz w oparciu o wzór ogólny (3) można otrzymać ilość informacji o estymatorach parametru θ , którą uzyskuje się z próbki o wielkości n za pomocą wielomianów stochastycznych stopnia $r = 2$:

$$J_{2n(\theta)} = \frac{n}{\kappa_2} \frac{2 + \gamma_4}{2 - \gamma_3^2 + \gamma_4},$$

Asymptota wariancji $\sigma_{(\theta)2}^2$ jest odwrotnością $J_{2n(\theta)}$, tj.

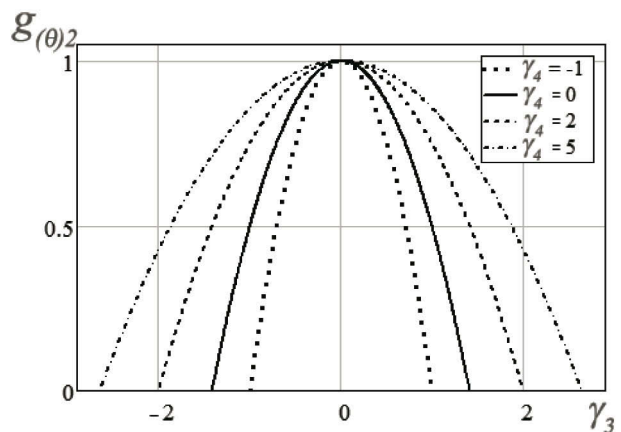
$$\sigma_{(\theta)2}^2 = \frac{\kappa_2}{n} \left(1 - \frac{\gamma_3^2}{2 + \gamma_4} \right) \quad (14)$$

Współczynnik zmniejszenia wariancji wyniesie wówczas

$$g_{(\theta)2} = 1 - \frac{\gamma_3^2}{2 + \gamma_4} \quad (15)$$

Jest on funkcją współczynników γ_3 i γ_4 kumulantów skośności i kurtozy i nie zależy od liczby n danych próbki.

Współczynniki kumulantów wyższych rzędów nie mogą przyjmować wartości dowolnych i ich granice są ze sobą powiązane [15]. Przykładem jest powiązanie granic wartości współczynników kumulantów γ_3 i γ_4 . Z analizy wzoru (15) wynika, że bezwymiarowy współczynnik redukcji (zmniejszenia) wariancji $g_{(\theta)2}$ ma zakres (0; 1], zaś dopuszczalne wartości współczynników kumulantów ogranicza nierówność $\gamma_4 + 2 \geq \gamma_3^2$.



Rys. 1. Zależności współczynnika redukcji wariancji $g_{(\theta)2} = \sigma_{(\theta)2}^2 / \sigma_{(\theta)1}^2$ estymatora wartości mierzandru według metody PMM $_{(2)}$ (z wielomianem stopnia 2) od współczynników kumulanta γ_3, γ_4 . Fig 1. Dependence of the variance reduction coefficient $g_{(\theta)2} = \sigma_{(\theta)2}^2 / \sigma_{(\theta)1}^2$ calculated by the 2nd order polynomial method PMM(2) from cumulative coefficients γ_3, γ_4 .

Na rysunku 1 przedstawiono zależności współczynnika $g_{(\theta)2}$ od współczynnika asymetrii γ_3 dla kilku stałych wartości współczynnika kurtozy γ_4 jako parametru.

Krzywe z rysunku 1 wykazują, że wariancja estymatora wg metody PMM₍₂₎, tj. z wielomianem drugiego stopnia znacząco maleje ze wzrostem asymetrii rozkładu (wartości bezwzględne $|\gamma_3|$ współczynników asymetrii i osiąga zero na brzegach obszaru dopuszczalnych wartości γ_3 , które wzrastają wraz z γ_4).

6. Modelowanie statystyczne estymacji PMM

Na podstawie przeprowadzonych rozważań opracowano pakiet oprogramowania w środowisku programowym MATLAB. Przy asymetrycznie rozproszonych danych pomiarowych pakiet ten umożliwia przeprowadzanie modelowania statystycznego niezbędnego do wyznaczenia estymatora menzurandu proponowaną wielomianową metodą PMM opartą na statystykach wyższego rzędu i kumulantach. Podstawą algorytmu pakietu jest wiele eksperymentów symulowanych metodą Monte Carlo. Umożliwia on analizę porównawczą dokładności różnych algorytmów estymacji statystycznej, a także zbadanie właściwości probabilistycznych estymatorów wielomianowych.

Otrzymywana empirycznie wartość współczynnika $g_{(\theta)2} \leq 1$ wg wzoru (12), wyraża względne zmniejszenie wariancji estymatora i może stanowić kryterium porównawcze skuteczności metody PMM w stosunku do sposobu wyznaczania niepewności typu A wg GUM. Współczynnik $g_{(\theta)2}$ oblicza się na podstawie M -krotnych eksperymentów symulacyjnych o tych samych początkowych wartościach obserwacji pomiarowych parametrów modelu. Estymator współczynnika $\hat{g}_{(\theta)2}$ tworzy się jako stosunek empirycznie oszacowanych wariancji $\hat{\sigma}_{(\theta)2}^2$ estymowanego parametru (obliczonych metodą PMM z wykorzystaniem wielomianu 2. stopnia) i wariancji $\hat{\sigma}_{(\theta)1}^2$ liniowego estymatora tego parametru wg wzoru (6).

Wiarygodność wyników symulacji uzyskiwanych za pomocą algorytmów estymacji statystycznej zależy od dwóch czynników: – liczby n elementów wektora wejściowego, tj. wartości obserwacji pomiarowych estymowanego parametru, – liczby eksperymentów M , przeprowadzanych z tymi samymi warunkami początkowymi (wartości skośności i kurtozy opisujące probabilistyczne właściwości modelu).

Wykonano po $M = 10^4$ obliczeń metodą Monte Carlo dla kilku rodzajów asymetrycznych rozkładów danych pomiarowych. Użytko z nich średnie wartości eksperymentalnego (tj. wyznaczo-

nego z danych próbki pomiarowej) współczynnika redukcji wariancji $\hat{g}_{(\theta)2}$.

W obliczeniach estymatorów parametru θ (11) wielomianową metodą PMM nie brano pod uwagę informacji *a priori* o rodzaju rozkładu, a tylko wartości jego współczynników kumulanta jako parametrów modelu. Wyznaczano je z wyrażeń analitycznych wiążących momenty i kumulanty rozkładu (Tabela 1). W praktyce wstępują też sytuacje, gdy informacja o rozkładzie badanych parametrów nie jest dostępna *a priori*. Potrzebne w analizie estymatory momentów można wówczas uzyskać z danych próbki, lub w sposób algorytmiczny przez procedury treningowe z wykorzystaniem relacji asymptotycznych:

$$\hat{\gamma}_3 = \hat{m}_3 / \hat{m}_2^{3/2}, \quad \hat{\gamma}_4 = (\hat{m}_4 / \hat{m}_2^2) - 3 \quad (16)$$

gdzie: \hat{m}_i – moment centralny próbki i -tego rzędu

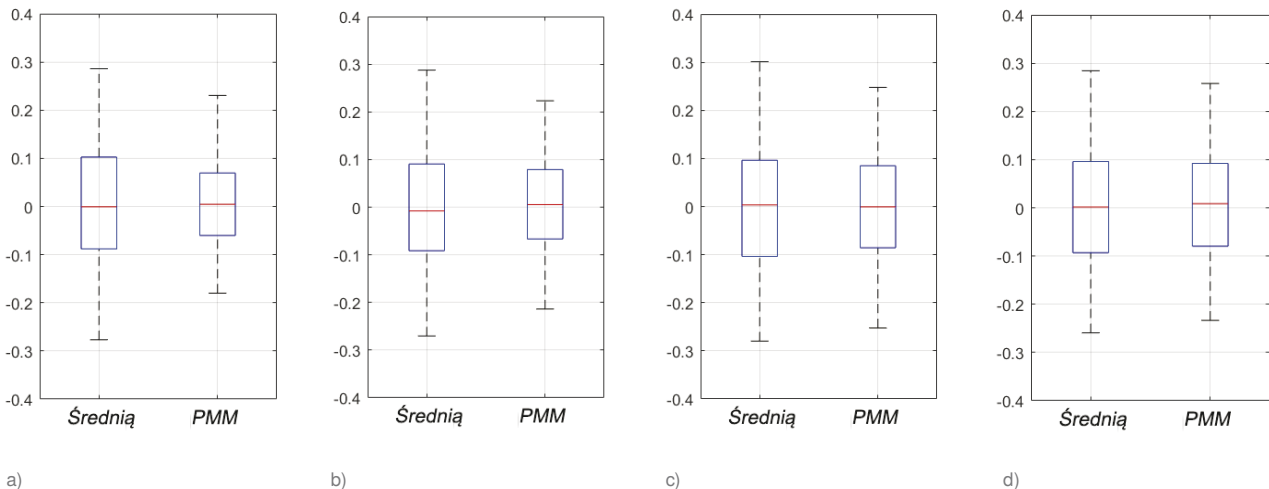
$$\hat{m}_i = \frac{1}{k} \sum_{v=1}^k (x_v - \bar{x})^i \quad (17)$$

Estymatory o postaciach (16) i (17) są zgodne i asymptotycznie nieobciążone. Metodę obliczania liczby k prób treningowych niezbędnych do uzyskania określonej wartości względnego błędu oszacowania współczynników kumulanta γ_3 i γ_4 podano w [21].

Zestaw wyników uzyskanych metodą Monte Carlo podano w tabeli 2. Analiza danych przedstawionych w tej tabeli wykazuje zbieżność między wynikami obliczeń analitycznych i modelowaniem statystycznym. Wzrasta ona wraz z liczbą n elementów próbki.

W szczególności różnica między eksperymentalnymi i teoretycznymi wartościami współczynnika redukcji wariancji $\hat{g}_{(\theta)2}$ maleje wraz ze wzrostem liczby elementów próbki (np. gdy $n = 20$ to różnica ta nie przekracza 15%, a gdy $n = 50$ to różnica ta jest już mniejsza od 5%). Wyniki te potwierdzają właściwość asymptotyczną (4) dotyczącą wartości pozyskanej informacji $J_{r,n}(\theta)$ o estymowanych parametrach. Wzór (3) umożliwia użycie tej informacji do wyznaczenia wariancji estymatorów wielomianową metodą PMM jako rozwiązań równania ogólnego (1).

Przykłady otrzymanych empirycznie metodą Monte Carlo oszacowań średniej arytmetycznej i jej niepewności typu A wg GUM [2] oraz estymatora wartości menzurandu według metody PMM₍₂₎ i jego odchylenia standardowego (dla różnych asymetrycznych rozkładów danych) – rys. 2. Przykłady te dotyczą symulacji Monte Carlo o $M = 10^4$ eksperymentach i liczbie $n = 50$ danych obserwacji pomiarowych w próbce. Na wykresach



Rys. 2. Wykresy pudełkowe oszacowań wartości menzurandu otrzymanych empirycznie metodą Monte Carlo ($M = 10^4$) dla próbki o $n = 50$ danych z populacji o rozkładach: a) wykładniczym; b) gamma ($\alpha = 2$); c) log-normalnym; d) Weibulla

Fig. 2. Box-plot graphs empirically obtained by Monte Carlo method ($M = 10^4$) estimators of measurand for sample with $n = 50$ data taken from population of asymmetric pdf-s: a) exponential; b) gamma ($\alpha = 2$); c) log-normal; d) Weibull

Tabela 2. Wyniki estymacji parametrów uzyskane metodą Monte Carlo
Table 2. Results of estimated parameters by Monte-Carlo simulation

Rozkład		Teoretyczne wartości parametrów			Symulacje Monte Carlo			
		γ_3	γ_4	$g(\theta)_2$	$\hat{g}(\theta)_2$			
					$n = 20$	$n = 50$	$n = 200$	
Gamma $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0$ $m_r = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)}{\lambda^r}$		$\alpha = 0,5$	2,83	12	0,43	0,47	0,46	0,43
	$\alpha = 2$	1,41	3	0,6	0,63	0,61	0,6	
	$\alpha = 4$	1	1,5	0,71	0,74	0,72	0,71	
Exponential – Gamma dla $\alpha = 1$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ $m_r = r!/\lambda^r$		$\alpha = 1$	2	6	0,5	0,58	0,52	0,5
Lognormal $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \geq 0, m_r = e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}}$		$\sigma^2 = 0,1$ $\mu = 1$	1	1,86	0,74	0,76	0,075	0,74
Weibull $f(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$ $x > 0, m_r = a^r \Gamma\left(\frac{r}{b} + 1\right)$		$a = 1$ $b = 2$	0,63	0,25	0,82	0,84	0,83	0,82

Tabela 3. Wyniki badania adekwatności liniowego modelu rozkładu (funkcja Gaussa, $r = 1$) i nieliniowego wielomianowego ($r = 2$), oszacowane według testu Lillieforsa
Table 3. Results of testing the adequacy of the Gaussian distribution model for linear ($r = 1$) and polynomial ($r = 2$) estimates on the basis of Lilliefors test

Rozkład		Parametry wyjściowe testu Lillieforsa						CV
		LSTAT						
		$n = 20$		$n = 50$		$n = 200$		
		$r = 1$	$r = 2$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 1$	$r = 2$	
Gamma	$\alpha = 0,5$	0,045	0,036	0,028	0,021	0,018	0,009	0,009
Exponential	$\alpha = 1$	0,034	0,027	0,023	0,013	0,011	0,008	
Gamma	$\alpha = 2$	0,021	0,017	0,013	0,012	0,009	0,007	
	$\alpha = 4$	0,02	0,017	0,012	0,011	0,008	0,007	
Lognormal	$\sigma^2 = 0,1, \mu = 1$	0,016	0,014	0,012	0,011	0,008	0,007	
Weibull	$a = 1, b = 2$	0,013	0,017	0,011	0,011	0,006	0,004	

typu pudełkowego (ang. *box-plot*), pole w środkowej części zawiera 50% przedziału ufności estymatora, a oznaczenia dolnej i górnej granicy odpowiadają 2,5% i 97,5%.

Wykresy te potwierdzają, że metodą PMM uzyska się lepszy rezultat niż metodą klasyczną wg zaleceń GUM, gdyż nawet dla małych próbek o $n = 20, g(\theta)_2 < 1$, czyli ich wariancje są istotnie mniejsze.

Autorzy zachęcają Czytelników do samodzielnego sprawdzenia metodą Monte Carlo wyników estymacji PPM interesujących ich rozkładów asymetrycznych, innych niż podane w tabeli 2 i do opracowania szczegółowych wniosków o zbadanych rozkładach.

Innym ważnym rezultatem modelowania statystycznego jest sprawdzenie założenia, że wraz ze wzrostem liczby n pozyskanych danych rozkłady estymatorów parametrów wielkości mierzalnej θ , obliczone metodą PMM według wzoru (11), dążą asymptotycznie do funkcji Gaussa. Poprawność tej hipotezy dla estymatorów wyznaczanych metodą wielomianową PMM zbadano za pomocą testu Lillieforsa opartego na statystyce Kołmogorowa-Smirnowa [22]. Test ten jest wbudowany w oprogramowanie MATLAB. W tabeli 3 przedstawiono wyniki badania w postaci testu Lillieforsa. LSTAT – to wartości próbki badanej statystycznie, CV – krytyczna

wartość statystyki testu. Jeżeli $LSTAT < CV$, to hipoteza zerowa jest ważna przy zadanym poziomie krytycznym.

Wyniki przedstawione w tabeli 3 uzyskano wykonując $M = 10^4$ eksperymentów statystycznych MC dla każdego z kilku podstawowych asymetrycznych rozkładów populacji danych pomiarowych i różnej liczby danych n próbki x oraz przy stałym poziomie istotności $\alpha_0 = 0,05$ hipotezy zerowej (rozkład Gaussa). Przyjęte kryterium $CV = 0,009$ spełniają tylko nieliczne pogrubione w tabeli 3 wyniki dla liczby danych w próbce $n = 200$. Dla mniejszych n nie można rozrzutu wartości estymatorów menzurandu traktować jako podlegającego rozkładowi Gaussa.

Wyznaczanie estymatora wariancji menzurandu metodą wielomianową PMM stopnia r należy poprzedzić podanym w punkcie 4 unormowaniem oryginalnych danych pomiarowych, by otrzymać próbkę x . Do oszacowania niepewności rozszerzonej wyniku pomiarów na podstawie wyrażenia analitycznych dla wariancji, np. takich jak otrzymane w punkcie 5 dla $r = 2$, potrzebna jest informacja *a priori* o rodzaju rozkładów dla określonej liczby współczynników kumulanta opisujących jej właściwości probabilistyczne. Nie natrafiłmy jeszcze w literaturze na zależności analityczne współczynników rozszerzenia niepewności standardowej dla różnych parametrów rozkładów niegaussowskich i przy różnej liczbie danych n . Dla określonego rozkładu i małej liczby danych n próbki można je wyznaczać numerycznie metodą MC. Jedynie dla dużych n można przyjąć, że są to rozkłady normalne.

Warto też zauważyć, że addytywne właściwości funkcji opisującej kumulanty umożliwiają w prosty sposób uwzględniać składowe niepewności generowane przez wiele źródeł i o różnych właściwościach probabilistycznych.

7. Wnioski i dalsze kierunki prac

Łączna analiza wyników rozważań teoretycznych i eksperymentów statystycznych umożliwia sformułowanie ogólnego wniosku o możliwości wykorzystania narzędzia matematycznego zaproponowanego przez Kunchenko, czyli metody maksymalizacji wielomianów stochastycznych o akronimie PPM z opisem za pomocą kumulantów. Metodę tę można użyć w konstruowaniu algorytmów do wyznaczania nieliniowych estymatorów wartości i niepewności menzurandu dla danych pomiarowych rozproszonych losowo zarówno symetrycznie [23, 24], jak i asymetrycznie oraz opisanych modelem niegaussowskim.

Omówione w tej pracy badania metodą Monte Carlo wykazały w szczególności, że estymacja parametrów menzurandu na podstawie danych próbki z rozkładu asymetrycznego, już przy zastosowaniu wielomianu stopnia $r = 2$ daje większą dokładność (mniejszą wariancję) niż estymacja liniowa zalecana w GUM [2], tj. wyznaczanie średniej arytmetycznej i jej niepewności typu A.

Zwiększenie dokładności, czyli zmniejszenie wariancji i niepewności standardowej estymatorów osiągnięto dla niegaussowskich niesymetrycznych rozkładów danych pomiarowych przez wykorzystanie dodatkowej informacji o ich właściwościach w postaci kumulantów rzędów $r > 2$. Informacja ta zależy od wartości i liczby kumulantów branych pod uwagę. W tej pracy wyrażono ją przez bezwzględne wartości współczynników kumulantów skośności i kurtozy. Takie szacowanie wydaje się o wiele prostsze w porównaniu do wyboru rodzaju rozkładu i wyznaczenia parametrów jego funkcji dla danej próbki o rozproszonych danych pomiarowych. To postępowanie oraz sprawdzenia adekwatności obu wyborów jest jednak niezbędne do oszacowania niepewności. Ponadto dla małych i nawet średnich próbek ($n < 150$) nie można jednoznacznie dokonać najlepszego wyboru rozkładu.

Wśród wielu możliwych kierunków dalszych badań, jako priorytetowe należy wymienić następujące zadania:

– zwiększenie stopnia wielomianu stochastycznego, gdy trzeba uzyskać bardziej skuteczne rozwiązania;

– analiza wpływu dokładności kumulantów rozkładu niegaussowskiego na stabilność wielomianowej estymacji parametrów menzurandu;

– synteza i analiza właściwości rekurencyjnych algorytmów dla estymacji wielomianową metodą PMM parametrów menzurandów wektorowych.

Bibliografia

- Novickij P.V., Zograf I.A., *Ocenka pogreshnostiej rezultatov izmierenii (Estimation of the measurement result errors)*, Energoatomizdat, Leningrad, 1991 (in Russian).
- Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM (2008) with Supplement 1 Evaluation of measurement data – Propagation of distributions using a Monte Carlo method., JCGM 101: 2008. OIML Geneva, Switzerland.
- Doksum K., *Measures of Location and Asymmetry*. “Scandinavian Journal of Statistics”, Vol. 2, No. 1, 1975, 11–22.
- Schmelling M., *Averaging Measurements with Hidden Correlations and Asymmetric Errors*, MPI, 1(1), 2000, [http://arxiv.org/abs/hep-ex/0006004].
- Barlow R., *Asymmetric Statistical Errors*, “arXiv”, 2004, [http://arxiv.org/abs/physics/0406120].
- Danilov A.A., Shumarova S.A., *On the asymmetry of the probability density function of the error of the results of measurements obtained by means of the complex measurement channels of measurement systems*, “Measurement Techniques”, Vol. 55, No. 11, 2013), 1316–1318. DOI: 10.1007/s11018-013-0127-z.
- Bich W., Cox M., Michotte C., *Towards a new GUM-an update*. “Metrologia”, Vol. 53, No. 5, 2016, 149–159.
- Cox M., Shirono K., *Informative Bayesian type A uncertainty evaluation, especially applicable to a small number of observations*. “Metrologia”, Vol. 54, No. 5, 2017, 642–652.
- Levin S.F., *The Identification of Probability Distributions*. “Measurement Techniques”, Vol. 48, No. 2, 2005, 101–111, DOI: 10.1007/s11018-005-0106-0.
- Casella G., Berger R.L., *Statistical inference*. Pacific Grove, CA: Duxbury 2002.
- Galovska M., Warsza Z.L., *The ways of effective estimation of measurand*. “Pomiary Automatyka Komputery w Gospodarce i Ochronie Środowiska”, Nr 1, 2010, 33–41.
- Täubert P., *Abschätzung der Genauigkeit von Messergebnissen*. Verlag Technik, 1987.
- Kuznetsov B.F., Borodkin D.K., Lebedeva L.V., *Cumulant models of additional errors. Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz*. “Modelirovanie”, No. 1 (37), 2013, 134–138.
- De Carlo L.T., *On the meaning and use of kurtosis*. “Psychological methods”, Vol. 2, No. 3, 1997, 292–307. DOI: 10.1037/1082-989X.2.3.292.
- Kunchenko Y., *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables*. Germany, Aachen: Shaker Verlag 2002.
- Kunchenko Y., *Stochastic polynomials*, Kiev: Nauk. dumka, 275. 2006, (in Russian).
- Chertov O., Slipets T., *Kunchenko’s polynomials for template matching*, 18th IEEE International Conference on Systems, Signals and Image Processing (IWSSIP), Sarajevo, 16–18 June 2011.
- Zabolotnii S.V., Warsza Z.L., *Semi-parametric polynomial method for retrospective estimation of the change-point of parameters of Non-Gaussian sequences*, Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X. 2015, DOI: 10.1142/9789814678629_0048.
- Zabolotnii S.W., Warsza Z.L., *Semi-parametric polynomial modification of CUSUM algorithms for change-point detec-*

- tion of non-Gaussian sequences.* Electronic Proceedings of XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry" August 30, September 4, 2015, Prague, Czech Republic, 2088–2091.
20. Palahin V., Juh J., *Joint signal parameter estimation in Non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization*, "Journal of Electrical Engineering", Vol. 67, No. 3, 2016, 217–221.
DOI: 10.1515/jee-2016-0031.
21. Cramér H., *Mathematical Methods of Statistics* (PMS-9), Vol. 9, Princeton University Press. 2016.
22. Lilliefors H.W., *On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown*. "Journal of the American Statistical Association", Vol. 62, No. 318, 1967, 399–402, DOI: 10.2307/2283970.
23. Warsza Z.L., Zabolotnii S.W., *A polynomial estimation of measurand parameters for samples of non-Gaussian symmetrically distributed data*. [in:] R. Szewczyk et al (eds.): *Innovations in Automation, Robotics and Measurement Techniques. Proceedings of Automation-2017*. Series: Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 550. Springer Int. 1 Publ. AG 2017, 468–480,
DOI: 10.1007/978-3-319-54042-9_45.
24. Warsza Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Oficyna Wydawnicza PIAP, Warszawa 2016.

Estimation of measurand parameters for data from asymmetric distributions by polynomial maximization method (PMM)

Abstract: The non-standard method for evaluating estimators of the value and uncertainty type A for measurement data sampled from asymmetrical distributed with a priori partial description (unknown PDF) is presented. This method of statistical estimation is based on the mathematical apparatus of stochastic polynomials maximization and uses the higher-order statistics (moment & cumulant description) of random variables. The analytical expressions for finding estimates and analyze their accuracy to the degree of the polynomial $r = 2$ are obtained. It is shown that the uncertainty of estimates received for polynomial is generally less than the uncertainty of estimates obtained based on the mean (arithmetic average) according international guide GUM. Reducing the uncertainty of measurement depends on the skewness and kurtosis. On the basis of the Monte Carlo method carried out statistical modelling. Their results confirm the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: estimator, non-Gaussian model, stochastic polynomial, means value, variance, skewness and kurtosis

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–70, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 250 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



Prof. Dr Tech. Sc., El. Eng.

Serhii V. Zabolotnii

s.zabolotnii@chdtu.edu.ua

Urodzony w 1973 r. w Cherkasach, Ukraina. Ukończył studia na Wydziale Techniki i Systemów Informatycznych Narodowego Uniwersytetu Technologicznego w Cherkasach w 1995 r. Stopień kandydata nauki (dr) z systemów informacyjno-pomiarowych 2000 r., dr nauk techn. (równoważny habilitacji) 2015 r. Praca – Wydział Radio-techniki Narodowego Uniwersytetu Technologicznego w Cherkasach: asystent 2003 r., docent od 2003 r., stanowisko profesora NUT w Cherkasach 2015 r. Autor lub współautor ponad 100 publikacji, 1 monografii i 7 patentów.

