Archiwum Fotogrametrii, Kartografii i Teledetekcji
Vol. 11, Kraków 2001
ISBN 83-915723-0-7

Uwagi o wykorzystaniu funkcji sklejanej 3 - stopnia dla celów redagowania wyników automatycznej generacji numerycznego modelu terenu.

Aleksander Żarnowski

Katedra Fotogrametrii i Teledetekcji
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Abstract

In the article are stated a method and algorithm of interpolation of height of a pixels at editing digital model of a relief received at automatic generation DEM on a digital images. The main precondition of a method is the geomorphologic analysis of slopes in a status of stability and selection of the appropriate class of functions describing a structure of a slope on a line maximal gradient.

Wstęp.

Po automatycznym spasowaniu dwóch obrazów cyfrowych nie wszystkie piksele obrazu lewego posiadają piksele odpowiadające na obrazie prawym; istnieją nawet całe obszary nie spasowane (wąwozy, jary, uskoki, wody, lasy, elementy liniowe itp.). Z drugiej strony przy spasowaniu uzyskane wysokości mogą dotyczyć powierzchni odbicia, a nie powierzchni topograficznej. Na tym etapie prac staje się niezbędną kontrola i redagowanie wyników.

1. Zasady modelowania numerycznego modelu terenu.

Wiadomo, że powierzchnia topograficzna w przypadku ogólnym jest przedstawiona jako funkcja:

$$Z = f(X,Y) \qquad (1)$$

Jednak jej adaptacja do zobrazowania powierzchni terenu wymaga spełnienia następujących warunków:

1. Wykluczenie obszarów, które nie odpowiadają warunkom jednoznaczności, ostateczności, ciągłości i gładkości funkcji pola.
2. Uwzględnienie niejednolitości budowy geologicznej oraz warunków hydrologicznych i klimatycznych formy rzeźby (tereny jednej genezy różnią się w szczegółach, co ma znaczny wpływ na wybór funkcji interpolacyjnych i aproksymacyjnych)
3. uwzględnienie grawitacyjnego zsuwania stokowego gleby mającego charakter gęsto-plastycznego ruchu pokładu powierzchownego po powierzchni nachylonej opisanego równaniem Szwedowa-Bingama (1966, A.S. Dewdariani):

$$\tau = \tau_p + \eta \frac{dV}{dY} \qquad (2)$$

gdzie

τ - naprężenie osuwające na głębokości Y, liczone od podłoża osuwającej się warstwy,

τ_p – maksymalne naprężenie osuwające, przy którym zaczyna się deformacja plastyczna,

$\frac{dV}{DY}$ - gradient szybkości osuwania się gleby na głębokości Y,

η - współczynnik gęstości plastycznej.

Naprężenie osuwające τ może być obliczone na podstawie wzoru:

$$\tau = \gamma(H - Y)\cdot \sin \nu \qquad (3)$$

gdzie

γ - waga objętościowa kruszywa,
H - miąższość warstwy osuwającej się,
ν - kąt nachylenia warstwy.

Oczywiście, przy $\tau \le \tau_p$ ruch nie będzie istniał i $\frac{dV}{DY} = 0$.

Ruch gleby na spadkach zatrzymuje się przy nachyleniach ostatecznych i stan ostateczny będzie istniał dla profilu $H = H_0$, na którym kruszywo jest już w warunkach stabilności. Dla profili przy dowolnych zarysach głównych i warunkach granicznych $\frac{dH}{dt} = 0$ na bazie denudacji $x = 0$ i $\frac{dH}{dx} = 0$ na powierzchni profili $x = l$ rozwiązanie równania zmiany, profil spadku będzie następujący:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{k}\frac{\delta y}{\delta t} \qquad (4)$$

jako rozwiązanie (4) proponuje się

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-m_i t} \sin a_i x \qquad (5)$$

gdzie

A_i, a_i, m_i - są stałymi,

A_i są zależne od warunków pierwotnych, a m_i spełniają warunek:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n. \qquad (6)$$

Z ostatniego warunku wynika, że wraz z upływem czasu każdy kolejny wyraz szeregu (5) maleje szybciej niż poprzedni. Istnieje też moment czasu, dla którego w szeregu pozostanie tylko wyraz pierwszy i równanie (5) przyjmie postać:

$$H = H_0 + Ae^{-mt} \sin ax \qquad (7)$$

Wynika z tego, że przy $t \to \infty$ można wyeliminować wyraz pierwszy szeregu i osiągnięty zostanie profil ostateczny $H = H_0$, a nachylenie otrzyma okres regularny niezależny od jego stanu pierwotnego.

2. Wybór klasy funkcji dla matematycznego modelowania powierzchni topograficznej.

Charakterystyczną cechą metody jest hipoteza, że rzeźba to wypadkowa funkcji rozkładu wysokości. Z drugiej strony, ustalony na podstawie wzoru (7) profil ostateczny $H = H_0$ możemy określić jako równowagę dwóch składników: energii położenia cząstek, z których składa się stok i sił przyciągania międzycząsteczkowego, które utrzymują ich w masywie. Przewaga energii położenia cząstek nad siłami przyciągania międzycząsteczkowego powoduje modyfikację profilu stoku do momentu wystąpienia równowagi tych składników i uzyskania przez profil charakteru stabilnego (końcowego).

Wynika stąd, że stałej równowadze stoku przy innych warunkach równych (zewnętrznych i wewnętrznych) odpowiada minimum energii położenia cząstek, z których on się składa. Każdą cząstkę identyfikuje się jako punkt przekroju. Wobec powyższych warnuków, można stwierdzić, że jednoznacznemu zbiorowi punktów profili będzie odpowiadać jedna funkcja analityczna z dokładnością do ε.

Możemy również rozpatrywać ten profil jako belkę cienką, której oś neutralna jest styczna z powierzchni Ziemi (powierzchnia topograficzna), a sumę energii położenia cząstek, jako energię potencjalną, która jest akumulowana w tej belce przy jej deformacji. Z teorii wytrzymałości materiałów wiadomo, że energia ta akumulowana proporcjonalnie do całki z kwadratu krzywizny osi deformowanej belki, z czego wynika, że minimum energii potencjalnej deformowanej belki odpowiada minimum krzywizny jej osi.

Na podstawie tych rozważań możemy stwierdzić, że klasa funkcji aproksymacyjnych dla profili wg zadanego kierunku powinna odpowiadać dwóm głównym warunkom:

- ciągłości funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnych,
- minimalnej krzywizny funkcji na danym zbiorze punktów.

Tym warunkom odpowiadają funkcja sklejona 3. stopnia na siatce Δ typu (1967, J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh):

$$S_\Delta(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + (Z_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6})\frac{x_j - x}{h_j} + (Z_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad (8)$$

gdzie

M_j – chwilowa energia położenia,
x_j - współrzędne punktów,
z_j – wysokości punktów,
$h_j = x_j - x_{j-1}$

Warunki (1-3) będą zawsze spełnione, o ile funkcja sklejona 3. stopnia jest ciągła, jej pierwsza i druga pochodne również są ciągłe. Miara przybliżenia profili funkcją sklejaną 3. stopnia na siatce Δ, jak wynika ze wzoru:

$$E = \int_a^b \left[f''(x) - S_\Delta''(x) \right]^2 dx \qquad (11)$$

przy czym otrzymuje wartość minimalne gdy

$$S_\Delta(x) = S_\Delta(f; x). \qquad (12)$$

co gwarantuje przybliżenie optymalne.
Oprócz tego, z cechy minimalnej krzywizny funkcji sklejanej 3. stopnia

$$\int_a^b \left|f''(x)\right|^2 dx \to \min \tag{13}$$

wynika, że w przypadku aproksymacji funkcją sklejaną 3. stopnia profile minimalizuje się całką z kwadratu jego krzywizny.

Przy odpowiednim wyborze warunków granicznych funkcji sklejanej 3. stopnia metoda ta może być efektywnie wykorzystana do redagowania wyników generacji automatycznej NMR.

Recenzował: dr inż. Krystian Pyka

Literatura:

1. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh. The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press, New York and London, 1967, s. 313
2. A.S. Dewdariani, Итоги науки. Серия географическая. Геоморфология. Изд. ВИНИТИ АН СССР, Москва, 1966

Abstrakt

W referacie zostało przedstawione wykorzystanie funkcji sklejanej 3.stopnia przy redagowaniu numerycznego modelu rzeźby terenu otrzymanego w wyniku jego automatycznej generacji z obrazów cyfrowych. Głównym założeniem metody jest analiza geomorfologiczna ustabilizowanych spadków terenu i dobór odpowiednich klas funkcji opisujących rzeźbę na przekrojach w kierunku maksymalnego jej nachylenia.

Реферат

В статье показаны условия использования сплайн-функций при редактировании цифровой модели рельефа, полученной при автоматической генерации ЦМР по цифровым снимкам. Главной предпосылкой метода является геоморфологический анализ склонов в состоянии стабильности и подбор соответствующего класса функций, описывающих профиль склона по линии максимального уклона.