

ANALIZA KORELACJI POMIĘDZY MIĄŻSZOŚCIĄ SERII ŁUPKOWEJ A ZASOBNOŚCIĄ Cu SERII WĘGLANOWEJ WE FRAGMENTCIE JEDNEGO ZE ZŁÓŻ Cu-Ag LGOM

ANALYSIS OF CORRELATION BETWEEN THE ACCUMULATION INDEX OF Cu IN THE CARBONATE ORE AND THE THICKNESS OF SHALE ORE IN SELECTED PART OF Cu-Ag LGOM DEPOSIT

Jerzy Wójtowicz - AGH Akademia Górniczo – Hutnicza, WGGiOŚ, Katedra Geologii Złożowej i Górniczej, Kraków

Wcześniejsze badania nad wykształceniem litologicznym i zasobnością Cu złóż LGOM-u, wskazują na istnienie zależności pomiędzy miąższością serii łupkowej a zasobnością Cu serii węglanowej. Statystyczna analiza miąższości serii łupkowej i zasobności Cu serii węglanowej wskazuje na dużą zmienność tych parametrów oraz występowanie w zbiorze danych wartości anomalnych. Analiza siły korelacji z wykorzystaniem współczynników Pearsona i Spearmana przyniosła na ogół statystycznie, istotne, choć relatywnie bardzo małe wartości współczynników korelacji, które na wartość bezwzględną są rzędu 0,15.

Słowa kluczowe: korelacja, miąższość, zasobność Cu, LGOM, węglan, łupek

Earlier studies on lithological structure and accumulation index of Cu in LGOM deposits showed a relationship between thickness of shale ore and accumulation index of Cu in the carbonate ore. Statistical analysis of the thickness of shale ore and accumulation index of Cu in the carbonate ore indicates a high variability of these parameters and occurrence in the dataset anomalous values. The correlation testing using Pearson and Spearman coefficients generally resulted in a statistically significant but relatively very poor results with correlation coefficients slightly exceeding 0.15.

Key words: accumulation index of Cu, LGOM, correlation, carbonate, shale

Cel i zakres pracy

Podstawowym celem niniejszej pracy była analiza zależności korelacyjnej pomiędzy zasobnością Cu w rudzie węglanowej i miąższością bilansowej części serii łupkowej w wybranym fragmencie złoża Cu-Ag LGOM. Wykazanie istotnej zależności pozwoliłoby na wstępną predykcję zasobności Cu serii węglanowej na podstawie pomiarów miąższości serii łupkowej. W badaniach posłużono się metodami statystyki klasycznej, które wykorzystano do charakterystyki rozkładu badanych parametrów za pomocą histogramów i liczbowych miar zmienności oraz do liczbowej oceny siły korelacji za pomocą współczynnika korelacji liniowej Pearsona oraz współczynnika korelacji rang Spearmana. Obliczone współczynniki korelacji poddano testowi, który miał na celu ocenę ich statystycznej istotności.

Material podstawowy badań

Zbiór danych podstawowych obejmował informacje z 5644 miejsc opróbowania złoża Cu-Ag w wyrobiskach górniczych. W każdym z nich pobrano próby punktowe (cząstkowe)

wzdłuż linii pionowej, średnio co 0,2 m, oddzielnie dla każdej z serii litologicznych. Dla każdej próby cząstkowej określono laboratoryjnie zawartość procentową Cu. Na ich podstawie określony został pionowy zasięg złoża bilansowego, zasobność jednostkowa Cu poszczególnych serii oraz ich miąższość. Próby pobierane były w wyrobiskach górniczych wraz z postępem prac eksploatacyjnych, co zaowocowało powstaniem stosunkowo regularnej wzdłuż wyrobisk i nierównomiernej w obszarze badań sieci punktów opróbowania (rys. 1). Odległości poziome pomiędzy sąsiednimi punktami opróbowania wynosiły od 25 do 40 m. Długość prób „bruzdowych” utworzonych z próbek punktowych jest zmienna w obszarze badań i zależy w głównej mierze od wykształcenia i miąższości serii złożowych. Ich długość determinują również techniczne możliwości pobrania próby w granicach złoża. Maksymalne długości prób odnotowuje się w strefach elewacji, gdzie pobierano je dodatkowo z otworów dołowych, osiągają nawet 44,2 m. W depresjach, w związku z niewielką miąższością interwału złożowego, długość prób jest wyraźnie mniejsza. Minimalna długość próby w zbiorze danych podstawowych wynosi zaledwie 0,6 m. W analizowanym rejonie badań średnia długość próby bruzdowej

wynosi 8,2 m. W przypadku prób pobieranych w wyrobiskach korytarzowych, w rejonach o małej miąższości serii złożowej, jej długość jest związana z wysokością wyrobiska i rzadko przekracza 4 m długości.

Metodyka badań

Badanie zmienności miąższości serii łupkowej i zasobności w Cu serii węglanowej oraz ocena siły zależności pomiędzy tymi parametrami wykonane zostały przy wykorzystaniu metod statystyki klasycznej. W zakresie statystycznego opisu badanych parametrów sporządzono histogramy parametrów złożowych oraz wykresy „ramka-wąsy” dla wydzielenia wartości anomalnych [4]. W badaniach siły zależności pomiędzy tymi parametrami posłużono się dwiema metodami analiz korelacji: parametryczną i nieparametryczną.

Miernikiem siły korelacji liniowej (parametrycznej) jest unormowany współczynnik korelacji liniowej r (Pearsona) obliczany według wzoru:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

gdzie:

x_i, y_i – pomierzone wartości zmiennych losowych (parametrów złożowych),

\bar{x}, \bar{y} – średnie arytmetyczne wartości korelowanych zmiennych losowych z n pomiarów,

n – liczba pomiarów wartości parametrów złożowych.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona jest bardzo wrażliwy na wartości odstające (anomalne) w analizowanym zbiorze danych. Drugim istotnym czynnikiem wpływającym na wiarygodność otrzymanego wyniku jest rozkład prawdopodobieństwa badanych wartości. W sytuacji, gdy mamy do czynienia z rozkładem dalekim od normalnego, może on fałszywie wskazywać na nieistniejącą korelację. Rozwiązaniem w takim przypadku może być zastosowanie współczynników korelacji nieparametrycznych jakim między innymi jest współczynnik korelacji rang Spearmana.

Badanie korelacji przy wykorzystaniu współczynnika Spearmana sprowadza się do uporządkowania badanych zmiennych X i Y w ciąg rosnący, a następnie przyporządkowania każdemu pomiarowi numeru (rangi). Niweluje to negatywny wpływ wartości odstających oraz braku normalności rozkładu badanych zmiennych. Współczynnik korelacji rang Spearmana oblicza się według wzoru:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (2)$$

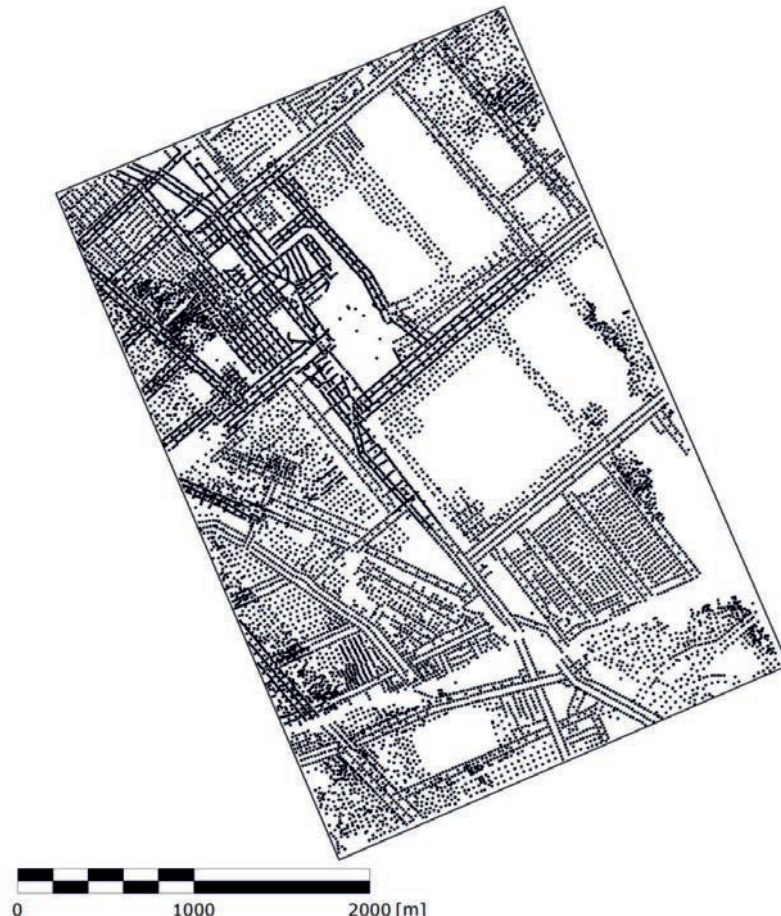
gdzie:

d_i – różnica pomiędzy rangami odpowiadających sobie wartości cechy x_i i y_i ,

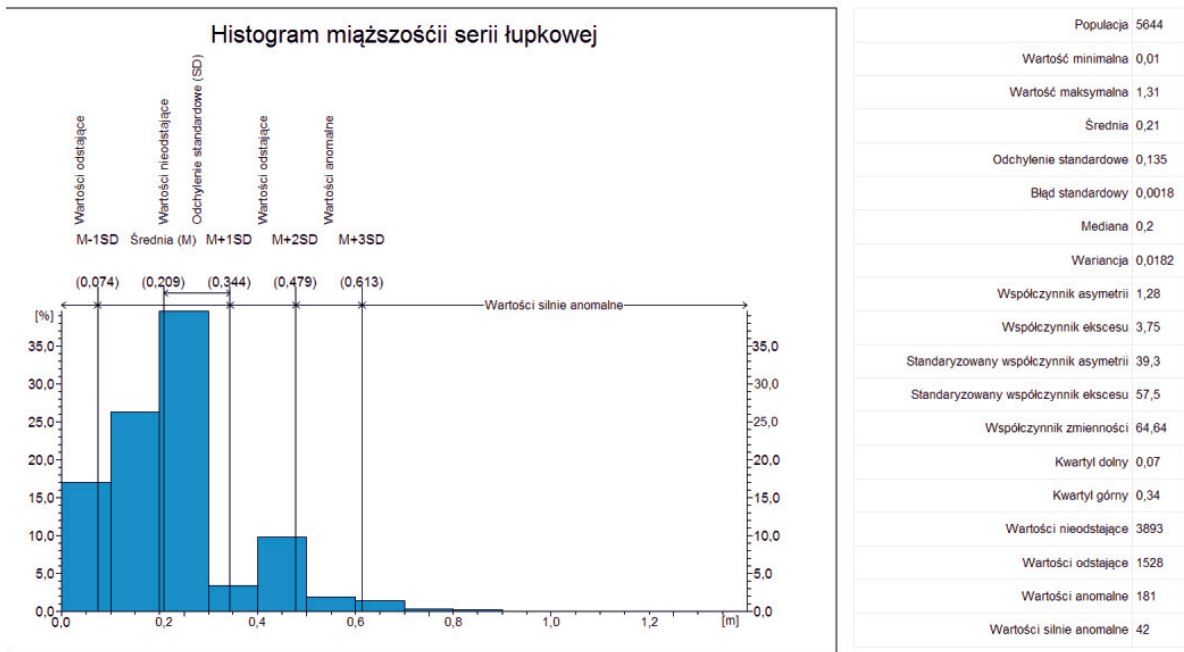
n – ilość par.

Statystyczny opis badanych parametrów

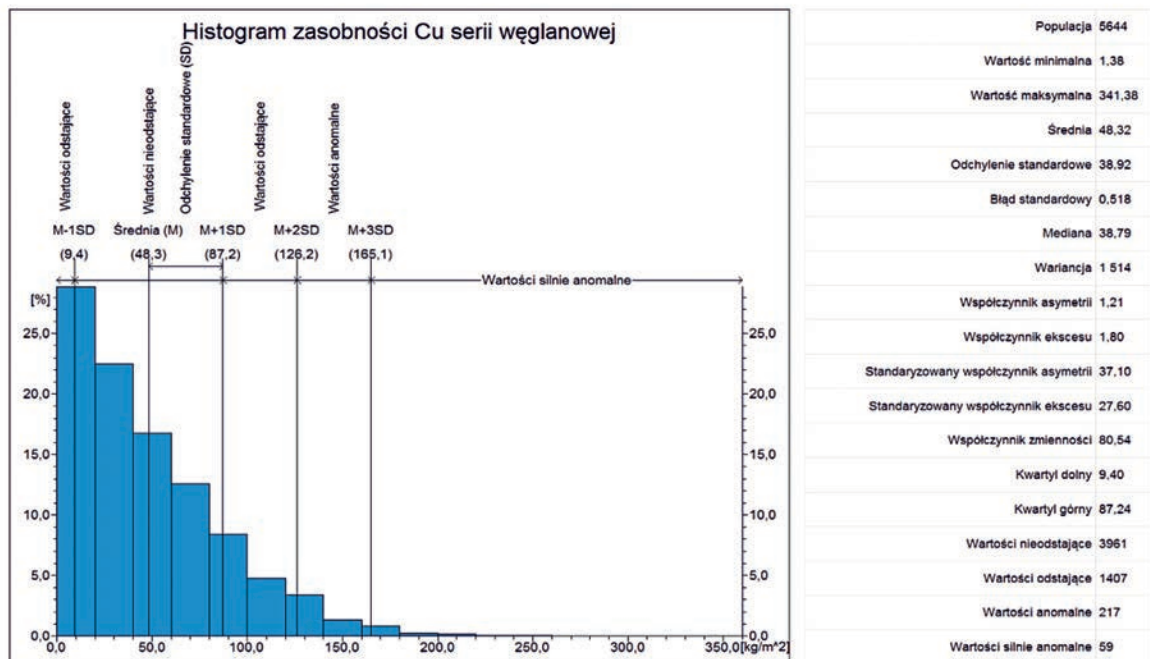
Histogram, wykres „ramka-wąsy” oraz podstawowe miary statystyczne dla miąższości serii łupkowej przedstawiono na rysunku 2. Otrzymany histogram jest dwumodalny. Współ-



Rys 1. Lokalizacja punktów opróbowania w rejonie badań
Fig. 1. Location of sampling points in the research area



Rys. 2. Analiza statystyczna miąższości serii łupkowej w rejonie badań
Fig. 2. Statistical analysis of the thickness of shale ore in the research area



Rys. 3. Analiza statystyczna zasobności jednostkowej miedzi serii węglanowej w rejonie badań
Fig. 3. Statistical analysis of the accumulation index of Cu in the carbonate ore in the research area

czynnik asymetrii wskazuje na umiarkowaną, dodatnią asymetrię rozkładu. W niemal 40 % przypadków miąższość łupka mieści się w granicach od 20 do 30 cm, przy czym w niemal 80 % obserwacji miąższość łupka nie przekroczyła 30 cm. Średnia miąższość bilansowej rudy łupkowej wynosi w tym rejonie 21 cm. Maksymalna miąższość serii łupkowej występuje w obszarach depresji pomiędzy elewacjami, gdzie dochodzi do 1,3 m. Na skłonach elewacji osady łupków stopniowo wyklinowują się i zanikają. W zbiorze danych pojawiają się zarówno wartości odstające jak i anomalne. Współczynnik zmienności badanego parametru wynosi 64,6 %, co w myśl klasyfikacji Baryszewa [2] wskazuje na dużą zmienność miąższości serii łupkowej. Standaryzowane współczynniki asymetrii i ekscesu wyniosły kolejno: 39,3 i 57,5 co jednoznacznie wyklucza możliwość przybliżenia rozkładu

badanego parametru do rozkładu normalnego, dla którego przyjmują one wartości z przedziału $[-2,2]$.

Na rysunku 3 zestawiono wartości podstawowych miar statystycznych, histogram oraz wykres „ramka-wąsy” dla zasobności miedzi w bilansowej części serii węglanowej. Histogram rozkładu wartości badanego parametru w ocenie wizualnej jest wyraźnie prawoasymetryczny. Na podstawie klasyfikacji podanej przez Muchę [3], opartej na wartości współczynnika asymetrii, należy go traktować jako umiarkowanie asymetryczny. Histogram miąższości serii łupkowej jest jednodobalny. W blisko 30 % obserwacji zasobność miedzi nie przekracza 20 kg/m² a w połowie z wszystkich punktów opróbowania nie stwierdzono zasobności większej niż 40 kg/m². Maksymalna zasobność badanej serii złożowej sięga 340 kg/m², przy minimalnej zaledwie

1,38 kg/m². Średnia wartość tego parametru w analizowanym obszarze wynosi 48,32 kg/m². W porównaniu z poprzednim przypadkiem, zbiór danych charakteryzuje się nieznacznie większym udziałem wartości odstających i anomalnych. Współczynnik zmienności dla badanego parametru wyniósł 80,5 % co według klasyfikacji Baryszewa również kwalifikuje go do grupy parametrów o dużej zmienności. Po standaryzacji współczynnik asymetrii wyniósł 37,1 a współczynnik ekscesu 27,6. Wartości te wykluczają możliwość przybliżenia rozkładu wartości badanego parametru do rozkładu normalnego.

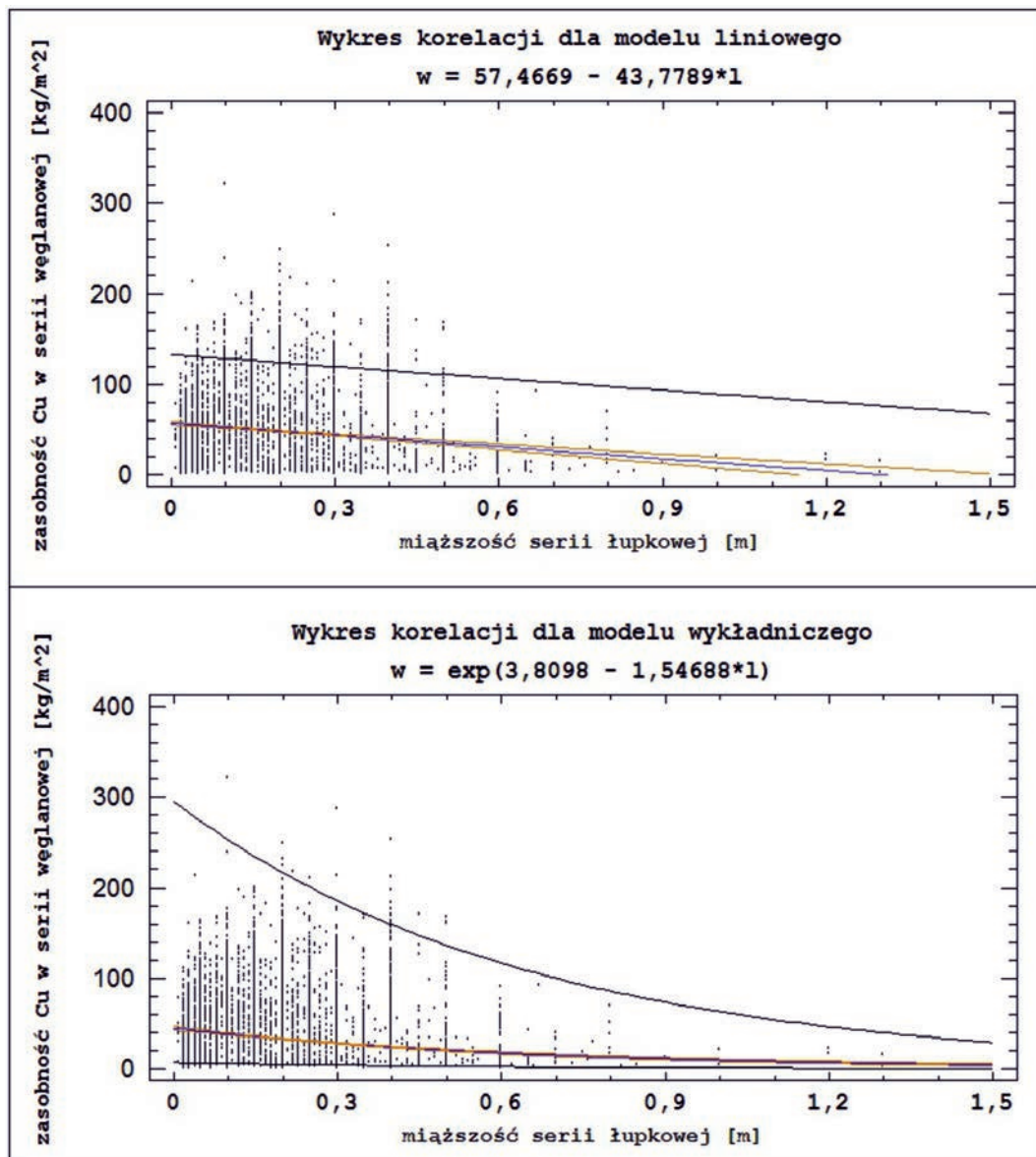
Analiza korelacji pomiędzy miąższością serii łupkowej a zasobnością Cu rudy węglanowej

Wcześniejsze badania nad wykształceniem litologicznym i zasobnością Cu złóż LGOM-u prowadzone przez Kaczmarka [1], wskazują na istotny wpływ spoiwa serii piaskowcowej oraz miąższości serii łupkowej na rozprzestrzenienie mineralizacji w osadach serii węglanowej. Miąższe warstwy łupków ilastych, w strefach depresji stropu białego spągowca, stanowiły

fizyczną barierę dla doprowadzanych od dołu hydrotermalnych roztworów siarczków miedzi. Skutkuje to koncentracją mineralizacji w serii łupków miedzionośnych, a w szczególności w ich spągowych partiach [1].

Analizie korelacji poddane zostały dane z opróbowania całego obszaru badań. Na rysunku 4 zestawiono wykresy korelacji (Pearsona) i regresji dla modelu liniowego oraz zlinearyzowanego modelu nieliniowego, który cechował się najwyższym współczynnikiem korelacji pomiędzy analizowanymi parametrami. Wyniki analizy korelacji zestawiono w tabeli 1. Zarówno w przypadku dopasowania modelu liniowego jak i modelu wykładniczego graniczny poziom istotności (*P-value*) nie przekracza wartości 0,05. Świadczy to istnieniu statystycznie istotnej zależności pomiędzy badanymi parametrami przy poziomie prawdopodobieństwa wynoszącym 95 %.

Współczynnik korelacji dla modelu liniowego wynosi -0,15, co wskazuje na bardzo słabą zależność pomiędzy badanymi parametrami. Współczynnik determinacji obliczony dla modelu liniowego oznacza, że dopasowany model tłumaczy jedynie 2,3 % zmienności w zasobności Cu w serii węglanowej.



Rys. 4. Wykresy korelacji i regresji pomiędzy zasobnością Cu w serii węglanowej (*w*) a miąższością serii łupkowej (*l*) dla modelu liniowego i nieliniowego
 Fig. 4. Plots of correlation and regression between the accumulation index of Cu in the carbonate ore (*w*) and the thickness of shale ore (*l*) for the linear and nonlinear model

Tab. 1. Wyniki analizy korelacji i regresji pomiędzy miąższością serii łupkowej a zasobnością Cu w serii węglanowej dla dopasowanych modeli
 Tab. 1. The results of correlation and regression analysis between the accumulation index of Cu in the carbonate ore and the thickness of shale ore for the matched models

	Model liniowy	Model wykładniczy
Współczynnik korelacji R	-0,15	-0,21
Współczynnik determinacji R^2	2,3 %	4,5 %
Równanie regresji	$w = 57,4669-43,7789*1$	$w = \exp(3,8098-1,54688*1)$
Graniczny poziom istotności P -value	0,0000	0,0000

W przypadku założenia wykładniczego modelu zależności, współczynnik korelacji wyniósł -0,21, co również oznacza stosunkowo słabą zależność badanych parametrów. Współczynnik determinacji obliczony dla modelu wykładniczego jest niemal dwukrotnie wyższy i wynosi 4,5 %.

W przypadku analizowanego zbioru danych, w którym często pojawiają się wartości odstające, a rozkład prawdopodobieństwa daleki jest od normalnego, nieznacznie lepsze wyniki przyniosło zastosowanie współczynnika korelacji rang Spearmana. Wartość współczynnika wyniosła około -0,18, a graniczny poziom istotności (P -value) nie przekracza wartości 0,05. Świadczy to o istnieniu statystycznie istotnej choć również słabej zależności pomiędzy badanymi parametrami przy poziomie prawdopodobieństwa 95%.

Z uwagi na stwierdzenie słabej korelacji, podjęto dodatkowe badania zależności pomiędzy miąższością serii łupkowej a zasobnością Cu w serii węglanowej dla danych z partii złoża o zróżnicowanej litologii. Węgłany podścielone piaskowcami o spoiwie anhydrytowym, występujące w strefach elewacji białego spągowca oraz na ich skłonach, charakteryzują się wyraźnie niższą zawartością Cu [1]. Kierując się tymi przesłankami, ze zbioru danych wyodrębniono próby pochodzące ze skłonów elewacji białego spągowca, gdzie miąższość łupka nie przekraczała 0,1 m oraz próby pobrane w depresjach pomiędzy elewacjami, w których osady te były bardziej miąższe.

Analizy korelacji przeprowadzone dla powyższych zbiorów nie przyniosły znacząco lepszych rezultatów, a w wielu przypadkach dały nawet wyniki zdecydowanie gorsze. Wartości współczynnika korelacji liniowej Pearsona i współczynnik korelacji rang Spearmana wyniosły dla danych z obszaru skłonów elewacji białego spągowca (1476 punktów opróbowania) kolejno: -0,07 i -0,05. Dla danych pochodzący z obszaru

depresji pomiędzy elewacjami (865 punktów opróbowania) wartości współczynników korelacji były równie niskie: -0,10 (współczynnik korelacji Pearsona) i -0,12 (współczynnik korelacji Spearmana). Podobnie jak we wcześniejszych przypadkach test istotności wskazał na występowanie statystycznie istotnej zależności pomiędzy badanymi parametrami, z ryzykiem błędu takiego wniosku nie większym niż 5%.

Podsumowanie

Badanie korelacji pomiędzy zasobnością Cu w serii węglanowej, a miąższością serii łupkowej dla bardzo licznego zbioru danych wykazało wbrew oczekiwaniom istnienie jedynie bardzo słabej ale statystycznie istotnej zależności między analizowanymi parametrami złożowymi. Współczynniki korelacji Spearmana tylko nieznacznie przewyższają na wartość bezwzględną współczynniki korelacji Pearsona. Dla całego rozpatrywanego fragmentu złoża wynoszą one odpowiednio: -0,18 i -0,15. Nieco większą siłę związku uzyskano dla zlinearyzowanego modelu liniowego ze współczynnikiem korelacji Pearsona (-0,21). Skonstruowane modele zależności parametrów wskazują na zaledwie słabo zaznaczoną tendencję zmniejszania się zasobności Cu w serii węglanowej wraz ze wzrostem miąższości serii łupkowej.

Brak odpowiednich badań uniemożliwia ilościową ocenę wpływu na uzyskane wyniki korelacji potencjalnych błędów pobrania próbek ze złoża i ich przygotowania do oznaczeń zawartości Cu. Częściowo mogą być one odpowiedzialne za występowanie licznych wartości anomalnych w zbiorach danych obu parametrów, które mogą maskować istnienie silniejszej korelacji.

Literatura

- [1] Kaczmarek W.: *Zróżnicowanie mineralizacji miedziowej a wykształcenie litologiczne białego spągowca w kopalniach LGOM*. Praca doktorska. Arch. Bibl. ING UW, 2006
- [2] Mucha J.: *Wybrane metody matematyczne w geologii górniczej*. Skrypt Uczelniany AGH, Kraków nr 1215, 1991
- [3] Mucha J.: *Struktura zmienności Zn i Pb w śląsko-krakowskich złożach Pb i Zn*. Studia, Rozprawy, Monografie 108, Wydawnictwo IGSMiE PAN, Kraków, 2002
- [4] Mucha J., Wasilewska M., *Ocena błędów opróbowania złóż – statystyczny niezbędnik geologa górniczego*. Gór. Odkryw., nr 2-3, 2009