

Rozszerzona metoda oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych i układów do tych pomiarów

Część 2. Zastosowanie na przykładzie układu do pośrednich pomiarów dwuparametrowych

Zygmunt Lech Warszawa

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: W części 1. zaproponowano rozszerzoną metodę oceny niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich i układów do tych pomiarów. W modelu matematycznym podanym w Suplemencie 2 Przewodnika GUM założono, że funkcja przetwarzania wielkości wejściowych jest dokładna. Nowy model uwzględnia niepewności i korelacje zarówno wielkości mierzonych bezpośrednio, jak i niepewności i korelacje parametrów układu realizującego funkcję przetwarzania. Może on służyć nie tylko do oceny niepewności wyników pomiarów wieloparametrowych, ale i do opisu dokładności systemów realizujących takie pomiary, w tym systemów wielosensorowych. W części 2. omawia się zastosowanie nowego modelu na przykładzie pomiarów pośrednich napięcia i prądu dwójnika za pomocą układu czwórnika pasywnego w postaci dzielnika impedancyjnego. Uwzględnia się niepewności wielkości mierzonych i parametrów dzielnika oraz różne możliwości ich skorelowania. Podano też przykłady obliczeniowe i wnioski końcowe oraz zarys kierunków dalszych prac w tej dziedzinie.

Słowa kluczowe: pomiary pośrednie, pomiary wieloparametrowe, menzurand, macierz kowariancji, niepewność, współczynnik korelacji, układ przetwarzania, czwórnik

1. Wprowadzenie

Rekomendowana w Suplemencie 2 [1] do Przewodnika GUM metoda wyznaczania niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych powstała z potrzeby jednolitego opisu dokładności wyników pomiarów stosowanych m.in. przez służby metrologiczne, w badaniach naukowych i w gospodarce. W pomiarach tych parametry wielowymiarowego menzurandu \mathbf{Y} uzyskuje się pośrednio z danych pomiarowych mierzonego menzurandu \mathbf{X} przy użyciu wielowymiarowej funkcji przetwarzania $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, zwanej też funkcją pomiaru [2]. W Suple-

mentcie 2 nie analizuje się jednak wpływu niedokładności tej funkcji. Uwzględnia się takie przypadki, w których funkcję tę realizuje się numerycznie z dokładnością, którą w praktyce można uznać za całkowicie dokładną. Metoda ta nie obejmuje jednak ani oceny dokładności wieloparametrowych pomiarów pośrednich realizowanych przez przyrządy oraz systemy pomiarowe i diagnostyczne – w tym wielosensorowe, ani opisu niepewności układu pomiarowego realizującego funkcje przetwarzania sygnałów i danych. Ich dokładność zależy nie tylko od niepewności i korelacji wielkości bezpośrednio mierzonych, ale i od niepewności elementów tego układu.

W części 1. [3] przedstawiono i omówiono szczegółowo zaproponowany model matematyczny metody rozszerzonej. Umożliwia ona szacowanie niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych wykonywanych zarówno zestawem osobnych przyrządów z zewnętrznymi, zwykle komputerowymi obliczeniami, jak i przyrządów i systemów do takich pomiarów z realizacją całego procesu pomiarów i przetwarzania w układach wewnętrznych. Może też służyć do jednolitego opisu dokładności tych systemów za pomocą niepewności wielkości wejściowych i wyjściowych w pełnych ich zakresach pomiarowych zamiast maksymalnych błędów dopuszczalnych (MPE).

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warszawa, zlw1936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 25.11.2019 r., przyjęty do druku 30.12.2019 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

Wpływ korelacji wielkości mierzonych bezpośrednio na wyniki i niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych omówiono szczegółowo [8–13] i podsumowano w części 1. Jako przykład ilustrujący zastosowanie rozszerzonej metody oceny dokładności pomiarów pośrednich omawia się jej zastosowanie do pomiarów napięcia i prądu dwójnika za pośrednictwem prostego czterozaciskowego układu dzielnika pomiarowego. W ocenie tej uwzględnia się niepewności i korelacje zarówno mierzonego bezpośrednio menzurandu dwuparametrowego, jak i wpływ niepewności parametrów układu pomiarowego przetwarzającego pozyskiwane dane. Takie ujęcie zagadnienia umożliwia analizę i optymalizację parametrów tego układu. Wykracza to poza metrologię traktowaną jako naukę o pomiarach i mieści się w szerszej dyscyplinie o ang. nazwie *Measurement Science* zaproponowanej przez lwowiaka prof. Ludwika Finkelsteina z City University w Londynie [5]. Obejmuje ona metrologię i podstawy teoretyczne budowy urządzeń i systemów pomiarowych.

2. Zarys rozszerzonej metody oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych

Scharakteryzujemy pokrótce zasady wyznaczania niepewności wg przewodnika GUM [1]. Zarówno obserwacje wielkości mierzonych, jak i parametry układu pomiarowego mogą zmieniać się deterministycznie i losowo w zależności od badanego obiektu, warunków pomiarów, użytych przyrządów i zastosowanej procedury pomiarowej. Zmiany te mogą zachodzić w trakcie wykonywania eksperymentu pomiarowego, jak i w różnych długości okresach między kolejnymi eksperymentami dla przyrządów o ważnej kalibracji. Znane zmiany deterministyczne eliminuje się z danych pomiarowych przez poprawki. Rozrzut otrzymanych eksperymentalnie danych pomiarowych ocenia się obecnie statystycznie wg GUM na podstawie odchylenia standardowego u_A dla wartości średniej ich rozrzutu. Natomiast w danych zebranych w każdym eksperymencie mogą występować nieznanne odchylenia o stałej lub wolnozmiennnej wartości (np. dryft), które powstają wskutek różnych oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych lub z innych przyczyn zachodzących w procesie pomiarowym i w obiekcie badanym. Według rekomendacji przewodnika GUM randomizuje się je i szacuje heurystycznie jako zbiór dodatkowych odchyleń o niepewności standardowej u_B , którą sumuje się geometrycznie z u_A

otrzymując odchylenie standardowe $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$. Z wartości

u znajduje się niepewność rozszerzoną U określającą połowę szerokości symetrycznego przedziału wokół estymatora wartości mierzonej, w którym z prawdopodobieństwem zadany P znajduje się wartość mierzona, tzw. przedział pokrycia. Jeśli rozkład rozrzutu odchyleń wypadkowych jest symetryczny oraz można go potraktować jako normalny (wg funkcji Gaussa), to wartość współczynnika rozszerzenia $k(P)$ jest znana, np. $k(95\%) = 2$. Jeśli zaś dane eksperymentalne pochodzą z populacji o nieznanym rozkładzie prawdopodobieństwa, to niepewność rozszerzoną wyznacza się z danych pomiarowych metodą Monte Carlo wg Suplementu 1 do przewodnika GUM [1]. Dla rozkładu wypadkowego w pomiarach wieloparametrowych poszukuje się numerycznie położenia najmniejszego obszaru pokrycia o zadany prawdopodobieństwie, np. 95%. Stosuje się też estymatory wartości i rozrzutu danych inne niż średnia i odchylenie standardowe, np. środek rozpięcia dla próbki z populacji o rozkładzie równomiernym oraz medianę w tzw. metodach odpornych [4].

Pośrednie pomiary wieloparametrowe, realizowane przy użyciu zestawu przyrządów lub systemu instrumentalnego opiszemy następującym równaniem pomiaru

$$Y = F(X, P) \quad (3)$$

Estymatory wartości, niepewności i współczynników korelacji m -wymiarowego wyjściowego menzurandu Y zależą nie tylko od n -elementowego menzurandu X mierzonego na wejściu, ale i od parametrów p_i dla $i = 1, \dots, k$, układu realizującego w systemie pomiarowym funkcję przetwarzania $F(X, P)$. Parametry tego układu opisuje ogólnie k -wymiarowy wektor P . Odchylenia od estymatorów wartości n elementów bezpośrednio mierzonego menzurandu X oraz m elementów wyznaczanego z nich mierzonego pośrednio menzurandu Y określa się jako ich przyrosty, zwane poprzednio błędami pozornymi. Natomiast odchylenia parametrów P układu pomiarowego wyznacza się od ich wartości znamionowych lub od ich estymatorów znanych z innych pomiarów. W każdym z eksperymentów pomiarowych realizację funkcji $F(X, P)$ zwykle odbiegają od jej postaci znamionowej $F(X)$. Wzory metody rozszerzonej umożliwiające ocenę dokładności pomiarów wieloparametrowych i ich systemów instrumentalnych z uwzględnieniem niepewności funkcji F zawiera tabela 1.

Przyrosty i odchylenia od estymatora wartości Y opisuje równanie macierzowe (4). Występujące w nim macierze czułości S i S_p o postaciach rozwiniętych (4a, b) wyrażają wpływ przyrostów ΔX i ΔP .

Dla menzurandu wieloparametrowego właściwości statystyczne zbioru odchyleń każdej wielkości opisywane są przez niepewność standardową u jako sumę geometryczną jej składowych u_A i u_B . Odpowiednikiem wariancji pojedynczej wielkości u^2 jest macierz kowariancji. Macierze kowariancji U_Y , U_X i U_P są symetryczne. Zawierają na głównej przekątnej kwadraty niepewności standardowych (wariancje) poszczególnych wielkości, a na pozostałych polach odpowiednie iloczyny współczynnika korelacji i obu niepewności dla skorelowanych wielkości menzurandu – patrz rozwinięte postacie macierzy (5c, d, e). Liczba współczynników korelacji dla n wielkości w macierzy kowariancji wynosi $n(n-1)/2$ i są powiązane równaniami propagacji wariancji.

Zrandomizowane zbiory odchyleń od estymatorów wartości elementów menzurandu Y powstają jako wynik splotów wieloparametrowych rozkładów odchyleń dla wielkości menzurandu X i odchyleń parametrów P układu pomiarowego realizującego funkcję $F(X, P)$. Przy linearyzacji tej funkcji dla małych odchyleń otrzymuje się macierz kowariancji U_Y z równania propagacji wariancji (3a, b) w pośrednich pomiarach wieloparametrowych. Kolejne rozwinięcia tego równania podają wzory (5a, b).

Niepewności i skorelowania zbiorów własnych odchyleń wielkości menzurandu X i parametrów P ujęte jest w macierzach U_X i U_P . W ogólnym przypadku wielkości X mogą korelować też z parametrami P układu pomiarowego. Opisuje to macierz U o wymiarze $[n \times k]$, podana we wzorze (5f). Taka statystyczna zależność może pojawić się pod wpływem wspólnego zewnętrznego losowego oddziaływania na X i P , np. zmiennej temperatury zewnętrznej. Liczba współczynników korelacji w macierzy U wynosi kn .

W praktyce pomiarowej, w tym w elektrycznych układach pomiarowych, zwykle występuje przypadek prostszy, gdy odchylenia mierzonych wielkości X oraz odchylenia parametrów P układu przetwarzającego pomiary nie są ze sobą skorelowane (np. X i P znajdują się w różnych miejscach i ich oddziaływanie zewnętrzne nie są ze sobą powiązane). Wówczas macierz kowariancyjna U nie występuje i $V = V^T = 0$. Równanie propagacji wariancji (5a) ma wtedy postać dwuskładnikową wg wzoru (6). Składnik pierwszy zależy od niepewności i korelacji elementów menzurandu wejściowego X w taki sam sposób, jak w ujęciu klasycznym wg GUM-S2 [1]. Składnik drugi pojawił się w metodzie rozszerzonej i stanowi jej istotę. Dotyczy on wpływu niepewności i współczynników korelacji ρ parametrów P układu realizującego funkcję przetwarzania $F(X, P)$ analogowo lub cyfrowo. Ze wzoru (6) wynika też macierz kowariancyjna (7) dla niepewności względnych przyrostów $Y - Y_0$ lub dla Y , gdy niepewności wartości początkowych zakresów wielkości wejściowych X_0 (blisko któ-

Tabela 1. Podstawowe wzory do oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych

Table 1. Basic formulas to estimate the uncertainty of indirect multi-parameter measurements

| | | | |
|--|---|--|--|
| Wg Supl. 2 GUM | Równanie podstawowe | $Y = F(X)$ (1) | |
| | Propagacja wariancji | $U_Y = S U_X S^T$ oraz $U_{\delta Y} = S_{\delta} U_{\delta X} S_{\delta}^T$ (2a, b) | |
| Metoda rozszerzona uwzględniająca korelacje i niepewności parametrów P funkcji przetwarzania $F(X, P)$ | Rozszerzone równanie podstawowe | $Y = F(X, P)$ (3) gdzie: $Y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $P = [p_1, p_2, \dots, p_k]^T$, (3a, b, c) | |
| | Odchylenia | $\Delta Y = \Delta F(X, P) = S_{X,P} [\Delta X, \Delta P]^T = S_X \Delta X + S_P \Delta P$ (4) gdzie: $S_{X,P}$ – macierz czułości o wymiarze $[(n+k) \times m]$ linearyzująca funkcję (3); $S_X = S$, S_P – macierze czułości dla ΔX i ΔP : $S_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, $S_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial p_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial p_k} \end{bmatrix}$ (4a, b) | |
| | Propagacja wariancji (przypadek ogólny dla $V = S U_S S^T \neq 0$) | $U_Y(X, P) = S_{X,P} U_{X,P} S_{X,P}^T = \begin{bmatrix} S & S_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_X & U \\ U^T & U_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^T \\ S_P^T \end{bmatrix}$ (5) $U_Y = U_{YX} + U_{YP} = S_X U_X S_X^T + U_{YP}$ (5a) | |
| | Macierze kowariancji | gdzie: $U_{YP} = S_P U_P S_P^T + S_X U S_P^T + (S_X U S_P^T)^T = S_P U_P S_P^T + V + V^T$ (5b) $U_X = \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \dots & \rho_{x1n} u_{x1} u_{xn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x1n} u_{x1} u_{xn} & \dots & u_{xn}^2 \end{bmatrix}$, $U_Y = \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \dots & \rho_{y1m} u_{y1} u_{ym} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y1m} u_{y1} u_{ym} & \dots & u_{ym}^2 \end{bmatrix}$ (5c, d) $U_P = \begin{bmatrix} u_{p1}^2 & \dots & \rho_{p1k} u_{p1} u_{pk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p1k} u_{p1} u_{pk} & \dots & u_{pk}^2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} \rho_{x1p1} u_{x1} u_{p1} & \dots & \rho_{x1pk} u_{x1} u_{pk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{xnp1} u_{xn} u_{p1} & \dots & \rho_{xnpk} u_{xn} u_{pk} \end{bmatrix}$ (5e, f) | |
| | Dla braku korelacji między X i P $V = S U_S S^T = 0$ | niepewności bezwzględne | $U_Y = S_X U_X S_X^T + S_P U_P S_P^T$ (6) |
| | | niepewności względne | $U_{\delta Y} = S_{\delta} U_{\delta} S_{\delta}^T + S_{\delta P} U_{\delta P} S_{\delta P}^T$ (7) |
| składowe niepewności typu A i B | $U_Y = U_{YA} + U_{YB} = (S U_{XA} S^T + S_P U_{PA} S_P^T) + (S U_{XB} S^T + S_P U_{PB} S_P^T)$ (8) gdzie: $U_{XA} = \begin{bmatrix} u_{Ax1}^2 & \dots & \rho_{Ax1n} u_{Ax1} u_{Axn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{Ax1n} u_{Ax1} u_{Axn} & \dots & u_{Axn}^2 \end{bmatrix}$, $U_{XB} = \begin{bmatrix} u_{Bx1}^2 & \dots & \rho_{Bx1n} u_{Bx1} u_{Bxn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{Bx1n} u_{Bx1} u_{Bxn} & \dots & u_{Bxn}^2 \end{bmatrix}$, (8a, b) $U_{PA} = \begin{bmatrix} u_{Ap1}^2 & \dots & \rho_{Ap1k} u_{Ap1} u_{Apk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{Ap1k} u_{Ap1} u_{Apk} & \dots & u_{Apk}^2 \end{bmatrix}$, $U_{PB} = \begin{bmatrix} u_{Bp1}^2 & \dots & \rho_{Bp1k} u_{Bp1} u_{Bpk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{Bp1k} u_{Bp1} u_{Bpk} & \dots & u_{Bpk}^2 \end{bmatrix}$, (8c, d) | | |

rych nie zaleca się mierzyć) są pomijalne i macierz kowariancji $\|U_X(\mathbf{X})\| \gg \|U_X(\mathbf{X}_0)\| \approx \mathbf{0}$.

Macierze kowariancji, podobnie jak niepewność pojedynczego mierzandru, są sumą dwu macierzy składowych typu A i B, tj. $U_X = U_{XA} + U_{XB}$, $U_Y = U_{YA} + U_{YB}$. W części 1. [2] podano, że skorelowane ze sobą mogą być jedynie zbiory odchyleń o niepewnościach składowych jednakowego typu, tj. u_A oraz u_B dla par wielkości tego samego lub różnego mierzandru. Dla wielkości mierzandru \mathbf{X} jedynie współczynniki korelacji ρ_A można wyznaczyć eksperymentalnie prowadząc pomiary synchronicznie [1], zaś współczynniki ρ_B szacuje się heurystycznie, podobnie jak niepewności typu B. Jeśli dwie wielkości mierzy się tym samym lub podobnym przyrządem i w tych samych warunkach, to dla u_B można przyjąć współczynnik korelacji równy 1 [3]. Dla różnych przyrządów i w różnych warunkach jest on bliski 0. Współczynnik korelacji -1 występuje wtedy, gdy zależne od wspólnych oddziaływań zmiany obu wielkości mają znak przeciwny.

Niepewności składowe typu A i typu B dla poszczególnych wielkości mierzandru wyjściowego \mathbf{Y} i składowe U_{YA} , U_{YB} jego macierzy kowariancji $U_Y = U_{YA} + U_{YB}$ – wg wzoru (8) należy osobno wyznaczać dla odchyleń opisanych niepewnościami typu A i typu B. Trzeba uwzględnić, iż w trakcie eksperymentu pomiarowego zmiany parametrów \mathbf{P} układu pomiarowego nie są rejestrowane i ich wpływ nie występuje w sposób jawny. Jeśli ich odchylenia zmieniają się losowo w krótkim czasie trwania eksperymentu pomiarowego, to elementy ich macierzy składowej U_{PA} trzeba też szacować heurystycznie (podobnie jak macierz U_{PB} dla długiego okresu zmian ich wartości), na podstawie danych technicznych i posiadanej wiedzy. Można też w specjalnie stworzonych warunkach wpływających wykonać dodatkowe pomiary dla oszacowania losowych zmian parametrów \mathbf{P} . Jeśli w czasie trwania pomiarów można przyjąć, że parametry \mathbf{P} są stałe, to macierz U_{PA} nie występuje.

3. Zastosowanie metody rozszerzonej na przykładzie dwuparametrowych pomiarów pośrednich

3.1. Przypadek ogólny pomiarów pośrednich o mierzandach 2D

Jeśli wielowymiarową funkcję przetwarzania $F(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ze wzoru (2) realizuje liniowy lub zlinearyzowany układ pomiarowy o parametrach \mathbf{P} , to otrzymuje się następujące równanie

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{X} \quad (9)$$

w którym: $\mathbf{M}(\mathbf{P})$ jest macierzą opisującą przetwarzanie mierzonego bezpośrednio n -wymiarowego mierzandru \mathbf{X} na wyznaczany pośrednio m -wymiarowy mierzand \mathbf{Y} .

Dokładność pośrednio wyznaczanych estymatorów wielkości jako elementów y_j mierzandru \mathbf{Y} zależy od niepewności i skorelowań własnych zarówno wielkości x_i mierzandru \mathbf{X} jak i k parametrów \mathbf{P} układu pomiarowego oraz od skorelowań skrosnych między \mathbf{X} i \mathbf{P} . Opisują to wzory (3)–(8) (tab. 1, pkt 2). Jeśli nie ma korelacji między elementami \mathbf{P} układu opisanego macierzą \mathbf{M} i wielkościami mierzonymi \mathbf{X} , to macierz kowariancji U_Y mierzandru \mathbf{Y} wynika ze wzoru (6), tj.:

$$U_Y(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \equiv U_{YX} + U_{YM} = S_X U_X S_X^T + S_M U_M S_M^T \quad (10a)$$

$$U_Y(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = U_{YA} + U_{YB} = S_X (U_{XA} + U_{XB}) S_X^T + S_M (U_{MA} + U_{MB}) S_M^T \quad (10b)$$

gdzie: S_X , S_M – macierze czułości dla wyznaczenia wariancji niepewności elementów mierzandru \mathbf{Y} pochodzących od niepewności wielkości mierzandru \mathbf{X} oraz od parametrów macierzy \mathbf{M} układu pomiarowego będących funkcjami jego

parametrów \mathbf{P} , U_M – jest macierzą kowariancji układu realizującego funkcję przetwarzania.

Estymację niepewności i współczynników korelacji mierzonego pośrednio mierzandru \mathbf{Y} należy przeprowadzać wg wzoru (10b), gdyż skorelowane mogą być zbiory odchyleń różnych wielkości w każdej z macierzy U_X i U_M , ale tylko o niepewnościach jednego typu A oraz B. Dla macierzy U_{XA} współczynniki korelacji ρ_{xiA} można wyznaczyć z synchronicznych pomiarów. Pozostałe ich rodzaje, to jest ρ_{xiB} , ρ_{MiA} , ρ_{MiB} , podobnie jak niepewności wyznacza się heurystycznie lub bezpośrednio z danych technicznych i badań statystycznych parametrów \mathbf{P} elementów układu pomiarowego.

Prostym przykładem zastosowania metody rozszerzonej do wyznaczania niepewności pośrednich pomiarów wielowymiarowych jest przypadek obu dwuwymiarowych (2D) mierzandru \mathbf{X} i \mathbf{Y} , z których tylko jeden jako para wielkości jest dostępna.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Macierze kowariancji i macierze czułości ze wzoru (10a) są wówczas następujące

$$U_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \rho_{x_{12}} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \\ \rho_{x_{12}} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$U_Y = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \rho_{y_{12}} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \\ \rho_{y_{12}} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix} \quad (11b)$$

$$S_X = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (11c)$$

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial M_{11}} & \frac{\partial y_1}{\partial M_{12}} & \frac{\partial y_1}{\partial M_{21}} & \frac{\partial y_1}{\partial M_{22}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial M_{11}} & \frac{\partial y_2}{\partial M_{12}} & \frac{\partial y_2}{\partial M_{21}} & \frac{\partial y_2}{\partial M_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (11d)$$

W pomiarach wielkości elektrycznych, np. w identyfikacji struktury i parametrów schematu zastępczego wnętrza badanego układu elektrycznego oraz w diagnostyce technicznej urządzeń elektrycznych, wyznacza się pośrednio napięcia i prądy wybranej gałęzi układu z pomiarów na dostępnych końcówkach. Gdy wielkości badane, np. $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T = [U_1, I_1]^T$, bezpośrednio nie są dostępne do pomiaru, to ich wartości i niepewności trzeba wyznaczyć pośrednio z wyników pomiarów napięcia i prądu innej dostępnej pary końcówek tego układu, tj. $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T = [U_2, I_2]^T$. Możliwy jest również wariant odwrotny. Dla tego rodzaju układów schematem zastępczym jest czwórnik. Jeśli jest on liniowy lub zlinearyzowany, to opisują go ogólnie dwa równania wiążące napięcia i prądy dwu par zacisków (dwu wrót). Dla prądu stałego (DC) i przemiennego (AC) o częstotliwościach niskich i średnich stosuje się układ czwórnikowy o elementach skupionych. Skorzystamy z pary jego równań (12) zwanych transmisyjnymi [14], lub też łańcuchowymi [15], zapisanych w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Jeśli czwórnik ten jest pasywny, to elementy macierzy \mathbf{A} spełniają równanie

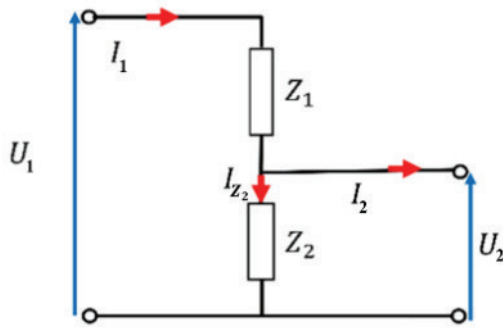
$$\det(\mathbf{A}) = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1 \quad (13)$$

W ogólnym przypadku tylko wybrane trzy z elementów macierzy \mathbf{A} są niezależne. Czwarty wyraz wynika ze wzoru (13) dla wyznacznika. Dotyczy to również niepewności tych elementów i trzech z sześciu możliwych współczynników korelacji. Jeśli schemat, wartości elementów i parametry losowe (niepewność, współczynniki korelacji) układu rzeczywistego są nieznanne, to należy posłużyć się wartościami elementów macierzy \mathbf{A} lub impedancjami schematu zastępczego czwornika pasywnego typu T lub II. Można je znaleźć eksperymentalnie z synchronicznych pomiarów na jego zaciskach.

Celem pracy jest prezentacja zastosowania rozszerzonej metody oceny niepewności w pomiarach wieloparametrowych na przykładzie pośrednich pomiarów napięcia i prądu na niedostępnym wejściu dzielnika impedancyjnego. Przypadek ogólny szacowania niepewności pomiarów za pośrednictwem czwornika typu T opiszemy szerzej w kolejnym numerze.

3.2. Podstawowe zależności układu pomiarowego z dzielnikiem impedancyjnym

Ilustrację zastosowania zaproponowanego rozszerzenia metody podanej w S2-GUM [1] przedstawimy na prostym przykładzie pośrednich pomiarów napięcia i prądu występujących na niedostępnych zaciskach wejściowych układu o strukturze dzielnika impedancyjnego (rys. 1). Takie układy stosuje się m.in. w pomiarach wysokonapięciowych.



Rys. 1. Układ obciążonego dzielnika impedancyjnego
Fig. 1. Scheme of loaded impedance divider circuit

Układ ten jest szczególnym przypadkiem czwornika liniowego pasywnego. Z praw Kirchhoffa wynikają dwa jego równania transmisyjne (14a, b) wiążące ze sobą napięcia i prądy par końcówek

$$U_1 = \frac{(Z_1 + Z_2)U_2}{Z_2} + Z_1 I_2 \quad (14a)$$

$$I_1 = \frac{U_2}{Z_2} + I_2 \quad (14b)$$

lub w postaci macierzowej (12), w której macierz \mathbf{A} opisana jest następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (14c)$$

Zależności między elementami macierzy \mathbf{A} i impedancjami Z_1, Z_2 tego układu wynikają z (14c). Oszacujemy dokładność estymatorów napięcia U_1 i prądu I_1 przez wyznaczenie macierzy kowariancji \mathbf{U}_Y dla różnych przypadków niepewności i skorelowania między mierzonymi bezpośrednio napięciem U_2 i prądem I_2 oraz obiema impedancjami układu.

3.3. Niepewności napięcia U_1 i prądu I_1 na wejściu dzielnika przy pomijalnych niepewnościach funkcji przetwarzania wyników pomiarów U_2 i I_2 na wyjściu (wg Suplementu 2 GUM)

3.3.1. Bez skorelowania U_2 i I_2 , $\rho_{22} = \rho(U_2, I_2) = 0$

W tym przypadku macierz kowariancji \mathbf{U}_Y jest tylko pierwszym składnikiem ze wzoru (9), tj.

$$\mathbf{U}_Y(\mathbf{X}) = \mathbf{S}_X \mathbf{U}_X \mathbf{S}_X^T$$

Ze wzorów (14a, b, c) otrzymuje się wariancje, czyli kwadraty standardowych niepewności $\sigma_{U_1}^2$, $\sigma_{I_1}^2$ jako funkcje elementów macierzy \mathbf{A} , wielkości mierzonych U_2 , I_2 i ich niepewności względnych δ_{U_2} , δ_{I_2}

$$\sigma_{U_1}^2 = A_{11}^2 \sigma_{U_2}^2 + A_{12}^2 \sigma_{I_2}^2 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 U_2^2 \delta_{U_2}^2 + Z_1^2 I_2^2 \delta_{I_2}^2 \quad (15a)$$

$$\sigma_{I_1}^2 = A_{21}^2 \sigma_{U_2}^2 + A_{22}^2 \sigma_{I_2}^2 = \left(\frac{U_2}{Z_2}\right)^2 \delta_{U_2}^2 + I_2^2 \delta_{I_2}^2 \quad (15b)$$

i współczynnik korelacji $\rho_{11} = \rho(U_1, I_1)$ między napięciem U_1 i prądem I_1 :

$$\rho_{11} = \frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2^2 \delta_{U_2}^2 + Z_1 I_2^2 \delta_{I_2}^2}{Z_2 \sigma_{U_1} \sigma_{I_1}} \quad (16)$$

oraz niepewności względne:

$$\delta_{U_1} = \frac{\sigma_{U_1}}{U_1} = \sqrt{a_{11}^2 \delta_{U_2}^2 + a_{12}^2 \delta_{I_2}^2} \quad (17a)$$

$$\delta_{I_1} = \frac{\sigma_{I_1}}{I_1} = \sqrt{a_{21}^2 \delta_{U_2}^2 + a_{22}^2 \delta_{I_2}^2} \quad (17b)$$

gdzie:
$$a_{11} = \frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2 + Z_1 I_2}, \quad a_{12} = \frac{Z_1 I_2}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2 + Z_1 I_2},$$

$$a_{21} = \frac{U_2}{U_2 + Z_2 I_2}, \quad a_{22} = \frac{Z_2 I_2}{U_2 + Z_2 I_2}.$$

3.3.2. Przy skorelowaniu U_2 i I_2 , $\rho_{22} \neq 0$

Niepewności bezwzględne w postaci rozwiniętej:

$$\delta_{U_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 U_2^2 \delta_{U_2}^2 + 2\rho_{22} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2 Z_1 I_2 \delta_{U_2} \delta_{I_2} + (Z_1 I_2)^2 \delta_{I_2}^2} \quad (18a)$$

$$\delta_{I_1} = \sqrt{\left(\frac{U_2}{Z_2}\right)^2 \delta_{U_2}^2 + 2\rho_{22} \left(\frac{U_2}{Z_2}\right) I_2 \delta_{U_2} \delta_{I_2} + I_2^2 \delta_{I_2}^2} \quad (18b)$$

oraz współczynnik korelacji $\rho_{11} = \rho(U_1, I_1)$

$$\rho_{11} = \frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) U_2^2 \delta_{U_2}^2 + Z_1 Z_2 I_2^2 \delta_{I_2}^2 + (2Z_1 + Z_2) \rho_{22} U_2 I_2 \delta_{U_2} \delta_{I_2}}{Z_2 \sigma_{U_1} \sigma_{I_1}} \quad (19)$$

i niepewności względne:

$$\delta_{U_1} = \sqrt{a_{11}^2 \delta_{U_2}^2 + 2\rho_{22} a_{11} a_{12} \delta_{U_2} \delta_{I_2} + a_{12}^2 \delta_{I_2}^2} \quad (20a)$$

$$\delta_{I_1} = \sqrt{a_{21}^2 \delta_{U_2}^2 + 2\rho_{22} a_{21} a_{22} \delta_{U_2} \delta_{I_2} + a_{22}^2 \delta_{I_2}^2} \quad (20b)$$

– niepewności bezwzględne i względne przy pełnym skorelowaniu napięcia i prądu ($\rho_{22} = \pm 1$):

$$\sigma_{U_1} = |A_{11} U_2 \delta_{U_2} \pm A_{12} I_2 \delta_{I_2}| \quad (21a)$$

$$\sigma_{I_1} = |A_{21} \delta_{U_2} \pm A_{22} \delta_{I_2}| \quad (21b)$$

$$\delta_{U_1} = |a_{11} \delta_{U_2} \pm a_{12} \delta_{I_2}| \quad (22a)$$

$$\delta_{I_1} = |a_{21} \delta_{U_2} \pm a_{22} \delta_{I_2}| \quad (22b)$$

Jako przykład, ze wzorów (20a, b) obliczono niepewności względne δ_{U_1} , δ_{I_1} oraz współczynniki korelacji ρ_{11} na wejściu dzielnika w funkcji prądu I_2 na jego wyjściu. Przyjęto: napięcie wyjściowe $U_2 = 5$ V, impedancje dzielnika $Z_1 = 200 \Omega$ i $Z_2 = 100 \Omega$ oraz niepewności względne pomiaru napięcia i prądu na wyjściu $\delta_{U_2} = \delta_{I_2} = 0,5\%$. Wykresy podano na rysunkach 2 i 3. Rysunek 2 zawiera przebiegi wg wzoru (19), a na rysunku 3 podano wykresy według wzorów (22a, b).

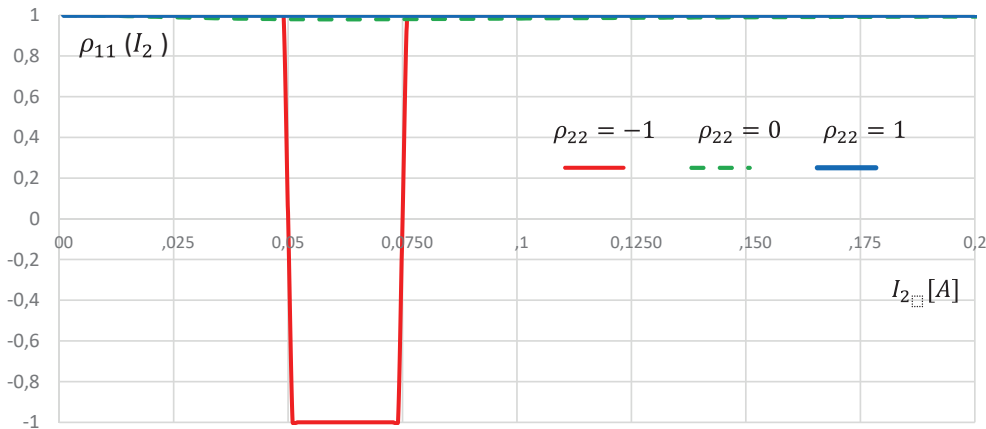
Przy pełnej korelacji napięcia U_2 i prądu I_2 mierzonych na wyjściu dzielnika, tj. gdy ich współczynnik korelacji $\rho_{22} = 1$ rów-

nież na wejściu otrzymuje się współczynnik $\rho_{11} = 1$ między U_1 i I_1 w całym zakresie pomiarów prądu wyjściowego I_2 . Podobnie niepewności napięcia i prądu na wejściu są identyczne jak na wyjściu. Ilustrują to wykresy z rysunków 2 i 3.

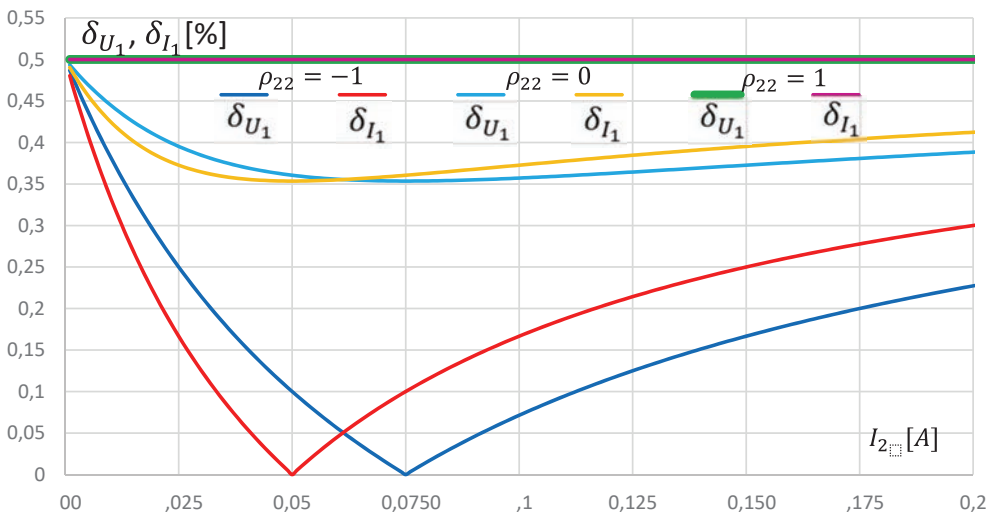
Z rys. 3 wynika, że niepewności pośredniego pomiaru wartości napięcia U_1 i prądu I_1 na wejściu dzielnika przy ujemnej korelacji $\rho_{22} = -1$ na wyjściu, maleją o niewiele ponad 0,1%. Przy ujemnej korelacji $\rho_{22} = -1$ dla mierzonych wielkości występuje obszar skokowej zmiany współczynnika korelacji ρ_{11} (rys. 2) z wartości $+1$ do -1 , gdy niepewność pomiaru prądu I_1 maleje do zera (dla 0,05 A) i wzrost z wartości -1 do $+1$, gdy niepewność pomiaru napięcia U_1 spada teoretycznie do zera (dla 0,075 A). Ze wzorów (21a, b) dla $\delta_{U_2} = \delta_{I_2} = \delta$ wynika, że punkty o niepewności równej zero, które wyznaczają przedział zmian współczynnika korelacji ρ_{11} , występują dla prądu $I_{2I} = A_{21} U_2 / A_{22} = 50$ mA i dla napięcia przy $I_{2V} = A_{11} U_2 / A_{12} = 75$ mA. Są wówczas najmniejsze niepewności pomiaru napięcia U_1 i prądu I_1 . Maleją one od wartości 0,5% do zera, a następnie powoli rosną, by na końcu zakresu 0,2 A osiągnąć 0,2–0,3% (dla $U_2 \rightarrow 0$, $I_2 \rightarrow U_1 / Z_1$, $a_{12} \rightarrow 1$, $a_{22} \rightarrow 1$; $\delta_{U_1} \rightarrow \delta$, $\delta_{I_1} \rightarrow \delta$).

3.4. Niepewności pomiarów pośrednich z uwzględnieniem niepewności układu dzielnika

Przetwarzanie mierzonego bezpośrednio mierzandru X w mierzand Y realizuje się w układzie z rysunku 1 z określonymi wartościami niepewności większymi od zera. Trzeba to uwzględnić, gdy ich wpływ nie jest pomijalny. Dla dzielnika (rys. 1) dotyczy to niepewności względnych δ_{Z_1} i δ_{Z_2} dla impedancji Z_1 , Z_2 . Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy korelacja



Rys. 2. Współczynnik korelacji $\rho_{11} = \rho(U_1, I_1)$ na wejściu dzielnika impedancyjnego w funkcji prądu wyjściowego I_2 dla trzech wartości współczynnika korelacji $\rho_{22} = \rho(U_2, I_2) = -1, 0, 1$ na wyjściu
Fig. 2. Correlation coefficient $\rho_{11} = \rho(U_1, I_1)$ at the input of the impedance divider as a function of the output current I_2 for three values of correlation coefficient $\rho_{22} = \rho(U_2, I_2) = -1, 0, 1$ at the output



Rys. 3. Niepewności względne napięcia U_1 i prądu I_1 na wejściu dzielnika w funkcji wyjściowego prądu I_2 dla trzech wartości współczynnika korelacji na wyjściu $\rho_{22} = \rho(U_2, I_2) = -1, 0, 1$
Fig. 3. Relative uncertainties of voltage U_1 and current I_1 at the divider input as function of an output current I_2 for three values of the correlation coefficient at the output $\rho_{22} = \rho(U_2, I_2) = -1, 0, 1$

wielkości wejściowych z parametrami układu nie występuje. Wówczas macierz kowariancji U_Y wyznacza się ze wzoru (6) jako sumę składowych pochodzących od niepewności wielkości wejściowych X i od parametrów układu P .

Niepewności występujące w wypadkowej macierzy kowariancji U_Y wzrastają o niepewności funkcji przetwarzania realizowanej w układzie pomiarowym. Będą one oznaczane indeksem 11, a ich składowe pochodzące od funkcji przetwarzania – literą F w indeksie. Przy skorelowaniu U_2, I_2 ze współczynnikiem ρ_{22} i skorelowaniu Z_1, Z_2 ze współczynnikiem ρ_Z otrzymuje się wzory:

$$\sigma_{U_{11}}^2 = \sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_F}^2 \quad (23a)$$

$$\sigma_{I_{11}}^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_F}^2 \quad (23b)$$

dla niepewności bezwzględnych na wejściu dzielnika, w których jako składowe występują kwadraty niepewności impedancji układu przetwarzania

$$\sigma_{U_F}^2 = \frac{1}{Z_2^2} (I_1^2 Z_2^2 \sigma_{Z_1}^2 + I_2^2 Z_1^2 \sigma_{Z_2}^2 - 2Z_1 Z_2 I_1 I_2 \rho_Z \sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}) \quad (24a)$$

$$\sigma_{I_F}^2 = \frac{U_2^2}{Z_2^2} \sigma_{Z_2}^2 \quad (24b)$$

oraz dla niepewności względnych

$$\delta_{U_{11}}^2 = \delta_{U_1}^2 + \delta_{U_F}^2 \quad (25a)$$

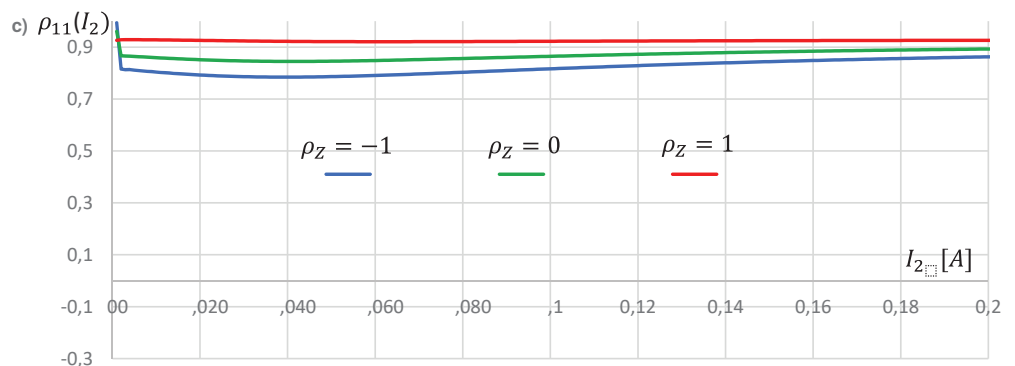
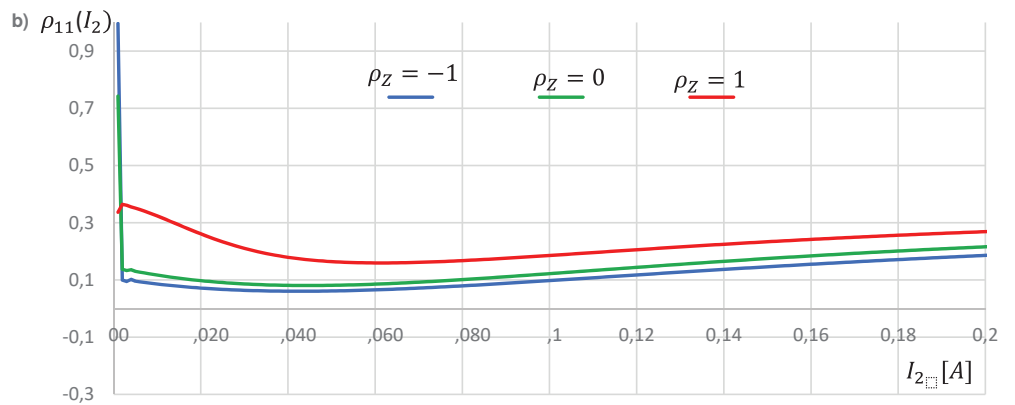
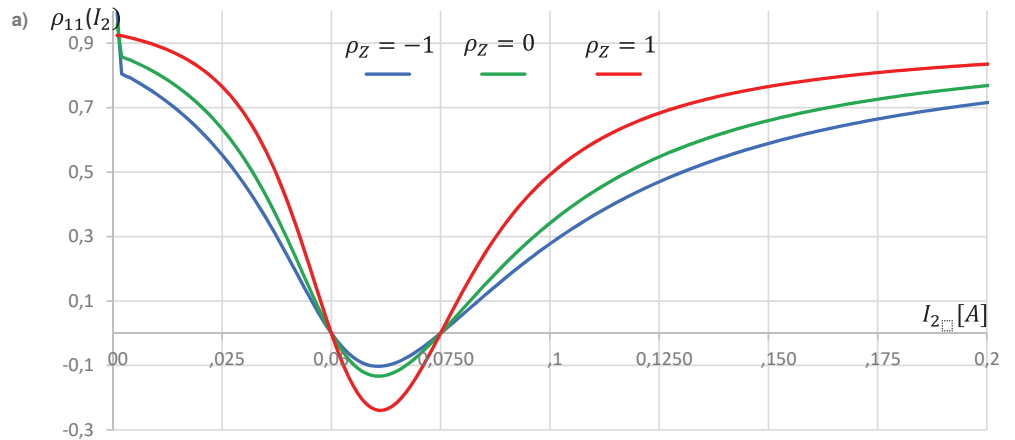
$$\delta_{I_{11}}^2 = \delta_{I_1}^2 + \delta_{I_F}^2 \quad (25b)$$

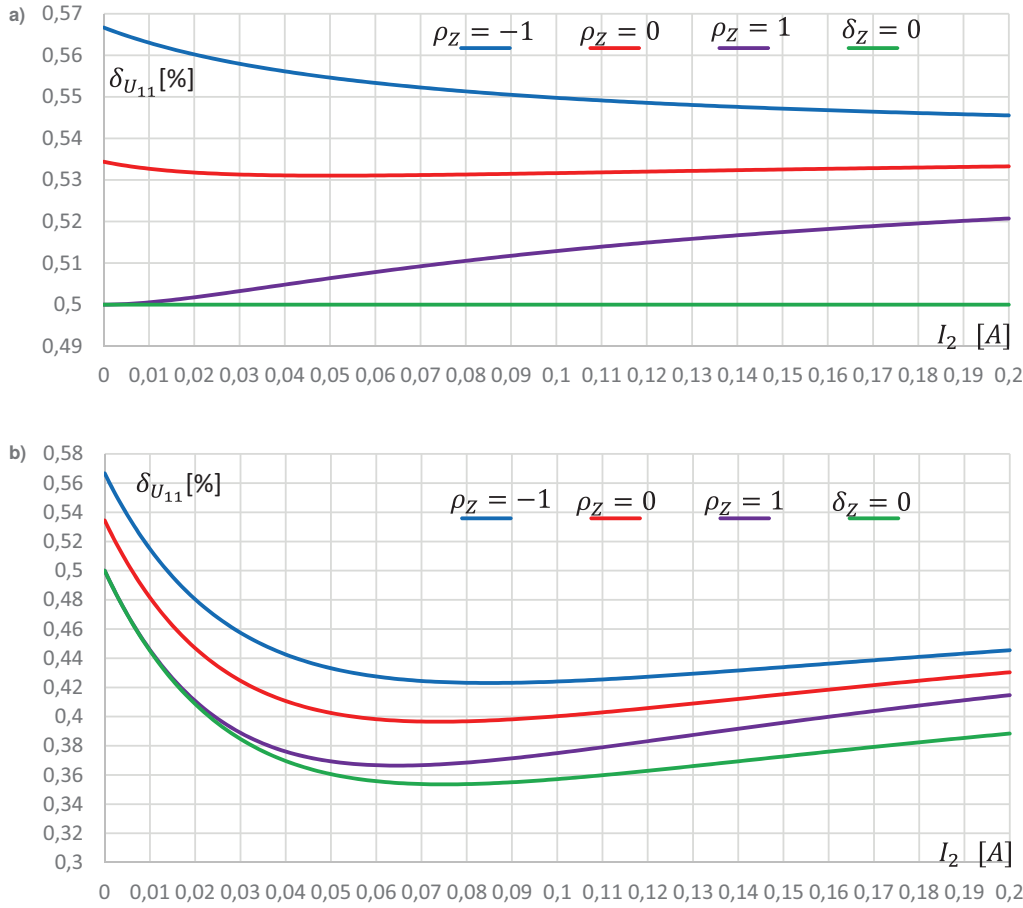
gdzie:

$$\delta_{U_F} = \frac{\sigma_{U_F}}{U_1} = Z_1 \cdot \frac{\sqrt{I_1^2 \delta_{Z_1}^2 + I_2^2 \delta_{Z_2}^2 - 2I_1 I_2 \rho_Z \delta_{Z_1} \delta_{Z_2}}}{A_{11} U_2 + A_{12} I_2} \quad (26a)$$

$$\delta_{I_F} = \frac{\sigma_{I_F}}{I_1} = \frac{U_2 \delta_{Z_2}}{Z_2 (A_{21} U_2 + A_{22} I_2)} = \frac{I_2 \delta_{Z_2}}{A_{21} U_2 + A_{22} I_2} \quad (26b)$$

Rys. 4. a, c. Współczynnik korelacji ρ_{11} na wejściu układu w funkcji prądu I_2 przy niepewnościach $\delta = 0,25\%$, $\delta_2 = 0,52\%$, współczynnikach korelacji $\rho_{22}(U_2, I_2) = (-1, 0, 1)$ i $\rho_Z(Z_1, Z_2) = (-1, 0, 1)$; b. $\delta = 0,52\%$, $\delta_2 = 0,25\%$ i współczynnikach korelacji $\rho_{22}(U_2, I_2) = (-1, 0, 1)$ i $\rho_Z(Z_1, Z_2) = (-1, 0, 1)$
Fig. 4. a, c. Correlation coefficient ρ_{11} at the input as function of output current I_2 at uncertainties; b. $\delta = 0,52\%$, $\delta_2 = 0,25\%$ and correlation coefficients $\rho_{22}(U_2, I_2) = (-1, 0, 1)$ and $\rho_Z(Z_1, Z_2) = (-1, 0, 1)$





Rys. 5. Niepewność względna napięcia na wejściu dzielnika w funkcji prądu wyjścia I_2 , dla niepewności $\delta = 0,5\%$ oraz $\delta_z = 0,2\%$ i współczynników korelacji $\rho_z = -1, 0, 1$ układu i przy ich pominięciu (wg Supl. 2 GUM): a) dla skorelowania wyjścia $\rho_{22} = 1$; b) przy braku skorelowania $\rho_{22} = 0$
 Fig. 5. Relative uncertainty of the voltage at the divider input as a function of output current I_2 , for uncertainty $\delta = 0.5\%$, the circuit $\delta_z = 0.2\%$, correlation coefficients: $\rho_z = -1, 0, 1$ and for their omission (acc. to Supl. 2 GUM): a) for correlation on the output $\rho_{22} = 1$; b) in the absence of correlation $\rho_{22} = 0$

Jeśli $\delta_{U_2} = \delta_{I_2} = \delta$, $\delta_{Z_1} = \delta_{Z_2} = \delta_z$, to niepewności bezwzględne pomiaru pośredniego napięcia i prądu na wejściu w funkcji niepewności względnych δ i δ_z wynoszą odpowiednio:

$$\sigma_{U_{11}} = \sqrt{\delta_{U_1}^2 U_1^2 + \delta_z^2 Z_1^2 (I_1^2 + I_2^2 - 2\rho_z I_1 I_2)} = \sqrt{\delta^2 (A_{11}^2 U_2^2 + 2\rho_{22} U_2 I_2 A_{11} A_{12} + I_2^2 A_{12}^2) + \delta_z^2 Z_1^2 \left[2(1 - \rho_z) \left(\frac{U_2}{Z_2} + I_2 \right) \frac{U_2}{Z_2} + I_2^2 \right]} \quad (27a)$$

$$\sigma_{I_{11}} = \sqrt{\delta_{I_1}^2 I_1^2 + I_2^2 \delta_z^2} = \sqrt{\delta^2 (A_{21}^2 U_2^2 + 2\rho_{22} U_2 I_2 A_{21} A_{22} + I_2^2 A_{22}^2) + \delta_z^2 \left(\frac{U_2}{Z_2} \right)^2} \quad (27b)$$

Zaś niepewności względne dla tego przypadku pomiarów pośrednich napięcia i prądu na wejściu:

$$\delta_{U_{11}} = \frac{\sigma_{U_{11}}}{U_1} = \sqrt{\delta_{U_1}^2 + \frac{Z_1^2 \left[2(1 - \rho_z) \left(\frac{U_2}{Z_2} + I_2 \right) \frac{U_2}{Z_2} + I_2^2 \right] \delta_z^2}{(A_{11} U_2 + A_{12} I_2)^2}} \quad (28a)$$

$$\delta_{I_{11}} = \frac{\sigma_{I_{11}}}{I_1} = \sqrt{\delta_{I_1}^2 + \frac{\left(\frac{U_2}{Z_2} \right)^2 \delta_z^2}{(A_{11} U_2 + A_{12} I_2)^2}} \quad (28b)$$

Współczynnik korelacji między U_1 i I_1 na wejściu układu wynosi:

$$\rho_{11} = \frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) U_2^2 \delta_{U_2}^2 + Z_1 Z_2 I_2^2 \delta_{I_2}^2 + (2Z_1 + Z_2) \rho_{22} U_2 I_2 \delta_{U_2} \delta_{I_2} + Z_1 U_2 \delta_{Z_2} \left(\delta_{Z_2} \frac{U_2}{Z_2} - I_1 \rho_z \delta_{Z_1} \right)}{Z_2 \sigma_{U_{11}} \sigma_{I_{11}}} \quad (29)$$

i dla par jednakowych niepewności względnych $\delta_{U_2} = \delta_{I_2} = \delta$, $\delta_{Z_1} = \delta_{Z_2} = \delta_z$ upraszcza się do

$$\rho_{11} = \frac{\delta^2 \left[\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) U_2^2 + Z_1 Z_2 I_2^2 + (2Z_1 + Z_2) \rho_{22} U_2 I_2 \right] + \delta_z^2 Z_1 U_2 \left(\frac{U_2}{Z_2} - I_1 \rho_z \right)}{Z_2 \sigma_{U_{11}} \sigma_{I_{11}}} \quad (30)$$

Rysunki 4a, b, c przedstawiają różne przypadki zależności ρ_{11} od prądu I_2 otrzymane ze wzoru (30).

Z rys. 4a wynika, że przy uwzględnieniu niepewności układu pomiarowego δ_z , występujące na rys. 2 dla $\delta_z = 0$ granice obszaru o bardzo dużym spadku wartości współczynnika korelacji $\rho_{11}(I_2)$ między U_1 i I_1 , ulegają rozmyciu, tj. zmieniają się bardziej płynnie i zależą od δ_z . Obszar ten zwiększa się dla zmniejszających się wartości współczynnika korelacji $\rho_{22} < 1$ na wyjściu dzielnika. Wartości współczynnika ρ_{11} na brzegach tego przedziału prądu zmieniają się niewiele.

Na rysunku 4b obserwuje się kilkukrotne zmniejszenie wartości ρ_{11} przy wzroście niepewności δ_z funkcji przetwarzania i zmniejszaniu się niepewności δ pomiarów napięcia i prądu na wyjściu dzielnika w stosunku do parametrów z rysunku 4c. Charakterystyki zależności współczynnika korelacji ρ_{11} od prądu na wyjściu wzrastają wraz ze współczynnikiem korelacji ρ_z .

Przy całkowitym skorelowaniu wielkości wejściowych i parametrów układu $\rho_z = 1, \rho_{22} = 1$ otrzymuje się następujące niepewności względne napięcia U_1 i prądu I_1 :

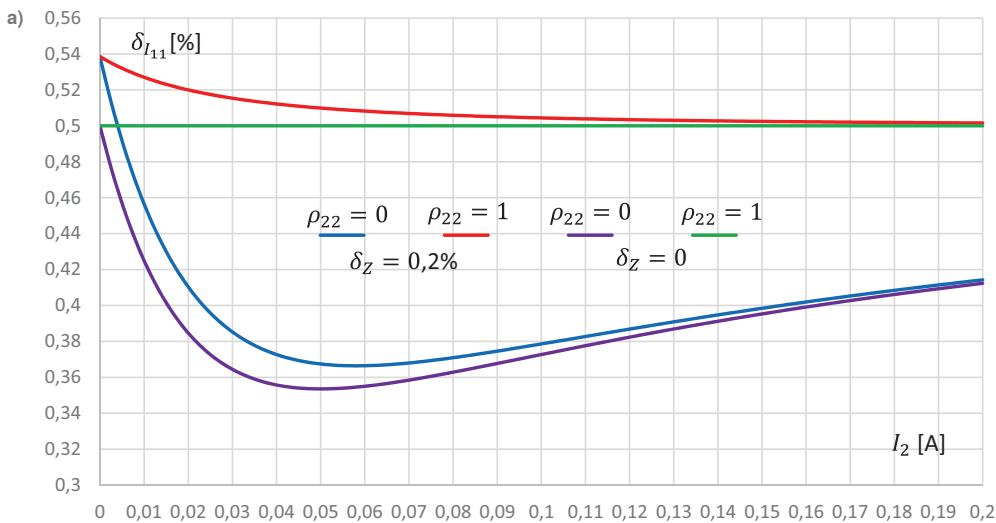
$$\delta_{U_{11}} = \frac{\sqrt{[(A_{11}U_2 + A_{12}I_2)\delta]^2 + \delta_z^2 Z_1^2 I_2^2}}{A_{11}U_2 + A_{12}I_2} \geq \delta \quad (31a)$$

$$\delta_{I_{11}} = \frac{\sqrt{[(A_{21}U_2 + A_{22}I_2)\delta]^2 + \left(\frac{U_2^2}{Z_2^2}\right)\delta_z^2}}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2} \geq \delta \quad (31b)$$

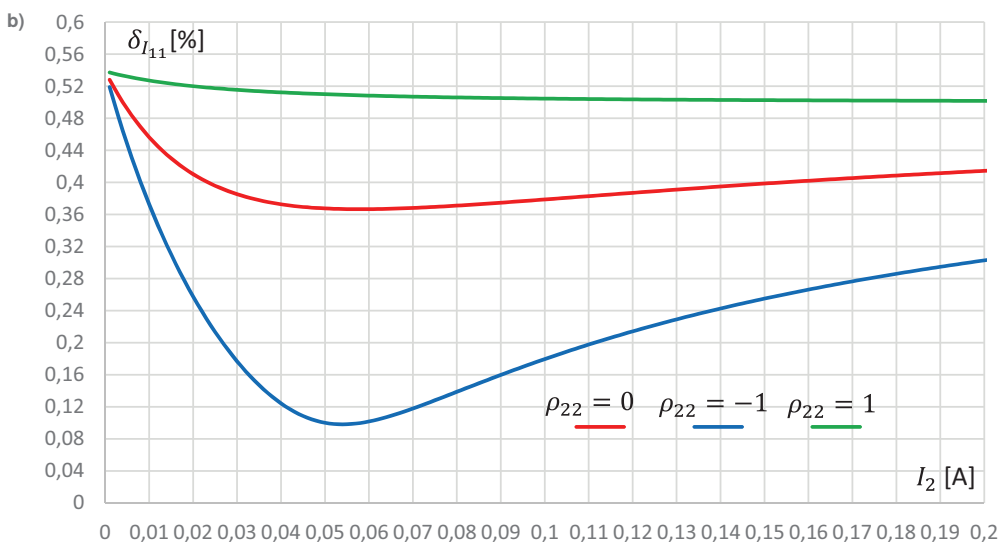
Na rysunku 5a, b przedstawiono wykresy niepewności względnej $\delta_{U_{11}} [\%]$ opisane wzorem (28a) dla pośredniego pomiaru napięcia U_1 (rys. 1) wyznaczone dla $U_1 = 5 \text{ V}$, $Z_1 = 200 \Omega$ i $Z_2 = 100 \Omega$ oraz $\delta = 0,5\%$, $\delta_z = 0,2\%$, w funkcji prądu $I_2 [\text{A}]$ przy skorelowaniu i braku skorelowania U_2 i I_2 dla trzech wartości współczynników korelacji parametrów układu. Dodatkowo zamieszczono wykres niepewności dla nieskorelowanych wielkości wejściowych przy idealnej funkcji przetwarzania.

Z rysunków 5a, b wynika, że niepewność względna $\delta_{U_{11}}$ napięcia U_1 wzrasta przy uwzględnieniu niepewności układu przetwarzania. Dla $\delta_z = 0,2\%$ charakterystyki $\delta_{U_{11}} = f(I_2)$ przebiegają coraz wyżej nad charakterystyką dla $\rho_z = 0$ przy zmniejszaniu się współczynnika skorelowania ρ_{22} dla napięcia i prądu wyjścia. Dla $\rho_{22} = 1, 0, -1$ są odległe średnio o $0,01\%$, a położenia ich płaskich minimów, występujących między $60\text{--}80 \text{ mA}$, niewiele różnią się od siebie.

Na rys 6a i b podano wykresy niepewności względnej $\delta_{I_{11}}(I_2) [\%]$ wg wzoru (28b) dla pomiaru pośredniego prądu I_1 na wejściu dzielnika przy braku skorelowania i przy skorelowaniu wielkości wejściowych. Na rysunku 7a nie występuje wpływ niepewności i korelacji impedancji Z_1, Z_2 układu. Przyjęto podobnie, jak poprzednio dla pomiaru U_2, I_2 niepewności względne $\delta_{U_2} = \delta_{I_2} = \delta = 0,5\%$ oraz $\delta_z = 0,2\%$ dla impedancji Z_1, Z_2 i wartości $U_2 = 5 \text{ V}$, $Z_1 = 200 \Omega$ i $Z_2 = 100 \Omega$. Rysunek 7b przedstawia podobne wykresy dla trzech współczynników korelacji napięcia i prądu na wyjściu układu $\rho_{22} = -1, 0, 1$ z uwzględnieniem niepewności układu przetwarzania $\delta_z = 0,2\%$.



Rys. 6. Niepewności względne pośredniego pomiaru prądu na wejściu dzielnika z rys. 1 w funkcji prądu wyjściowego I_2 dla skorelowania i braku skorelowania na wyjściu układu: a. dla $\rho_{22} = 0, 1$; b. dla $\rho_{22} = 0, -1, 1$
Fig. 6. Relative uncertainties of indirectly measured input current as a function of output current I_2 for correlations at the circuit output: a. $\rho_{22} = 0, 1$; b. $\rho_{22} = 0, -1, 1$



Z analizy charakterystyk na rysunkach 6a, b wynika, że niepewność względna $\delta_{I_1}(I_2)$ prądu I_1 na wejściu układu nieznacznie wzrasta przy uwzględnieniu niepewności $\delta_Z = 0,2\%$ dla impedancji układu przetwarzania, tj. do $0,04\%$ na początku i rzędu $0,01\%$ w pozostałej części z zanikającymi różnicami na końcu przedziału. Niepewność ta wzrasta też wraz z wartością współczynnika korelacji między impedancjami dzielnika. Odchylenia od wartości maksymalnych, bliskich $0,5\%$ dla $\delta_Z = 1$ wynoszą około $0,2\%$ dla $\delta_Z = -1$ i o około $0,1\%$ dla $\delta_Z = 0$.

4. Przykłady obliczeń wyników pośrednich pomiarów dla różnych wariantów niepewności układu pomiarowego i skorelowań

4.1. Niepewności i współczynniki korelacji dla $U = 0$

Poniżej przedstawiono przykłady obliczeń niepewności napięcia i prądu mierzonych pośrednio na niedostępnym wejściu dzielnika impedancyjnego (rys. 1) w przypadkach, gdy parametry układu są nieskorelowane skrośnie z wielkościami mierzonymi, tj. gdy $U = 0$, czyli wg wzoru (5).

$$U_Y = S U_X S^T + S_P U_P S_P^T$$

Przyjęto następujące wartości parametrów układu: impedancje: $Z_1 = 9Z_2 = 900 \Omega$, $Z_3 = 100 \Omega$, obie impedancje przy prądzie stałym DC o niepewnościach względnych $u_B = 0,2\%$, wielkości mierzone bezpośrednio na wyjściu dzielnika napięcie: $U_2 = 5 \text{ V}$, $I_2 = 50 \text{ mA}$, z niepewnością względną typu B $0,2\%$ tym samym lub różnymi przyrządami. Z tych wartości wyznaczono prąd impedancji Z_2 : $I_{Z_2} = 50 \text{ mA}$, $I_1 = I_2 + I_{Z_2} = 100 \text{ mA}$, $U_1 = 0,1 \text{ A} \cdot 900 \Omega + 5 \text{ V} = 95 \text{ V}$. Obliczono niepewności dla czterech wariantów korelacji parametrów układu i wielkości mierzonych:

1. Wielkości mierzone nieskorelowane, niepewności przetwarzania pomijalne (wg GUM-S2)
2. Wielkości mierzone nieskorelowane z uwzględnieniem niepewności układu przetwarzania
3. Wielkości mierzone skorelowane $\rho_{22} = 1$ bez uwzględnienia niepewności układu
4. Wielkości skorelowane $\rho_{22} = 1$ z uwzględnieniem niepewności i skorelowania w układzie.

W tabeli 2 zestawiono przykłady numeryczne dla skorelowanych i nieskorelowanych wielkości wejściowych i parametrów dzielnika z pominięciem lub uwzględnieniem niepewności przetwarzania i jego skorelowania.

Największe wartości niepewności δ_{I_1} dla prądu I_1 i δ_{U_1} dla napięcia U_1 otrzymano przy uwzględnieniu niepewności impedancji układu realizującego funkcję przetwarzania. Niepewność $0,14\%$ dla idealnego przetwarzania wzrasta do $0,22\%$ przy uwzględnieniu niepewności przetwarzania i pełnej korelacji zarówno napięcia i prądu na wyjściu dzielnika, jak i obu impedancji. Obserwuje się też zmniejszenie współczynnika korelacji na wejściu układu z 1 dla idealnego przetwarzania do $0,6$ przy uwzględnieniu niepewności funkcji przetwarzania.

4.2. Wpływ skorelowana impedancji układu z wielkościami mierzonymi $U \neq 0$

W tym rzadko występującym w praktyce przypadku do wzoru (5) użytego dla macierzy kowariancji U_Y w punkcie 4.1 dochodzą dwa składniki i trzeba użyć pełny wzór (3) z tabeli 1, tj.:

$$U_Y = S_X U_X S_X^T + S_P U_P S_P^T + V + V^T$$

gdzie: $V = S U S^T$.

Układ dzielnika (rys. 1) ma dwuwymiarowe (2D) mierzandy X i Y i dwie impedancje Z_1, Z_2 jako niezależne parametry wewnętrzne. Liczba możliwych współczynników korelacji wynosi 6, w tym 4 niezależne dla każdej z macierzy składowych U_A i U_B . Tylko dla macierzy $U_{X_A}(U_2, I_2)$ współczynnik ten można uzyskać eksperymentalnie, jeśli synchronicznie przeprowadzi się pomiary. Pozostałe współczynniki szacuje się heurystycznie z danych technicznych lub z inne pomiarów.

W podanych przykładach obliczeń elementów macierzy U_Y przyjmie się jednakowy współczynnik korelacji ρ_V między napięciem i prądem na wyjściu dzielnika, a impedancjami dzielnika. Wówczas

$$U = \begin{bmatrix} \rho_V \sigma_{U_2} \sigma_{Z_1} & \rho_V \sigma_{U_2} \sigma_{Z_2} \\ \rho_V \sigma_{I_2} \sigma_{Z_1} & \rho_V \sigma_{I_2} \sigma_{Z_2} \end{bmatrix}$$

Wyniki obliczeń przy skorelowaniu impedancji z wielkościami mierzonymi podano w tabeli 3.

Największe wartości niepewności uzyskano przy pełnej korelacji ρ_{22} wielkości wejściowych, pełnej korelacji $\rho_Z = 1$ impedancji układu przetwarzania i korelacji ρ_V wielkości wejściowych z parametrami układu, tj. $\rho_{22} = \rho_Z = \rho_V = 1$. Otrzymano ponad 1% dla napięcia i ponad $0,9\%$ dla prądu. W stosunku do przypadku nieskorelowanych wielkości, tj. dla korelacji $\rho_{22} = \rho_Z = \rho_V = 0$, niepewność napięcia U_2 i prądu I_2 wzrosła o około $0,7\%$. Zmiana współczynnika korelacji z $\rho_V = -1$ na $\rho_V = 1$, bez uwzględnienia innych korelacji, powoduje zwiększenie niepewności napięcia z około $0,6\%$ do około $0,8\%$, a prądu z około $0,8\%$ do około $0,6\%$ przy stałym współczynniku korelacji ρ_{11} na wejściu.

4.3. Wpływ warunków zewnętrznych, w tym nadmiernych odchyień

W trakcie pomiarów mogą wystąpić odchylenia nadmierne, tzw. *outliery*, np. indukowane przez pole elektromagnetyczne, od impulsów napięcia z sieci zasilającej, a nawet od skoków temperatury. Jeśli nie zostaną one usunięte z danych pomiarowych – np. zgodnie z kryterium Rabbsa lub tzw. metodami odpornymi [4], to przy estymacji niepewności pomiarów wg GUM, opartej obecnie na odchyleniu standardowym wartości średniej, mogą istotnie zniekształcić ocenę dokładności wyniku. Odporność na wpływ outlierów dla układu do pomiarów pośrednich można oszacować przez najgorszy przypadek przyrostów wielkości mierzonych i zmian parametrów tego układu, czyli przez błędy graniczne. Na przykład dla układu czwórnik (rys. 1), z różniczki zupełnej równań (14a, b) o jednakowym znaku przyrostów $\Delta Z_1, \Delta Z_2$ otrzymuje się

$$|\Delta U_T| \leq \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} |\Delta U_2| + Z_1 |\Delta I_2| + \left(\frac{U_2}{Z_2} + I_2 \right) \Delta Z_1 - \frac{U_2}{Z_2^2} \Delta Z_2 \quad (32a)$$

$$|\Delta I_T| \leq \frac{1}{Z_2} |\Delta U_2| + |\Delta I_2| + \left| \frac{U_2}{Z_2} \Delta Z_2 \right| \quad (32b)$$

Jeśli układ pomiarowy dokonuje cyklicznie zautomatyzowanych pomiarów w warunkach, w których występują outlierzy lub inne krótkotrwałe zakłócenia, to do składowych niepewności mierzandy Y pochodzących od niepewności pomiarów mierzandy X i od niepewności funkcji F spowodowanej przez parametry P układu, trzeba dodać geometrycznie standardowe niepewności od wpływów dodatkowych nadmiernych zakłóceń T występujących w warunkach pomiaru i przy najmniej korzystnych wartościach współczynników korelacji. Dla poszczególnych wielkości y_i mierzandy Y otrzymuje się sumę niepewności względnych

$$\delta_{y_i}^2 = \delta_{y_i, X}^2 + \delta_{y_i, F}^2 + \delta_{y_i, T}^2 \quad (33)$$

Tabela 2. Wyniki przykładów obliczeń pośrednich pomiarów napięcia i prądu na wejściu dzielnika z rys. 2
 Table 2. Results of examples of calculation in indirect voltage and current measurements at the divider input

| Lp. | Macierz S_x | ρ_{22} | Macierz U_x | Macierz S_p | ρ_z |
|-----|--|---|---|--|------------------------------------|
| 1 | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | 0 | $\begin{bmatrix} 0,0001 \text{ V}^2 & 0 \text{ VA} \\ 0 \text{ VA} & 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | – | 0 |
| | Macierz U_p | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ | Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| | – | $\begin{bmatrix} 0,0181 \text{ V}^2 & 19 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 19 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 2 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 134,54 mV/0,14% | 0,141 mA/0,14% | 0,999 |
| 2 | Macierz S_x | ρ_{22} | Macierz U_x | Macierz S_p | ρ_z |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | 0 | $\begin{bmatrix} 0,0001 \text{ V}^2 & 0 \text{ VA} \\ 0 \text{ VA} & 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,1 \text{ A} & -0,45 \text{ A} \\ 0 \text{ A} & -0,0005 \text{ A} \end{bmatrix}$ | 0 |
| | Macierz U_p | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ | Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| | $\begin{bmatrix} 3,24 \Omega^2 & 0 \Omega^2 \\ 0 \Omega^2 & 0,04 \Omega^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0586 \text{ V}^2 & 28 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 28 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 3 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 242,07 mV/0,25% | 0,173 mA/0,17% | 0,668 |
| 3 | Macierz S_x | ρ_{22} | Macierz U_x | Macierz S_p | ρ_z |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | 1 | $\begin{bmatrix} 0,0001 \text{ V}^2 & 10^{-6} \text{ VA} \\ 10^{-6} \text{ VA} & 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | – | 0 |
| | Macierz U_p | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ | Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| | – | $\begin{bmatrix} 0,0361 \text{ V}^2 & 38 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 28 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 4 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 190,00 mV/0,2% | 0,2 mA/0,2% | 1 |
| 4 | Macierz S_x | ρ_{22} | Macierz U_x | Macierz S_p | ρ_z |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | 1 | $\begin{bmatrix} 0,0001 \text{ V}^2 & 10^{-6} \text{ VA} \\ 10^{-6} \text{ VA} & 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,1 \text{ A} & -0,45 \text{ A} \\ 0 \text{ A} & -0,0005 \text{ A} \end{bmatrix}$ | 1 |
| | Macierz U_p | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ | Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| | $\begin{bmatrix} 3,24 \Omega^2 & 0,36 \Omega^2 \\ 0,36 \Omega^2 & 0,04 \Omega^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0442 \text{ V}^2 & 29 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 29 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 5 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 210,24 mV/0,22% | 0,224 mA/0,22% | 0,616 |

Tabela 3. Przykłady oszacowania niepewności U_1 i I_1 przy występowaniu skorelowania parametrów układu pomiarowego i $\delta_z = 0,1\%$ oraz wielkości mierzonych o niepewności $\delta = 1\%$

Table 3. Examples of estimation uncertainties of U_1 and I_1 for the impact of correlation of measuring circuit parameters and measured quantities and their uncertainties $\delta_z = 0.1\%$; $\delta = 1\%$

| L.p. | Macierz S_x | Macierz U_x | ρ_{22} | ρ_v |
|------|--|--|---|--|
| 1 | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0025 \text{ V}^2 & 0 \text{ VA} \\ 0 \text{ VA} & 25 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 0 | 0 |
| | ρ_z | Macierz V | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ |
| | 0 | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,4525 \text{ V}^2 & 475 \cdot 10^{-5} \text{ VA} \\ 475 \cdot 10^{-5} \text{ VA} & 5 \cdot 10^{-7} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 672,68 mV/0,71% |
| 2 | Macierz S_x | Macierz U_x | ρ_{22} | ρ_v |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0025 \text{ V}^2 & 0 \text{ VA} \\ 0 \text{ VA} & 25 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 0 | 1 |
| | ρ_z | Macierz V | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ |
| 0 | $\begin{bmatrix} 0,063 \text{ V}^2 & -0,0007 \text{ VA} \\ -0,0007 \text{ VA} & -7,5 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0589 \text{ V}^2 & 475 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 475 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 3,53 \cdot 10^{-7} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 767,22 mV/0,81% | |
| 3 | Macierz S_x | Macierz U_x | ρ_{22} | ρ_v |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0025 \text{ V}^2 & 0 \text{ VA} \\ 0 \text{ VA} & 25 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 0 | -1 |
| | ρ_z | Macierz V | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ |
| 0 | $\begin{bmatrix} -0,063 \text{ V}^2 & 0,0007 \text{ VA} \\ -0,00007 \text{ VA} & 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,337 \text{ V}^2 & 480 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 480 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 6,53 \cdot 10^{-7} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 580,19 mV/0,61% | |
| 4 | Macierz S_x | Macierz U_x | ρ_{22} | ρ_v |
| | $\begin{bmatrix} 10 & 900 \Omega \\ 0,01 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,0025 \text{ V}^2 & 25 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 25 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 25 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 1 | 1 |
| | ρ_z | Macierz V | Macierz U_y | Niepewności napięcia $\sigma_{U_{11}} / \delta_{U_{11}}$ |
| 1 | $\begin{bmatrix} 0,063 \text{ V}^2 & -0,00007 \text{ VA} \\ 0,0000675 \text{ VA} & -7,5 \cdot 10^{-8} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1,030525 \text{ V}^2 & 945 \cdot 10^{-6} \text{ VA} \\ 945 \cdot 10^{-6} \text{ VA} & 8,53 \cdot 10^{-7} \text{ A}^2 \end{bmatrix}$ | 1,015 V/1,07% | |

Wyznaczenie składników tego wzoru dla napięcia U_2 i prądu I_2 na wejściu dzielnika pozostawiamy Czytelnikowi jako sprawdzian, czy autorzy wystarczająco przejrzyście przedstawili zagadnienie.

5. Podsumowanie i wnioski

Omówiono zestawione w tabeli 1 wzory rozszerzonej metody wyznaczania niepewności pomiarów pośrednich wieloparametrowych. Metoda ta uwzględnia niepewności i skorelowania parametrów układu realizującego wielowymiarową funkcję przetwarzania. Przedstawiono przykład zastosowania tej metody w pośrednich pomiarach napięcia i prądu dwójnika dostępnego jedynie za pośrednictwem dzielnika impedancyjnego. Sytuacje takie występują w pomiarach wysokonapięciowych oraz w diagnostyce technicznej układów elektrycznych.

Jako przykład zastosowania metody rozważono szczegółowo niepewności wyznaczania napięcia i prądu na wejściu obciążonego dzielnika impedancyjnego na podstawie pomiarów na dostępnym jedynie jego wyjściu. Wyprowadzono macierzowe zależności uwzględniające niepewność realizacji funkcji przetwarzania przez ten układ. Ujmują one wzrost niepewności całkowitych estymowanego napięcia i prądu przy uwzględnianiu niepewności funkcji przetwarzania. Wzrost ten nie przekracza sum niepewności pomiarów wielkości wejściowych i niepewności parametrów układu.

W prezentowanych wariantach tego układu przyrost niepewności zmieniał się wraz z wartością i znakiem współczynników korelacji parametrów układu jak i wielkości wejściowych, a także w funkcji poboru prądu na wyjściu układu dzielnika impedancyjnego. Znaczne zmiany występowały w pomiarach pośrednich napięcia przy silnie skorelowanych wielkości wejściowych.

Omawianą metodę można z pożytkiem stosować zarówno do oceny pośrednich pomiarów wieloparametrowych wykonywanych zestawem przyrządów, jak i do oceny dokładności przyrządów i systemów pomiarowych o wbudowanym zintegrowanym układzie pomiarowym do takich pomiarów.

Autorzy zamierzają przeanalizować wyznaczanie niepewności kilka innych układów do pomiarów wieloparametrowych stosowanych w różnych dziedzinach, w tym np. pomiarów składowych mocy w sieciach trójfazowych o przebiegach odkształconych oraz zbadać właściwości statystyczne układów wieloparametrowych przy niegaussowskich rozkładach prawdopodobieństwa zbiorów odchyleń i różnych funkcjach przetwarzania wielkości mierzonych.

Bibliografia

- JCGM 100:2008, BIPM, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement. S1 JCGM 101:2008, BIPM, Supplement 1. Propagation of distributions using a Monte Carlo method. S2 JCGM 102:2011, BIPM, Supplement 2 to the ‘GUM – Extension to any number of output quantities’.
- JCGM 200:2012, BIPM, International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM) 3rd edition
- Warsza Z.L., Puchalski J., *Rozszerzona metoda oceny niepewności pośrednich pomiarów wieloparametrowych i systemów do tych pomiarów. Część 1. Wpływ korelacji i niepewności funkcji przetwarzania – zależności podstawowe*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 3, 2019, 55–63, DOI: 10.14313/PAR_233/55.
- Warsza Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia PIAP, Warszawa 2016.
- Finkelstein L., *Fundamental concepts of measurement*, ACTA IMEKO May 2014, Vol. 3, No. 1, 10–15.
- EA-4/02 M: 2013, Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu (Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration).
- Dorozhovets M., Warszawa Z.L., *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce*. „Przegląd Elektrotechniczny”, R. 83, Nr 1, 2007, 1–13.

| | |
|--|--|
| Macierz U | Macierz S_p |
| $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | – |
| Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| 0,707 mA/0,71% | 0,998 |
| Macierz U | Macierz S_p |
| $\begin{bmatrix} 0,045 \text{ V}\Omega & 0,005 \text{ V}\Omega \\ 0,0009 \text{ V} & 0,0001 \text{ V} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,1 \text{ A} & -0,45 \text{ A} \\ 0 \text{ A} & -0,0005 \text{ A} \end{bmatrix}$ |
| Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| 0,593 mA/0,59% | 1 |
| Macierz U | Macierz S_p |
| $\begin{bmatrix} -0,045 \text{ V}\Omega & -0,005 \text{ V}\Omega \\ -0,0009 \text{ V} & -0,0001 \text{ V} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,1 \text{ A} & -0,45 \text{ A} \\ 0 \text{ A} & -0,0005 \text{ A} \end{bmatrix}$ |
| Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| 0,808 mA/0,808% | 1 |
| Macierz U | Macierz S_p |
| $\begin{bmatrix} 0,045 \text{ V}\Omega & 0,005 \text{ V}\Omega \\ 0,0009 \text{ V} & 0,0001 \text{ V} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0,1 \text{ A} & -0,45 \text{ A} \\ 0 \text{ A} & -0,0005 \text{ A} \end{bmatrix}$ |
| Niepewności prądu $\sigma_{I_{11}} / \delta_{I_{11}}$ | Współczynnik korelacji ρ_{11} |
| 0,923 mA/0,923% | 1 |

8. Warsza Z.L., Ezhela V.V., *Zarys podstaw teoretycznych wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych*, „Pomiary Automatyka Kontrola”, R. 57, Nr 2, 2011, 175–179.
9. Warsza Z.L., Zięba A., *Niepewność typu A pomiaru o obserwacjach samoskorelowanych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, R. 58, Nr 2, 2012, 157–161.
10. Warsza Z.L., Puchalski J., *Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych. Część 1. Podstawy teoretyczne dla skorelowanych wielkości mierzonych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 1, 2019, 47–58, DOI: 10.14313/PAR_231/47.
11. Warsza Z.L., Puchalski J., *Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych. Część 2. Przykłady pomiarów wielkości skorelowanych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 2, 2019, 29–37, DOI: 10.14313/PAR_232/29.
12. Warsza Z.L., Puchalski J., *Wyznaczanie niepewności w pomiarach wieloparametrowych wielkości o skorelowanych składowych typu A oraz B*, „Przemysł Chemiczny”, T 98, Nr 7, 2019, 1061–1068, DOI: 10.15199/62.2019.7.5.
13. Warsza Z.L., Puchalski J., *Niepewność wieloparametrowych pomiarów wielkości skorelowanych*. „Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej”, Nr 65, 2019, 101–108.
14. Osowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów*, tom 3, rozdz. 8. Czwórniki, WNT, Warszawa 1995.
15. Bolkowski S., *Obwody elektryczne liniowe w stanie ustalonym*, WNT Warszawa 1974.

Extended Method for Evaluation Uncertainties of Indirect Multi-Parameter Measurements and of Circuits for these Measurements. Part 2. Application on the Example of a System for Indirect Two-Parameter Measurements

Abstract: In the part I of this work, the current results of the work are briefly presented regarding the impact of correlations in sets of deviations from estimators of directly measured quantities with uncertainty of types A and B on the accuracy of indirectly determined parameters of output multi-measurand. An extended mathematical model of the method contained in Supplement 2 of the GUM Guide was presented. This new extended model takes also into account the uncertainties of the processing function in multi-parameter measurements and can also be used to describe the accuracy of instruments and systems that perform such measurements. Part 2 presents examples of using the extended method to describe intermediately measured parameters of a two-terminal net through a four-terminal network, considering the uncertainties of its elements.

Keywords: multiparameter indirect measurand, menzurand, covariance matrix, uncertainty, correlation coefficient, uncertainty of processing function, four-terminal network, divider circuit

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyki i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

ORCID: 0000-0002-5055-8550

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

