

# Strategie sterowania ślizgowego z ruchomą hiperpowierzchnią przełączeń – krótki przegląd

Paweł Latosiński

Politechnika Łódzka, Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki, Instytut Automatyki, ul. B. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź

**Streszczenie:** Strategie sterowania ślizgowego są cenione za swoją całkowitą niewrażliwość na klasę zakłóceń i niepewności modelu. Uzyskanie tej właściwości jest możliwe przez sprowadzenie punktu opisującego dynamikę układu na pewną hiperpowierzchnię przełączeń zdefiniowaną w przestrzeni stanów. W początkowym etapie sterowania, w którym punkt opisujący zbliża się do tej hiperpowierzchni, układ pozostaje wrażliwy na zakłócenia, co utrudnia projektowanie skutecznych strategii sterowania ślizgowego. Aby zapewnić odporność układu na zakłócenia i niepewności modelu na wszystkich etapach procesu sterowania liczni autorzy zaproponowali zastosowanie ruchomych hiperpowierzchni przełączeń. Celem niniejszego artykułu przeglądowego jest przedstawienie najważniejszych osiągnięć z zakresu sterowania ślizgowego z wykorzystaniem takich hiperpowierzchni. Omówione są pionierskie prace proponujące zastosowanie ruchomych hiperpowierzchni przełączeń oraz przedstawione są metody ich projektowania. Następnie podkreślone są najważniejsze osiągnięcia z zakresu sterowania ślizgowego wykorzystującego ruchome hiperpowierzchnie przełączeń zarówno dla układów ciągłych jak i dyskretnych.

**Słowa kluczowe:** teoria sterowania, sterowanie ślizgowe, ruchome hiperpowierzchnie przełączeń

## 1. Wprowadzenie

Strategie sterowania ślizgowego układami ciągłymi zaistniały w literaturze rosyjskiej w połowie XX wieku [1–3]. Istotą ich działania jest sprowadzenie punktu opisującego dynamikę układu na tak zwaną hiperpowierzchnię ślizgową zdefiniowaną w przestrzeni stanów oraz utrzymanie go na tej hiperpowierzchni. Zastosowanie tego rodzaju strategii skutkuje całkowitą niewrażliwością układu na klasę zakłóceń oraz niepewności modelu [4] spełniającą tak zwane warunki dopasowania. Projektowanie regulatora ślizgowego dla układów ciągłych rozpoczyna się od zdefiniowania zmiennej ślizgowej oraz odpowiadającej jej hiperpowierzchni przełączeń w następujący sposób

$$\sigma(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}(t) = \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t)] = 0, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  jest wektorem stanu,  $\mathbf{x}_d$  – wektorem zadaniem, a przez  $\mathbf{e}$  oznaczamy uchyb zmiennych stanu.

Następnie stosowany jest sygnał sterujący

$$u(t) = \begin{cases} u_+ & \text{dla } \sigma(t) \geq 0 \\ u_- & \text{dla } \sigma(t) < 0, \end{cases} \quad (2)$$

który sprowadza punkt opisujący dynamikę układu na hiperpowierzchnię ślizgową dla dowolnych warunków początkowych. Zmienna struktura sygnału (2) zapewnia, że punkt opisujący jest utrzymywany na tej hiperpowierzchni, dzięki czemu wpływ zakłóceń na dynamikę obiektu jest odrzucony. W podobny sposób regulatory ślizgowe zostały zaprojektowane dla układów dyskretnych [5, 6]. W przypadku dyskretnym stan obiektu  $\mathbf{x}(k)$  nie jest sprowadzany bezpośrednio na hiperpowierzchnię ślizgową (1), lecz do jej ustalonego otoczenia

$$\{\mathbf{x} : |\mathbf{c}^T \mathbf{e}| \leq \delta\} \quad (3)$$

zwanego warstwą ślizgową, gdzie  $2\delta > 0$  jest szerokością tej warstwy. Mimo że w przypadku dyskretnym niemożliwe jest całkowite odrzucenie wpływu zakłóceń na układ, dyskretny regulator ślizgowy zapewniają stopień odporności na te zakłócenia proporcjonalny do szerokości warstwy ślizgowej.

Odporność na zakłócenia i niepewności modelu jest ceniona właściwością regulatorów ślizgowych, zarówno w przypadku układów ciągłych jak i dyskretnych. Właściwość ta jest jednak zapewniona jedynie w drugim etapie

### Autor korespondujący:

Paweł Latosiński, pawel.latosinski@p.lodz.pl

### Artykuł recenzowany

nadesłany 14.01.2020 r., przyjęty do druku 19.02.2020 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

sterowania, po sprowadzeniu punktu opisującego dynamikę układu do otoczenia hiperpowierzchni ślizgowej. Zanim ta hiperpowierzchnia zostanie osiągnięta, układ pozostaje natomiast wrażliwy na zakłócenia, co może mieć negatywny wpływ na dynamiczne właściwości obiektu. Faza osiągnięcia trybu ślizgowego może ponadto być długa dla względnie dużych warunków początkowych. Aby zapewnić odporność układu na zakłócenia i niepewności modelu na wszystkich etapach procesu sterowania, wielu autorów zaproponowało wykorzystanie ruchomych hiperpowierzchni przełączy w sterowaniu ślizgowym. Zastosowanie takich hiperpowierzchni sprawia, że ruch ślizgowy rozpocznie się natychmiast, dzięki czemu wpływ zakłóceń na dynamikę obiektu będzie zawsze odrzucony.

Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie najważniejszych osiągnięć z zakresu sterowania ślizgowego z ruchomymi hiperpowierzchniami przełączy i opisanie przykładowych metod projektowania takich hiperpowierzchni. Artykuł jest uporządkowany w następujący sposób. W rozdziale 2 omówione są najistotniejsze publikacje dotyczące ruchomych hiperpowierzchni przełączy dla układów ciągłych. W tym samym rozdziale zaprezentowane są przykładowe ruchome hiperpowierzchnie mające na celu zlikwidowanie fazy osiągnięcia trybu ślizgowego. Rozdział 3 poświęcony jest ruchomym hiperpowierzchniom przełączy dla układów dyskretnych. W rozdziale 4 właściwości ruchomych hiperpowierzchni przełączy są zilustrowane za pomocą przykładu symulacyjnego. Rozdział 5 zawiera krótkie podsumowanie.

## 2. Ciągłe układy dynamiczne

Strategie sterowania ślizgowego wykorzystujące ruchome hiperpowierzchnie przełączy są znacznie częściej stosowane dla układów ciągłych niż dla dyskretnych. Wynika to z bardziej korzystnych właściwości ciągłego ruchu ślizgowego, gdzie punkt opisujący dynamikę układu może być utrzymany na hiperpowierzchni przełączy, a nie tylko w jej otoczeniu, jak ma to miejsce w przypadku dyskretnym. W tym rozdziale zaprezentowane zostaną najważniejsze prace dotyczące zastosowania ruchomych hiperpowierzchni ślizgowych w sterowaniu układami ciągłymi.

### 2.1. Układy drugiego rzędu

W artykułach [7–9] zaproponowano dwie metody projektowania ruchomych hiperpowierzchni przełączy dla układów ciągłych drugiego rzędu. W pierwszej metodzie rozważana jest hiperpowierzchnia

$$\sigma(t) = c_r(t)e_1(t) + e_2(t) = 0, \quad (4)$$

gdzie  $c_r(t)$  jest funkcją skokową powodującą kilkakrotnie obrót tej hiperpowierzchni wokół początku układu współrzędnych o ustalony kąt. Druga z zaproponowanych hiperpowierzchni ma postać

$$\sigma(t) = c_p e_1(t) + e_2(t) - \alpha(t), \quad (5)$$

gdzie  $\alpha(t)$  jest skokową funkcją odpowiadającą za jej liniowe przesunięcie. Dla obydwu zaproponowanych hiperpowierzchni, funkcje  $c_r(t)$  oraz  $\alpha(t)$  są wybrane tak, aby w chwili 0 hiperpowierzchnia zawierała punkt opisujący warunki początkowe układu. Ponadto w skończonym czasie  $t_0$  hiperpowierzchnia zostaje sprowadzona do postaci zapewniającej stabilność układu zamkniętego. Zaproponowane podejście charakteryzuje się prostotą implementacji, lecz nie zapewnia całkowitej nie-

wrażliwości układu na zakłócenia w chwilach, w których skokowe funkcje  $c_r(t)$  i  $\alpha(t)$  zmieniają wartość. W odpowiedzi na ten problem, autor artykułu [10] zaproponował modyfikację hiperpowierzchni (4) i (5), w której skokowe  $c_r(t)$  i  $\alpha(t)$  zostały zastąpione liniowymi funkcjami czasu.

Autorzy pracy [11] zaproponowali modyfikację ruchomych hiperpowierzchni (4) oraz (5) z wykorzystaniem logiki rozmytej. Określając stopień przynależności punktu opisującego dynamikę układu do zdefiniowanych zbiorów rozmytych, autorzy uzyskują ciągłe funkcje obrotu lub przesunięcia hiperpowierzchni ślizgowej. Zaproponowana strategia została wykorzystana do sterowania manipulatorem robota o dwóch stopniach swobody. W artykule [12] również wykorzystano właściwości logiki rozmytej do zaprojektowania ruchomej hiperpowierzchni ślizgowej. Funkcje przynależności stanu układu do rozważanych zbiorów rozmytych zaprojektowano tak, aby ograniczyć niepożądane oscylacje wokół powierzchni ślizgowej (tzw. *chattering*).

W pracy [13] zaproponowano trzy nowe metody projektowania ruchomych hiperpowierzchni przełączy dla układów drugiego rzędu. W pierwszej metodzie rozważana jest liniowa powierzchnia

$$\sigma(t) = e_1(t) + \beta e_2(t) + \begin{cases} At + B & \text{dla } t < T \\ 0 & \text{dla } t \geq T \end{cases} \quad (6)$$

przesuwająca się ze stałą prędkością od punktu opisującego warunki początkowe obiektu do początku układu współrzędnych. Druga z zaproponowanych hiperpowierzchni jest linią przesuwającą się ze stałym przyspieszeniem

$$\sigma(t) = e_1(t) + \beta e_2(t) + \begin{cases} At^2 + Bt + C & \text{dla } t < T \\ 0 & \text{dla } t \geq T \end{cases} \quad (7)$$

Trzecia hiperpowierzchnia jest opisana nieliniową formułą gwarantującą zniwelowanie uchybu regulacji w skończonym czasie. Wszystkie zaproponowane metody dążą do minimalizacji wskaźnika *IAE* przy ograniczeniach nałożonych na sygnał sterujący. W artykule [14] strategia ślizgowa z hiperpowierzchnią (6) została ponadto wykorzystana do sterowania ruchem przenośnika podwieszonoego.

W pracy [15] wykorzystano trzy rodzaje ruchomych hiperpowierzchni zaproponowanych wcześniej [13] do sterowania położeniem statku kosmicznego. Parametry tych hiperpowierzchni zostały dobrane tak, aby zminimalizować wskaźnik optymalności *ISE*. Udowodniono, że zastosowanie ruchomych hiperpowierzchni zapewnia stabilność układu i pozwala zrealizować śledzenie trajektorii.

Autor artykułu [16] wykorzystał ruchomą hiperpowierzchnię ślizgową w sterowaniu stężeniem substratów w bioreaktorze. Mimo silnej nieliniowości rozważanego reaktora i konieczności zaspokojenia istotnych fizycznych ograniczeń dotyczących stężenia pierwiastków, autor udowodnił, że zaproponowana metoda zapewnia wszystkie pożądane właściwości układu.

Artykuł [17] opisuje alternatywne podejście do projektowania ruchomych hiperpowierzchni dla układów dynamicznych drugiego rzędu. Zaproponowano nową metodę wyboru parametrów ruchomej hiperpowierzchni ślizgowej (6) bazującą na minimalizacji wskaźnika *ITAE*. Ponadto rozważono problem ograniczenia sygnału sterującego oraz zmiennej stanu odpowiadającej za prędkość.

## 2.2. Układy trzeciego rzędu

W artykule [18] zaproponowano modyfikację liniowej hiperpowierzchni ślizgowej (6) dla układów trzeciego rzędu. W szczególności omówiono wybór parametrów  $A$  i  $B$  tej hiperpowierzchni dla dwóch przypadków. Najpierw rozważono przypadek z ograniczeniami nałożonymi na przyspieszenie, a następnie przypadek ograniczenia zarówno prędkości jak i przyspieszenia. W obydwu przypadkach parametry hiperpowierzchni zostały wybrane tak, aby zminimalizować wskaźnik jakości  $IAE$ . Minimalizacja współczynnika  $ITAE$  dla analogicznej strategii została dodatkowo rozważona w artykule [19].

W pracy [20] uwzględniono dodatkowe ograniczenie nałożone na sygnał sterujący. Pokazano, że zaproponowana strategia z ruchomą hiperpowierzchnią ślizgową może jednocześnie zapewnić ograniczenie prędkości, przyspieszenia i sygnału sterującego. Podobne ograniczenia rozważono w artykule [21], ale rozpatrzono dodatkowo problem minimalizacji współczynnika jakości  $ITAE$ .

Zastosowanie ruchomych hiperpowierzchni do ograniczenia wartości zmiennych stanu w układach trzeciego rzędu zostało również rozpatrzone w pracy [22]. Zbadano dwa typy ograniczeń prędkości w rozważanym układzie – konwencjonalne stałe ograniczenie tej wartości oraz elastyczne ograniczenie zdefiniowane przy pomocy funkcji kosztu. Skuteczność zaproponowanej strategii zilustrowano na przykładzie serwomechanizmu elektrohydraulicznego.

Wyniki dotyczące optymalnego wykorzystania ruchomych hiperpowierzchni w sterowaniu układami drugiego i trzeciego rzędu zostały zbiorczo opisane w publikacji [23].

## 2.3. Układy dowolnego rzędu

W pracy [24] zaproponowano uogólnienie hiperpowierzchni ślizgowych (4) oraz (5) na przypadek układu dowolnego rzędu. Podobnie jak w artykułach [7–9] zastosowano skokową funkcję zapewniającą obrót lub przesunięcie hiperpowierzchni w ustalonych odstępach czasu. Autorzy wykorzystali normę wektora stanu do wyznaczenia początkowego położenia hiperpowierzchni ślizgowej i obliczyli  $n - 1$  parametrów odpowiadających za jej ruch w  $n$ -wymiarowej przestrzeni stanów.

Autorzy artykułu [25] zaproponowali nową metodę projektowania ruchomej hiperpłaszczyzny ślizgowej dla  $n$ -wymiarowego układu. Metoda ta wykorzystuje ciągłe funkcje  $\lambda(t)$  oraz  $\beta(t)$  dobrane tak, aby zapewnić szybkie tempo zbieżności do stanu ustalonego jednocześnie gwarantując niewrażliwość układu na zakłócenia w każdym etapie procesu sterowania. Nieliniowe funkcje wykorzystane przez autorów zostały zaprojektowane z użyciem modelu rozmytego Takagi i Sugeno [26].

Inna metoda projektowania ruchomych hiperpowierzchni z wykorzystaniem logiki rozmytej została zaproponowana w pracy [27]. Autorzy wykorzystali model rozmyty Jamshidi i współautorów [28] do zaprojektowania hiperpowierzchni o dynamicznie zmieniającej się prędkości obrotu. Zaproponowaną strategię wykorzystali do sterowania serwomechanizmem elektrohydraulicznym.

W artykułach [29] oraz [30] zaproponowano strategię sterowania ślizgowego układami dowolnego rzędu. Strategia wykorzystuje zmodyfikowaną hiperpowierzchnię o parabolicznym kształcie. Ideą tej strategii jest dopasowanie kształtu hiperpowierzchni do naturalnej zmiany stanu układu poddanego sterowaniu ślizgowemu. Parametry rozważanej paraboli są zmienne w czasie, ale ograniczone z góry i z dołu przez wybrane stałe. W przeciwieństwie do klasycznych podejść, nowa metoda zapobiega gwałtownym zmianom stanu układu w przejściu między fazą osiągnięcia a fazą ślizgową. W szczególności, w celu ograniczenia wartości sygnału sterującego w początkowych chwilach procesu sterowania, autorzy proponują rozpoczęcie ruchu hiperpłaszczyzny ślizgowej z opóźnieniem.

W pracy [31] zaproponowano zastosowanie strategii sterowania ślizgowego z ruchomą hiperpowierzchnią przełączeń do sterowania manipulatorem elastycznym. Autorzy proponują zastosowanie dwóch hiperpowierzchni ślizgowych. Pierwsza z nich, odpowiadająca za kąt nachylenia piasty, jest niezmienna w czasie. Druga hiperpowierzchnia jest ruchoma i odpowiada za kompensację drgań elastycznego ramienia robota.

W artykułach [32–34] wykorzystano ruchome hiperpowierzchnie przełączeń w sterowaniu silnikami prądu stałego oraz silnikami indukcyjnymi. Pokazano, że zastosowanie takich hiperpowierzchni zapewnia odporność na niepewności modelu na każdym etapie procesu sterowania oraz ogranicza niepożądane oscylacje wokół hiperpowierzchni ślizgowej. W szczególności w artykule [32] eksperymentalnie wykazano odporność układu na niespodziewane zmiany parametrów i zilustrowano wydajność obliczeniową zastosowanego algorytmu.

Autorzy artykułu [35] zaproponowali nową strategię sterowania ślizgowego dla układów o jednym wejściu, w których wartość bezwzględna sygnału sterującego jest ograniczona. Zaproponowana ruchoma hiperpowierzchnia zawiera dwa składniki: stały oraz wykładniczo zbieżny do zera. Wykazano, że zastosowanie takiej hiperpowierzchni pozwala na ograniczenie wartości sygnału sterującego na każdym etapie procesu sterowania, jeśli tylko zakłócenia wpływające na układ spełniają warunki dopasowania.

W pracy [36] zaproponowano nową strategię sterowania bazującą na podziale układu czwartego rzędu na dwa podukłady drugiego rzędu. Dla obydwu dwuwymiarowych podukładów zaproponowano zastosowanie obrotowej hiperpowierzchni ślizgowej wykorzystującej reguły rozmyte do wyznaczenia kąta obrotu. Zaproponowane podejście zapewnia stabilność układu i jednocześnie znacznie upraszcza jego strukturę.

## 3. Dyskretne układy dynamiczne

Strategie wykorzystujące ruchome hiperpowierzchnie ślizgowe w sterowaniu dyskretnymi obiektami dynamicznymi nie są tak powszechne jak ich odpowiedniki dla układów ciągłych. Znacznie powszechniejszą metodą zapewnienia odporności układu dyskretnego na zakłócenia i niepewności modelu są tak zwane predefiniowane przebiegi zmiennej ślizgowej [37, 38]. Niemniej jednak, kilku autorów zdecydowało się wykorzystywać takie hiperpowierzchnie również w sterowaniu układami ciągłymi.

W artykule [39] zaprojektowano ruchomą hiperpowierzchnię ślizgową dla układów dyskretnych drugiego rzędu. Hiperpowierzchnia ta zawiera składnik „zapominający”, dzięki któremu punkt opisujący dynamikę obiektu znajduje się na tej hiperpowierzchni już w pierwszej chwili, a odpowiedź układu upodabnia się do dead-beatowej w skończonym czasie. Zaproponowana strategia została wykorzystana do sterowania serwowmotorem synchronicznym.

Nowe podejście do problemu projektowania ruchomych hiperpowierzchni ślizgowych zostało przedyskutowane w artykule [40]. Zaproponowana hiperpowierzchnia jest przesuwana tak, aby punkt opisujący dynamikę układu znajdował się na niej w każdym kroku. Hiperpowierzchnia ta jest jednak ograniczona do ustalonego obszaru przestrzeni stanów. Krawędź tego obszaru zastępuje hiperpowierzchnię ślizgową, gdy punkt opisujący przyjmuje niedopuszczalne wartości. Zaproponowana strategia została wykorzystana w sterowaniu ramieniem robota o jednym stopniu swobody.

W pracy [41] zaproponowano strategię sterowania ślizgowego dla twardych dysków. Zastosowano dyskretną hiperpowierzchnię ślizgową, która jest obracana w kilku początkowych chwilach procesu sterowania, podobnie do tej opisanej wzorem (4).

Prędkość obrotu tej hiperpowierzchni jest dobrana tak, aby uzyskać najmniejszy możliwy czas odczytu danych.

Autorzy artykułu [42] rozważali dyskretne układy dynamiczne z opóźnionym sprzężeniem zwrotnym. Zaproponowana przez nich nieliniowa hiperpowierzchnia ślizgowa zmienia się w czasie w zależności od odczytanego wejścia obiektu i ma na celu zapewnienie stabilności układu w obecności opóźnień. Autorzy wykorzystali sterowanie równoważne sprawdzające stan obiektu na hiperpowierzchnię ślizgową w każdej chwili i wykazali stabilność ruchu ślizgowego przy użyciu metody Lapunowa.

Autorzy pracy [43] rozważyli problem ograniczenia sygnału sterującego w dyskretnym sterowaniu ślizgowym. Zastosowali oni hiperpowierzchnię z dodatkowym składnikiem zależnym od przeszłego stanu układu. Waga tego składnika zmienia się w czasie i dąży asymptotycznie do zera. Parametr reprezentujący tę wagę może być dobrany tak, aby zmniejszyć wartości sygnału sterującego w początkowej fazie sterowania. Autorzy wykorzystali zaproponowaną strategię do sterowania podwójnym wirnikiem.

### 4. Przykład symulacyjny

W tym rozdziale zasada działania strategii sterowania ślizgowego z ruchomymi hiperpowierzchniami przełączeń zostanie zilustrowana na przykładzie układu drugiego rzędu. Rozważany układ ciągły jest podobny do tego wykorzystanego w publikacji [13], a jego dynamika ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= [1 + \delta_1(t)]f_1(x,t) + [1 + \delta_2(t)]f_2(x,t) + u(t) + d(t), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) = 0,1 \sin(15t),$$

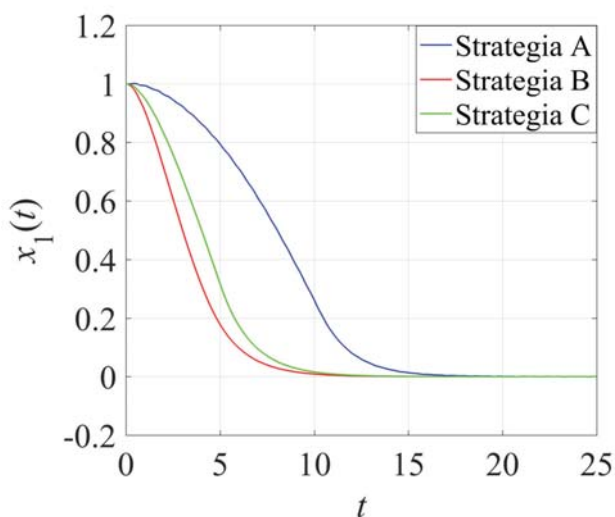
$$f_1(x,t) = -0,5x_1^4,$$

$$f_2(x,t) = -0,2(1 - x_2^2),$$

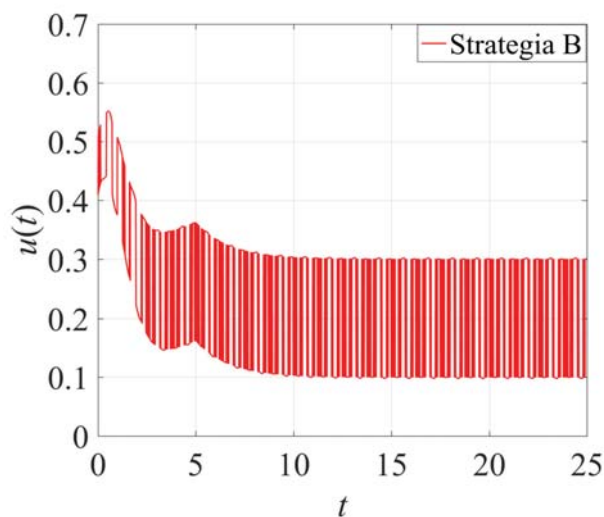
$$d(t) = 0,12 \sin(10t).$$

gdzie

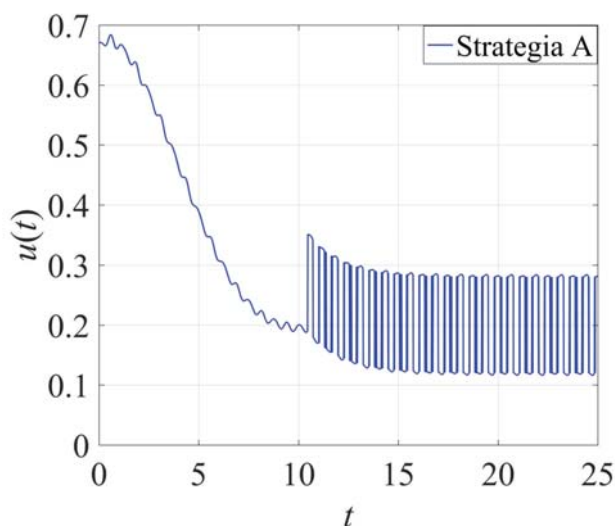
(9)



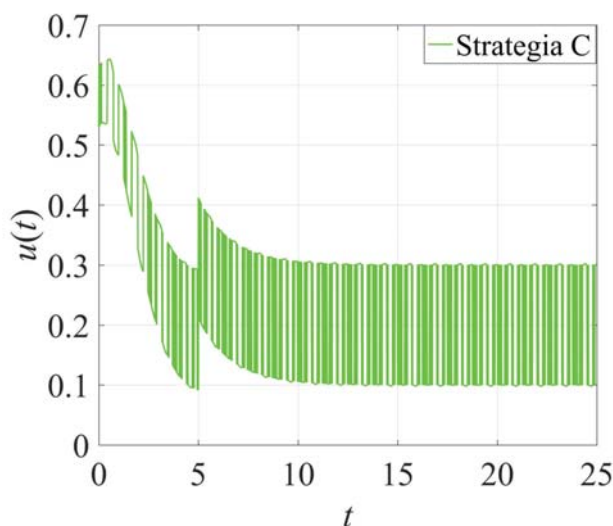
Rys. 1. Pierwsza zmienna stanu  
Fig. 1. The first state variable



Rys. 3. Sygnał sterujący dla hiperpowierzchni (6)  
Fig. 3. Control signal for hypersurface (6)



Rys. 2. Sygnał sterujący dla hiperpowierzchni niezmiennej w czasie  
Fig. 2. Control signal for the time-invariant hypersurface



Rys. 4. Sygnał sterujący dla hiperpowierzchni (7)  
Fig. 4. Control signal for hypersurface (7)

W niniejszym przykładzie trzy strategie sterowania ślizgowego zostaną zastosowane do sterowania tym układem. Celem procesu sterowania jest sprowadzenie stanu obiektu z  $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$  do zera. Rozważane strategie to:

A) Konwencjonalne sterowanie ślizgowe z nieruchomą hiperpowierzchnią przełączeń  $\sigma(t) = x_2(t) + 0,6x_1(t)$  oraz sygnałem sterującym

$$u_0(t) = -0,6x_2(t) - f_1(\mathbf{x}, t) - f_2(\mathbf{x}, t) - \left[ d_{\max} + \delta_{1\max} |f_1(\mathbf{x}, t)| + \delta_{2\max} |f_2(\mathbf{x}, t)| \right] \operatorname{sgn}[\sigma(t)]. \quad (10)$$

B) Strategia z ruchomą hiperpowierzchnią o stałej prędkości (6) zaproponowana w [13]. Parametry hiperpowierzchni to  $T = 5$ ,  $A = 0,12$ ,  $B = -0,6$ , a sygnał sterujący

$$u(t) = u_0(t) - \begin{cases} 0,6x_2(t) + A & \text{dla } t \leq T \\ 0,6x_2(t) & \text{dla } t > T. \end{cases} \quad (11)$$

C) Strategia z ruchomą hiperpowierzchnią o stałym przyspieszeniu (7) zaproponowana w [13]. Parametry hiperpowierzchni to  $T = 5$ ,  $A = -0,024$ ,  $B = 0,12$ ,  $C = -0,6$ , a sygnał sterujący

$$u(t) = u_0(t) - \begin{cases} 0,6x_2(t) + 2At + B & \text{dla } t \leq T \\ 0,6x_2(t) & \text{dla } t > T. \end{cases} \quad (12)$$

Następujące cztery rysunki ilustrują wyniki porównania. Pierwszy rysunek ilustruje przebieg pierwszej zmiennej stanu, a pozostałe trzy – wartości sygnałów sterujących.

Z rysunku 1 widać, że strategie wykorzystujące ruchome hiperpowierzchnie (6) oraz (7) zapewniają szybsze tempo zbieżności pierwszej zmiennej do stanu ustalonego niż konwencjonalne podejście z nieruchomą hiperpowierzchnią ślizgową. Rysunki 2–4 ilustrują, że wszystkie strategie generują podobne wartości sygnału sterującego w fazie ślizgowej, natomiast strategie B i C zapewniają rozpoczęcie oscylacji wokół ruchomej hiperpowierzchni już na początku procesu sterowania, dzięki czemu rozważany układ jest zawsze niewrażliwy na zakłócenia i niepewności modelu.

## 5. Podsumowanie

W niniejszym artykule dokonano przeglądu strategii sterowania ślizgowego wykorzystujących ruchome hiperpowierzchnie przełączeń. Ideą takich strategii jest zapewnienie, że punkt opisujący dynamikę układu zawsze znajduje się w bezpośrednim otoczeniu hiperpowierzchni, dzięki czemu korzystne właściwości regulatorów ślizgowych są zapewnione na każdym etapie procesu sterowania. Zaprezentowano najważniejsze publikacje omawiające wykorzystanie takich hiperpowierzchni, zarówno dla układów ciągłych jak i dyskretnych. Zasada działania ruchomych hiperpowierzchni została również zilustrowana na przykładzie ciągłego układu drugiego rzędu.

## Podziękowania

Autor artykułu dziękuje Fundacji na rzecz Nauki Polskiej za wsparcie finansowe w ramach programu START 2019.

## Bibliografia

1. Emelyanov S.V., *Variable Structure Control Systems*, Nauka, Moskwa 1967.
2. Itkis Y., *Control Systems of Variable Structure*, Nauka, Moskwa, 1976.
3. Utkin V., *Variable structure systems with sliding modes*, "IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 22, No. 2, 1976, 212–222, DOI: 10.1109/TAC.1977.1101446.
4. Drazenovic B., *The invariance conditions in variable structure systems*, "Automatica", Vol. 5, No. 3, 1969, 287–295, DOI: 10.1016/0005-1098(69)90071-5.
5. Milosavljevic C., *General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems*, "Automation and Remote Control", Vol. 46, No. 3, 1985, 307–314.
6. Drakunov S. V., Utkin V., *On discrete-time sliding modes*, "IFAC Proceedings Volumes", Vol. 22, No. 3, 1989, 273–278, DOI: 10.1016/S1474-6670(17)53647-2.
7. Choi S.B., Cheong C.C., Park D.W., *Moving switching surfaces for robust control of second-order variable structure systems*, "International Journal of Control", Vol. 58, No. 1, 1993, 229–245, DOI: 10.1080/00207179308922999.
8. Choi S.B., Park D.W., Jayasuriya S., *A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems*, "Automatica", Vol. 30, No. 5, 1994, 899–904, DOI: 10.1016/0005-1098(94)90180-5.
9. Choi S.B., Park D.W., *Moving sliding surfaces for fast tracking control of second-order dynamical systems*, "Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control", Vol. 116, No. 1, 1994, 154–158, DOI: 10.1115/1.2900671.
10. Bartoszewicz A., *A comment on 'A time-carrying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'*, "Automatica", Vol. 31, No. 12, 1995, 1893–1895, DOI: 10.1016/0005-1098(95)00122-1.
11. Ha Q., Rye D., Durrant-Whyte H., *Fuzzy moving sliding mode control with application to robotic manipulators*, "Automatica", Vol. 35, No. 4, 1999, 607–616, DOI: 10.1016/S0005-1098(98)00169-1.
12. Zhang J., Jiang K., Chen Z., Zhao Z., *Global robust fuzzy sliding mode for a class of non-linear system*, "Transactions of the Institute of Measurement and Control", Vol. 28, No. 3, 2006, 219–227, DOI: 10.1191/0142331206tim174oa.
13. Bartoszewicz A., *Time-varying sliding modes for second-order systems*, "IEE Proceedings – Control Theory and Applications", Vol. 143, No. 5, 1996, 455–462, DOI: 10.1049/ip-cta:19960535.
14. Nowacka-Leverton A., Michalek M., Pazderski D., Bartoszewicz A., *Experimental verification of SMC with moving switching lines applied to hoisting crane vertical motion control*, "ISA Transactions", Vol. 51, No. 6, 2012, 682–693, DOI: 10.1016/j.isatra.2012.05.003.
15. Yongqiang J., Xiangdong L., Wei Q., Chaozhen H., *Time-varying sliding mode controls in rigid spacecraft attitude tracking*, "Chinese Journal of Aeronautics", Vol. 21, No. 4, 2008, 352–360, DOI: 10.1016/S1000-9361(08)60046-1.
16. Tokat S., *Sliding mode controlled bioreactor using a time-varying sliding surface*, "Transactions of the Institute of Measurement and Control", Vol. 31, No. 5, 2009, 435–456, DOI: 10.1177/0142331208100893.
17. Nowacka-Leverton A., Bartoszewicz A., *ITAE optimal variable structure control of second order system with input signal and velocity constraints*, "Kybernetes", Vol. 38, No. 7–8, 2009, 1093–1105, DOI: 10.1108/03684920910976844.

18. Bartoszewicz A., Nowacka A., *Reaching phase elimination in variable structure control of the third order system with state constraints*, "Kybernetika", Vol. 42, No. 1, 2006, 111–126, <http://eudml.org/doc/33795>.
19. Bartoszewicz A., Nowacka A., *Optimal design of the shifted switching planes for VSC of a third-order system*, "Transactions of the Institute of Measurement and Control", Vol. 28, No. 4, 2006, 335–352, DOI: 10.1177/0142331206070366.
20. Bartoszewicz A., Nowacka A., *Sliding mode control of the third-order system subject to velocity, acceleration and input signal constraints*, "International Journal of Adaptive Control and Signal Processing", Vol. 21, No. 8-9, 2007, 779–794, DOI: 10.1002/acs.970.
21. Bartoszewicz A., Nowacka-Leverton A., *ITAE optimal sliding modes for third-order systems with input signal and state constraints*, "IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 55, No. 8, 2010, 1928–1932, DOI: 10.1109/TAC.2010.2049688.
22. Bartoszewicz A., Nowacka-Leverton A., *SMC without the reaching phase – the switching plane design for the third order system*, "IET Control Theory and Applications", Vol. 1, No. 5, 2007, 1461–1470, DOI: 10.1049/ietcta:20060458.
23. Bartoszewicz A., Nowacka-Leverton A., *Time-Varying Sliding Modes for Second and Third Order Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
24. Roy R. G., Olgac N., *Robust nonlinear control via moving sliding surfaces – n-th order case*, 36<sup>th</sup> Conference on Decision & Control, San Diego, USA, 1997, 943–948, DOI: 10.1109/CDC.1997.657564.
25. Lee H., Kim E., Kang H. J., Park M., *Design of a sliding mode controller with fuzzy sliding surfaces*, "IEEE Proceedings – Control Theory and Applications", Vol. 145, No. 5, 1998, 411–418, DOI: 10.1049/ip-cta:19982242.
26. Takagi T., Sugeno M., *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*, "IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics", Vol. SMC-15, No. 1, 1985, 116–132, DOI: 10.1109/TSMC.1985.6313399.
27. Park D. W., Choi S. B., *Moving sliding surfaces for high-order variable structure systems*, "International Journal of Control", Vol. 72, No. 11, 1999, 960–970, DOI: 10.1080/002071799220506.
28. Jamshidi M., Vadiiee N., Ross T. J., *Fuzzy Logic and Control: Software and Hardware Applications*, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, NJ, 1993.
29. Tokat S., Eksin I., Guzelkaya M., *A new design method for sliding mode controllers using a linear time-varying sliding surface*, "Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering", Vol. 216, No. 1, 2002, 455–466, DOI: 10.1243/095965102321042218.
30. Eksin I., Tokat S., Guzelkaya M., Soylemez M. T., *Design of a sliding mode controller with a nonlinear time-varying sliding surface*, "Transactions of the Institute of Measurement and Control", Vol. 25, No. 2, 2003, 145–162, DOI: 10.1191/0142331203tm079oa.
31. Fung E. H. K., Lee C. K. M., *Variable structure tracking control of a single-link flexible arm using time-varying sliding surface*, "Journal of Robotic Systems", Vol. 16, No. 12, 1999, 715–726, DOI: 10.1002/(SICI)1097-4563(199912)16:12<715::AID-ROB4>3.0.CO;2-6.
32. Betin F., Pinchon D., Capolino G., *A time-varying sliding surface for robust position control of a DC motor drive*, "IEEE Transaction on Industrial Electronics", Vol. 49, No. 2, 2002, 462–473, DOI: 10.1109/41.993280.
33. Sivert A., Betin F., Faqir A., Capolino G. A., *Robust control of an induction machine drive using a time-varying sliding surface*, Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Ajaccio, Francia, 2004, 1369–1374, DOI: 10.1109/ISIE.2004.1572012.
34. Sivert A., Faqir A., Nahidmobarakeh B., Betin F., Capolino G. A., *Moving switching surfaces for high precision position control of electrical drives*, Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology, Hammamet, Tunezja, 2004, 175–180, DOI: 10.1109/ICIT.2004.1490278.
35. Corradini M. L., Orlando G., *Linear unstable plants with saturating actuators: Robust stabilization with a time-varying sliding surface*, "Automatica", Vol. 43, No. 1, 2002, 88–94, DOI: 10.1016/j.automatica.2006.07.018.
36. Yorgancioglu F., Komurcugil H., *Decoupled sliding-mode controller based on time-varying sliding surfaces for fourth-order systems*, "Expert Systems with Applications", Vol. 37, No. 10, 2010, 6764–6774, DOI: 10.1016/j.eswa.2010.03.049.
37. Gao W., Wang Y., Homaifa A., *Discrete-time variable structure control systems*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 42, No. 2, 1995, 117–122, DOI: 10.1109/41.370376.
38. Latosinski P., *Sliding mode control based on the reaching law approach – a brief survey*, 22<sup>nd</sup> International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 2017, 519–524, DOI: 10.1109/MMAR.2017.8046882.
39. Yu W. C., Wang G. J., Chang C. C., *Discrete sliding mode control with forgetting dynamic sliding surface*, "Mechatronics", Vol. 14, No. 7, 2004, 737–755, DOI: 10.1016/j.mechatronics.2004.01.003.
40. Kanai Y., Mori Y., *Discrete time sliding mode control with time varying switching hyper plane*, SICE Annual Conference, Tokio, Japonia, 2008, 2349–2352, DOI: 10.1109/SICE.2008.4655058.
41. Hu Q., Du C., Xie L., Wang Y., *Discrete-time sliding mode control with time-varying surface for hard disk drives*, "IEEE Transactions on Control Systems Technology", Vol. 17, No. 1, 2009, 175–183, DOI: 10.1109/TCST.2008.922505.
42. Yadav N. K., Singh R. K., *Discrete-time nonlinear sliding mode controller*, "International Journal of Engineering, Science and Technology", Vol. 3, No. 3, 2011, 94–100.
43. Corradini M. L., Cristofano A., Orlando G., *Stabilization of discrete-time linear systems with saturating actuators using sliding modes: application to a twin-rotor system*, 50<sup>th</sup> Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, USA, 2011, 1–6, DOI: 10.1109/CDC.2011.6160601.

# Sliding Mode Control Strategies with a Time-Varying Switching Hypersurface – a Brief Survey

**Abstract:** Sliding mode control strategies are valued for their total insensitivity to the class of disturbances and uncertainty of the model. Obtaining this property is possible by bringing a point describing the dynamics of the system to a certain switching hypersurface defined in the state space. At the initial stage of control, where the description point approaches this hypersurface, the system remains sensitive to interferences, which hinders the design of effective sliding mode control strategies. To ensure the system's resistance to interference and model uncertainty at all stages of the control process, many authors proposed the use of mobile switching hypersurfaces. The purpose of this review article is to present the most important achievements in the area of sliding mode control using such hypersurfaces. Discussed are pioneering works proposing the use of mobile switching hypersurfaces and methods of their design are presented. Next, the most important achievements in the area of sliding mode control using movable switching hypersurfaces for both continuous and discrete systems are highlighted.

**Keywords:** control theory, sliding mode control, time-varying sliding hypersurface

---

## dr Paweł Latosiński

pawel.latosinski@p.lodz.pl

ORCID: 0000-0001-5580-352X



Doktor Paweł Latosiński (rocznik 1989) jest pracownikiem Instytutu Automatyki Politechniki Łódzkiej. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał w 2018 r. na tejże uczelni. Jego dorobek naukowy uwzględnia publikacje z zakresu teorii sterowania ze szczególnym uwzględnieniem dyskretnego sterowania ślizgowego. W 2019 r. został laureatem prestiżowego stypendium START ufundowanego przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej (FNP). Jego publikacje uzyskały również liczne wyróżnienia w innych konkursach dla młodych naukowców.

---