Czesław PRĘTKI
Instytut Matematyki
Politechniki Poznańskiej

KLASYFIKACJA UOGÓLNIONYCH OGNISK I UOGÓLNIONYCH KIEROWNIC STOŻKOWYCH PŁASKICH *)

Cytowane z pracy [1] autora definicje są tu ilustrowane rysunkami. Podaje się przedziały zmienności promieni i środków *uogólnionych ognisk* oraz przedziały zmienności *uogólnionych kierownic* dla dwóch zbiorów ***F*** i ***G*** tych pojęć wprowadzonych dla elipsy i hiperboli oraz jednego zbioru F dla paraboli. Zbiory te podzielone są tak jak w [1] odpowiednio na pięć i cztery podzbiory ***A-E***, ***A-D***. (Podział ten uzasadnia przytoczony z pracy [1] rysunek 4 sugerujący interpretację geometryczną tych uogólnionych pojęć).

Definicja 1.
Uogólnionym ogniskiem stożkowej nazywamy każdy okrąg podwójnie styczny do stożkowej. [1]

Elipsa i hiperbola o równaniach

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1, \quad \varepsilon = \pm 1$$

posiadają dwa zbiory uogólnionych ognisk :
zbiór ***F*** o równaniach :

$$(x - \frac{c^2}{a^2} x_0)^2 + y^2 = \frac{x_0{}^2 b^4 + y_0{}^2 a^4}{a^4}$$

oraz zbiór ***G*** o równaniach :

$$x^2 + (y + \frac{c^2}{\varepsilon b^2} y_0)^2 = \frac{x_0{}^2 b^4 - y_0{}^2 a^4}{b^4},$$

gdzie (x_0, y_0) są współrzędnymi punktu styczności stożkowej z uogólnionym ogniskiem.

Środki ognisk zbioru ***F*** są punktami osi pierwszej stożkowej (oś duża elipsy, oś rzeczywista hiperboli). Rysunek 1 pokazuje przykład uogólnionego ogniska należącego do zbioru ***F*** elipsy.

Uogólnione ogniska pierwszego zbioru oznaczać będziemy ***F*** ", natomiast uogólnione ogniska drugiego zbioru oznaczać będziemy przez ***G*** ". Rysunek nr 2 pokazuje przykład uogólnionego ogniska należącego do zbioru ***G*** hiperboli.

*) W odróżnieniu od stożkowych sferycznych [3]

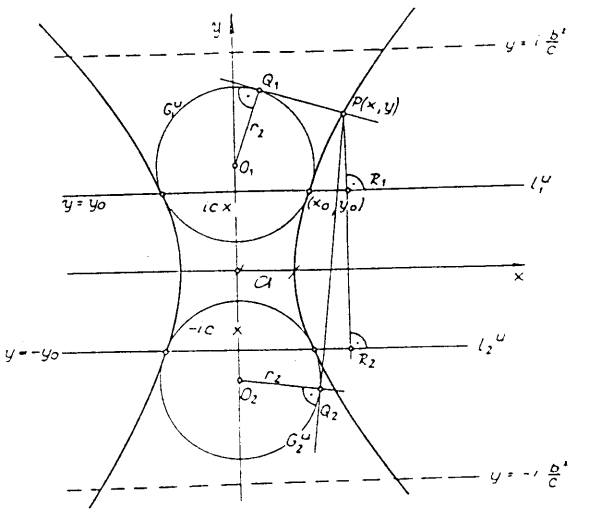
Parabola o równaniu

$$y^2 = 2px$$

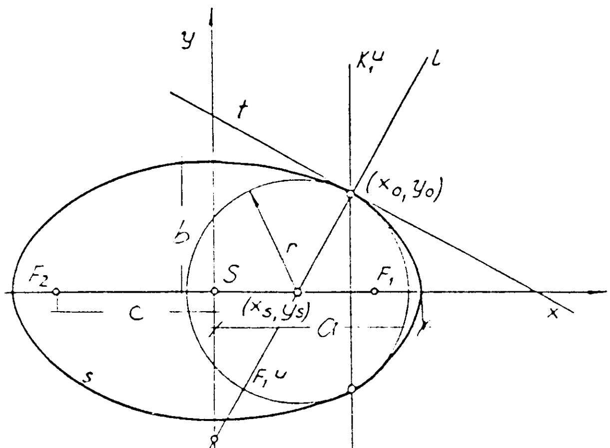
posiada tylko zbiór ognisk uogólnionych o środkach na osi paraboli, czyli ogniska F^u należące do zbioru F. Posiadają one postać :

$$(x - x_0 - p)^2 + y^2 = p^2 + y_0^{\,2}$$

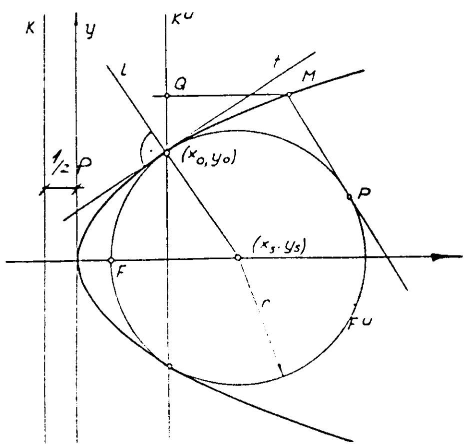
Dla paraboli zbiór G degeneruje się do pary prostych: prostej niewłaściwej i prostej stycznej do paraboli w jej wierzchołku (rys. 3)



rys.2



rys. 1



rys.3

Definicja 2.

Uogólnioną kierownicę stożkowej nazywamy prostą łączącą punkty styczności uogólnionego ogniska ze stożkową.

Jeżeli oś duża elipsy oraz oś rzeczywista hiperboli pokrywa się z osią x prostokątnego układu współrzędnych to elipsa i hiperbola o równaniach (1) posiadają dwa zbiory uogólnionych kierownic :

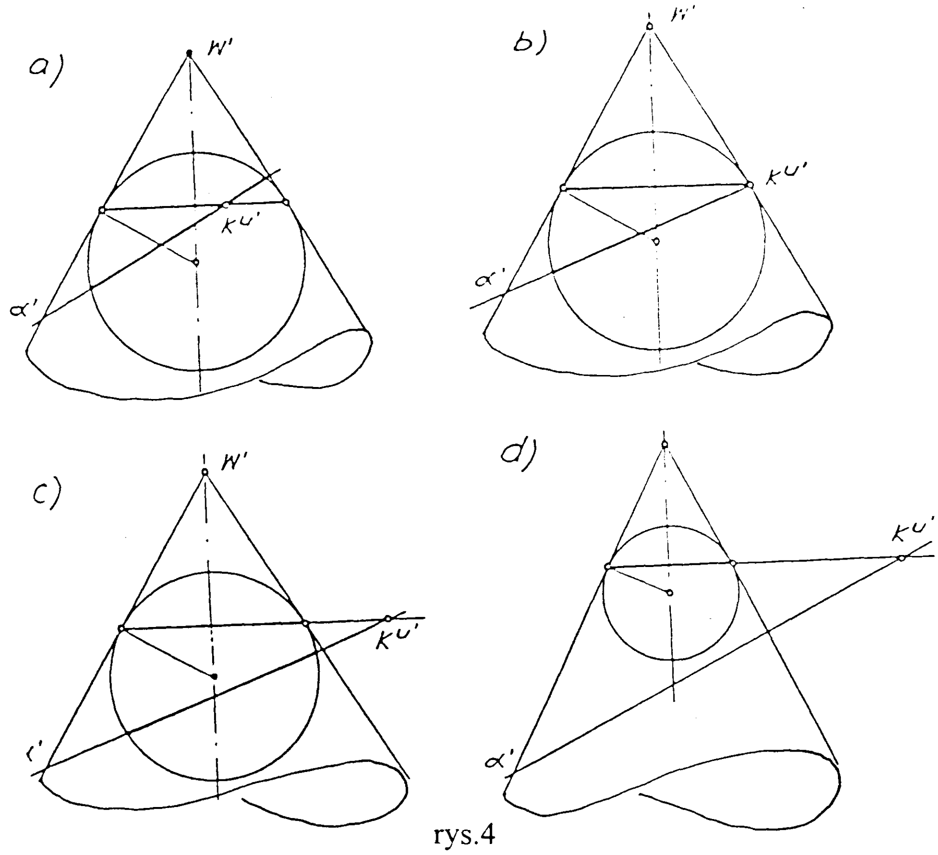
Zbiór ***K*** – kierownic k^u o równaniach $x = x_0$,

Zbiór ***L*** – kierownic l^u o równaniach $y = y_0$,

przy czym do zbioru ***K*** należą dwie kierownice w zwykłym sensie k_1, k_2 $(x_0 = (\pm\frac{a^2}{c})$,

natomiast do zbioru L należą dwie urojone kierownice w zwykłym sensie l_1, l_2 $(y_0 = \pm i\frac{b^2}{c})$.

Parabola posiada tylko jeden zbiór kierownic ***K***.



rys.4

Uogólnione ogniska należące do zbioru ***F*** można podzielić na podzbiory :

A: zawierający okręgi podwójnie styczne do stożkowej w punktach rzeczywistych różnych (rys. 4a)

B: zawierający okręgi nadściśle styczne (rys. 4b),

C: zawierający okręgi podwójnie styczne do stożkowej w punktach urojonych sprzężonych (rys. 4c), *D*: zawierający okręgi urojone podwójnie styczne do stożkowej w punktach urojonych (rys. 4d),

E: zawierający okręgi urojone podwójnie styczne do stożkowej w punktach urojonych ale nie sprzężonych. Przyporządkowane tym okręgom kierownice są prostymi urojonymi. Ogniska te są przecięciami płaszczyzny stożkowej z powierzchniami urojonych kul wpisanych w stożek.

Zwykłe ogniska stożkowej, interpretowane jako pary prostych izotropowych zaliczamy do zbioru *C*.

Dla uogólnionych ognisk **elipsy** należących do zbioru :

A: promienie są zawarte w przedziale $(\frac{b^2}{a}, b\,\rangle$,

środki w przedziale $\left(-\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{a}\right)$,

kierownice w przedziale $(-a, a)$;

B: promienie są równe $\frac{b^2}{a}$,

środki mają współrzędne $x = \pm\frac{c^2}{a}$,

kierownice mają współrzędne $x = \pm a$;

C: promienie są zawarte w przedziałach $(0, \frac{b^2}{a})$,

środki są zawarte w przedziałach $< -c, -\frac{c^2}{a}), (\frac{c^2}{a}, c >$,

kierownice w przedziałach $< -\frac{a^2}{c}, a), (a, \frac{a^2}{c} >$;

D: promienie są urojone,

środki są zawarte w przedziałach $(-\infty, -c), (c, \infty)$,

kierownice w przedziałach $(-\infty, \frac{a^2}{c}), (\frac{a^2}{c}, \infty)$;

E: promienie są urojone,

środki i kierownice są elementami urojonymi określonymi współrzędnymi zawartymi w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Dla ognisk **hiperboli** należących do podzbioru:

A: promienie są zawarte w przedziałach $(-\infty, -\frac{b^2}{a}), (\frac{b^2}{a}, \infty)$,

środki w przedziałach $(-\infty, \frac{c^2}{a}), (\frac{c^2}{a}, \infty)$,

kierownice w przedziałach $(-\infty, -a), (a, \infty)$;

B: promienie są równe $\frac{b^2}{a}$,

środki mają współrzędne $x = \pm\frac{c^2}{a}$,

kierownice mają współrzędne $x = \pm a$;

C: promienie są zawarte w przedziale $<0, \frac{b^2}{a})$,

środki w przedziałach $(-\frac{c^2}{a}, c>, <c, \frac{c^2}{a})$,

kierownice w przedziałach $(-a, -\frac{a^2}{c}>, <\frac{a^2}{c}, a)$;

D: promienie są urojone ,
środki są zawarte w przedziale $(-c, c)$,

kierownice w przedziale $(-\frac{a^2}{c}, \frac{a^2}{c})$;

E: promienie są urojone,
środki i kierownice są elementami urojonymi określonymi współrzędnymi zawartymi w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Dla uogólnionych ognisk **paraboli** należących do podzbioru :

A: promienie są zawarte w przedziale (p, ∞);
środki w przedziale (p, ∞),
kierownice w przedziale $(0, \infty)$;

B: promień jest równy p,
środek ma współrzędną $x = p$,
kierownica równanie $x = 0$;

C: promienie są zawarte w przedziale $<0, p)$,

środki w przedziale $<\frac{p}{2}, p)$,

kierownice w przedziale $<-\frac{p}{2}, 0)$

D: promienie są urojone,

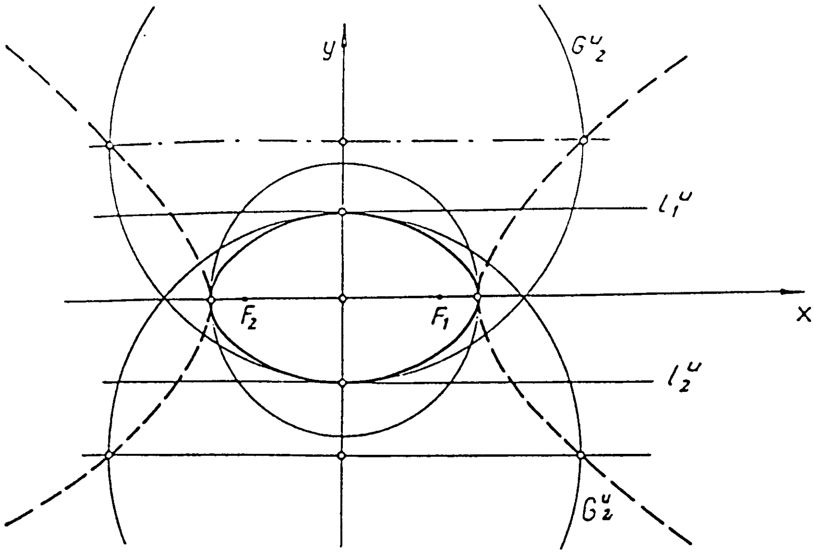
środki są zawarte w przedziale $(-\infty, \frac{p}{2})$,

kierownice w przedziale $(-\infty, -\frac{p}{2})$;

E: promienie są urojone,
środki i kierownice są elementami urojonymi określonymi współrzędnymi zawartymi w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Klasyfikacja zbioru G

W pracy [1] pokazano, że zbiorem takich punktów ognisk G^u, które położone są ekstremalnie względem drugiej osi stożkowej jest hiperbola o półosiach $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{c}$ (rys. 5).



rys.5

W oparciu o tę własność zbiór G można podzielić na podzbiory :

A: zawierający okręgi podwójnie styczne do stożkowej w punktach rzeczywistych różnych,
B: zawierający okręgi nadściśle styczne,
C: zawierający okręgi podwójnie styczne do stożkowej w punktach urojonych sprzężonych,
D: zawierający okręgi urojone podwójnie styczne do stożkowej w punktach urojonych.
Przyporządkowane tym ogniskom uogólnione kierownice są prostymi urojonymi.

Zwykłe ogniska urojone stożkowej interpretowane jako pary nie sprzężonych prostych izotropowych zaliczamy do zbioru $\boldsymbol{D}$.

Dla ognisk elipsy należących do zbioru G:

A: promienie są zawarte w przedziale $< a, \dfrac{a^2}{b})$

środki w przedziale $(-\dfrac{c^2}{b}, \dfrac{c^2}{b})$,

kierownice w przedziale $(-b, b)$;

B: promienie są równe $\dfrac{a^2}{b}$, środki mają współrzędne $y = \frac{c^2}{b}$, kierownice mają współrzędne $y = \pm b$;

C: promienie są zawarte w przedziale $(-\infty, -\frac{a^2}{b})$,

środki w przedziałach $(-\infty, -\frac{c^2}{b}), (\frac{c^2}{b}, \infty)$,

kierownice w przedziałach $(-\infty, -b), (b, \infty)$;

D: promienie są urojone, środki i kierownice są elementami urojonymi określonymi współrzędnymi zawartymi w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Dla uogólnionych ognisk hiperboli należących do zbioru G:

A: promienie są zawarte w przedziale $< a, \infty)$,
środki w przedziale $(-\infty, \infty)$,
kierownice w przedziale $(-\infty, \infty)$;

B: dla hiperboli zbiór B jest zbiorem pustym;
C: dla hiperboli zbiór C jest zbiorem pustym;
D: promienie są bądź równe zero bądź urojone, środki i kierownice są elementami urojonymi zawartymi w przedziale $(-\infty, \infty)$.

LITERATURA:

[1]. Cz. Prętki: "Uogólnione ogniska stożkowej", Zeszyty Naukowe Geometria X, Poznań 1978.

[2]. J. Kaczmarek: "Stożkowe określone punktami, stycznymi oraz stożkową ściśle styczną", Rozprawy P.P. 1968.

[3]. J. Kaczmarek Cz. Prętki: "Generalised Foci of Sphero-Conic", Zeszyty Naukowe Geometria XXI, Poznań 1995.

CLASSIFICATION OF GENERALISED FOCI AND GENERALISED DIRECTRICES OF PLANAR CONICS

This paper quotes author's definitions [1] and illustrates them with some drawings. Variability intervals for radii and centres of generalised foci and variability intervals for generalised directrices are given for two sets F and G of these concepts introduced for an ellipse and a hyperbola and for its set F for a parabola. The sets are divided into five and four subsets, respectively, according to the work [1]. (The division is justified by the drawing 4, quoted from the work [1], that suggests geometrical interpretation of these generalised concepts.)

Recenzent : Dr hab. inż. Ludmiła CZECH - prof. Politechniki Częstochowskiej