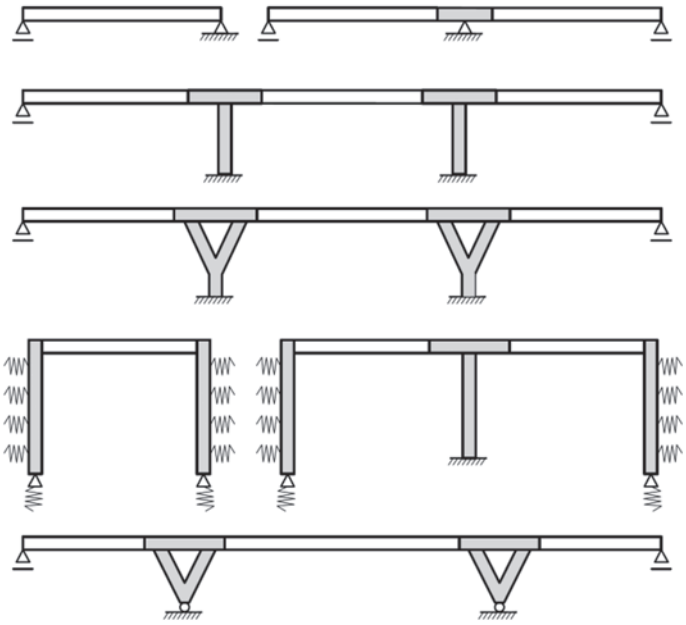
Ocena sposobów obliczeń redystrybucji sił wewnętrznych w obiektach mostowych z belek prefabrykowanych w świetle zaleceń

RADOSŁAW OLESZEK

Politechnika Warszawska
r.oleszek@il.pw.edu.pl

Obiekty mostowe z belek prefabrykowanych stosowano w Polsce w latach 60., 70. i 80. XX wieku. Ta technologia zapewnia ograniczenie deskowań, przyspieszenie i zmniejszenie kosztów budowy oraz umożliwia komunikację pod wznoszoną konstrukcją. W początkowym okresie budowano przęsła swobodnie podparte. Z uwagi na wadliwą pracę urządzeń dylatacyjnych, odkształcenia pomostu między belkami, uszkodzenia łożysk, problemy z trwałością, niekorzystny schemat statyczny oraz chęć poprawienia warunków eksploatacyjnych obiektów, na początku lat 90. przebudowywano ustroje wolnopodparte na układy o pozornym lub pełnym uciągleniu.



Rys. 1. Przykłady schematów statycznych stosowanych w obiektach mostowych z belek prefabrykowanych

Współczesne strunobetonowe belki prefabrykowane mogą być stosowane w różnorodnych układach konstrukcyjnych i schematach statycznych (rys. 1). Umożliwia to uzyskiwanie trwalszych i korzystniejszych konstrukcji hiperstatycznych. Ich obliczenia statyczne wykraczają zwykle poza zakres objęty rozwiązaniami katalogowymi i w pewnych aspektach wymagają indywidualnego traktowania. Konstrukcje przęseł wynikają zwykle z przyjętego kształtu katalogowego belki prefabrykowanej, która również może podlegać niewielkim modyfikacjom. Obejmują one najczęściej indywidualne trasowanie sprężenia, np. korektę liczby splotów lub zasięgu ich osłonek przy końcach prefabrykatów. Geometrię belki pozostawia się bez zmian w stosunku do katalogu. Strefy podporowe ustrojów hiperstatycznych kształtuje się w postaci monolitycznych węzłów uciąglających, wykonanych najczęściej z betonu zbrojonego.

Kompleksowa analiza wpływu obciążeń ruchomych, oddziaływań termicznych, fazowego montażu, sprężenia belek, zjawisk reologicznych i związanych z nimi redystrybucji sił na obiekty o konstrukcji mieszanej (belki sprężone i elementy żelbetowe) wymaga zastosowania specjalistycznych programów zorientowanych na budownictwo mostowe (np. *SOFiSTiK, Midas, Lusas*). Niezbędne jest wówczas korzystanie ze złożonego modelu numerycznego obiektu, wraz z odwzorowaniem sprężenia belek, uwzględnianiem strat reologicznych siły sprężającej w czasie składowania belek i po wbudowaniu ich w obiekt o układzie hiperstatycznym, a także zdefiniowanie odmiennych faz montażowych pracy konstrukcji. Konieczne jest oszacowanie odkształceń pełzania różnych fragmentów konstrukcji od obciążeń ciężarem własnym, wyposażeniem i sprężeniem prefabrykatów według wybranego modelu reologicznego, pracujących w układzie uciąglonym. Wymaga to dużego nakładu pracy i jest zasadne w przypadku wdrażania nowych systemów prefabrykacji. W powszechnie stosowanych i sprawdzonych konstrukcjach mostowych z prefabrykatów tak obszerna analiza nie jest konieczna.

Z inżynierskiego punktu widzenia istotna jest możliwość analizy tych popularnych konstrukcji w ogólnie dostępnych, niespecjalistycznych programach MES do obliczeń statycznych, bez dokładnego wnikania w złożoność zjawisk wynikających z efektów reologicznych i fazowego montażu.

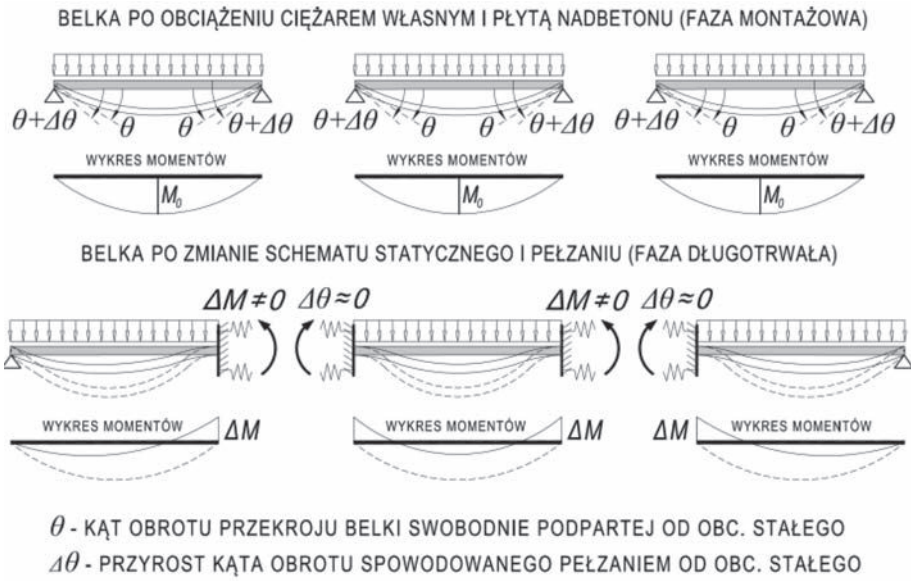
W pracy omówiono uproszczone sposoby oszacowania redystrybucji sił wewnętrznych wywołanej zjawiskami reologicznymi i fazowaniem montażu w schematach uciąglonych. Scharakteryzowano zalecenia obecnego systemu norm PN-EN [20, 21] i wybrane metody obliczeniowe stosowane powszechnie zagranicą [2, 4, 7÷10, 12, 14÷16, 18, 19]. W krajowym piśmiennictwie metody podobne do zaprezentowanych w artykule, w nieco uproszczonej formie, przedstawiono w [1, 13, 17].

Fazy pracy konstrukcji

Analiza obliczeniowa mostowych konstrukcji zespolonych ze strunobetonowych belek prefabrykowanych zespolonych z żelbetową płytą pomostową jest złożona z uwagi na wpływ

zjawisk reologicznych, zarysowanie żelbetowych fragmentów monolitycznych i odmienne schematy statyczne w poszczególnych stadiach obciążenia. Zwykle obejmuje trzy zasadnicze etapy [1, 2, 4, 7÷10, 13, 14, 17]:

- ***Etap I*** – sprawdzenie wytężenia belek obciążonych podczas montażu konstrukcji (ciężar własny prefabrykatów, mieszanki betonowej i ewentualnie deskowań); schemat statyczny w postaci belki wolnopodpartej,
- ***Etap II*** – analiza ustroju pracującego w docelowym schemacie hiperstatycznym na dodatkowe obciążenia długotrwałe, takie jak ciężar własny elementów dobetonowanych w schemacie ostatecznym (węzły, poprzecznice podporowe), usunięcie podpór montażowych i deskowań fragmentów monolitycznych, ciężar wyposażenia, osiadania podpór, skurcz betonu. Tę fazę pracy można podzielić na dwa podetapy:
  - o ***Etap IIa*** – konstrukcja ciągła w okresie tuż po wybudowaniu, obciążona ciężarem własnym węzłów uciąglających, poprzecznic podporowych i filarów w wyniku usunięcia deskowań części monolitycznych oraz reakcjami od usunięcia podpór montażowych,
  - o ***Etap IIb*** – konstrukcja ciągła po długotrwałej eksploatacji i zakończeniu procesów reologicznych,
- ***Etap III*** – obliczenia konstrukcji w schemacie ciągłym z obciążeniami eksploatacyjnymi krótkotrwałymi (tłum, tabor samochodowy, oddziaływania termiczne).



Rys. 2. Mechanizm powstawania wtórnych efektów reologicznych – przyrost odkształceń i kątów obrotu belek wolnopodpartych poddanych pierwotnym efektom pełzania i ich zachowanie się w schematach hiperstatycznych (utwierdzenie podatne)

Charakterystyczne fazy pracy (stadia obciążenia) konstrukcji z prefabrykatów powodują konieczność rozbudowanej analizy statyczno-wytrzymałościowej.

Redystrybucja sił wewnętrznych

Specyfika konstrukcji mieszanych z prefabrykatów i części monolitycznych, w szczególności o schematach ciągłych lub ramowych, jest związana z redystrybucją (przegrupowaniem) sił wewnętrznych wynikającą z [1, 2, 4÷18, 20÷22]:

- różnicy skurczów płyty (nadbetonu), belki prefabrykowanej i węzłów uciąglających budowanych w różnym czasie,
- redystrybucji naprężeń w przekrojach zespolonych i fragmentach monolitycznych związanych z pełzaniem od obciążeń stałych (ciężar własny, sprężenie, wyposażenie),
- ograniczenia swobody odkształceń pełzania poszczególnych elementów konstrukcji i wzbudzaniem dodatkowych sił wewnętrznych,
- pełzania od sprężenia i związanych z nim reologicznych strat sił naciągu strun prefabrykatów zachodzących w belkach pracujących w układzie ciągłym,
- technologii budowy ustrojów, w których występuje fazowanie montażu i zmiana schematu statycznego,
- zarysowania monolitycznych żelbetowych fragmentów konstrukcji jak węzły uciąglające, płyta pomostu w strefach momentów ujemnych, filary podporowe w schematach ramowych (sprężone prefabrykaty pracują w fazie I, a żelbetowe elementy monolityczne w fazie II – różnica sztywności),
- usunięcia podpór montażowych i deskowań, które pod względem statycznym jest równoważne przyłożeniu sił skupionych (reakcji podpór) do układu ciągłego w miejscu usuniętych podpór i obciążenia ciężarem własnym od monolitycznych węzłów uciąglających.

W schematach ciągłych lub ramowych węzły uciąglające ograniczają swobodę obrotów końców belek Δ podlegających pełzaniu od ciężaru własnego i sprężenia oraz skurczowi (rys. 2). Powoduje to przegrupowanie sił wewnętrznych w całej konstrukcji. W typowym procesie budowy obiektów z prefabrykatów, w początkowym stanie montażowym belki pracują w schemacie swobodnie podpartym. Po zabetonowaniu styków i uciągleniu konstrukcji następuje ograniczenie swobody deformacji prefabrykatów. Powoduje to powolną zmianę momentów podporowych i przęsłowych od obciążeń konstrukcji przed uciągleniem.

W ciągłych ustrojach z belek strunobetonowych występują dwa charakterystyczne zjawiska związane z pełzaniem: redystrybucja naprężeń w przekrojach zespolonych belka – płyta betonowa, tzw. pierwotne efekty pełzania (występują w schematach izostatycznych i hiperstatycznych) oraz zmiana początkowego układu sił wewnętrznych (redystrybucja) w całej konstrukcji, tzw. wtórne efekty pełzania (występują tylko w schematach hiperstatycznych) [1, 2, 4, 8, 9, 12÷18].

W schemacie hiperstatycznym nadliczbowe więzy powodują naruszenie ciągłości odkształceń od efektów pierwotnych. Z uwagi na założenie o liniowej sprężystości oba efekty można analizować oddzielnie, korzystając z zasady superpozycji. Zmiany te, stosując analogię do sił wzbudzonych powstających w konstrukcjach sprężonych, można nazwać efektami wtórnymi (wzbudzonymi). Powodują one dodatkowe zmiany sił wewnętrznych w całej konstrukcji, a to z kolei

generuje zmianę naprężeń w przekroju i wpływa na intensywność pierwotnych efektów pełzania.

Sprężone belki prefabrykowane i płyta nadbetonu pracują w przęsłach, w strefie momentów dodatnich, pełnym przekrojem, a więc jako niezarysowane (faza I). Z kolei węzły uciąglające wykonywane są najczęściej jako żelbetowe. Znajdują się w strefie momentów ujemnych, a więc „obliczeniowo" pracują w stanie zarysowanym (faza II). Oznacza to, że pełzanie betonu obszarów podporowych występuje w około 1/3 wysokości przekroju od strony dolnych włókien. Z tego powodu, oraz z uwagi na różne okresy wykonania prefabrykatów i części monolitycznych ich pełzanie ma inny przebieg.

Efekty reologiczne

Równanie konstytutywne betonu przestawione w PN-EN (zależność odkształcenia betonu w czasie od naprężeń – rys. 3), ujmujące wpływ zjawisk reologicznych, w ogólnej metodzie przyrostowej ma postać [2, 3, 7, 10, 11, 20, 21]:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_0}{E_c(t_0)} + \varphi(t,t_0)\frac{\sigma_0}{E_c(28)} + \\ + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{E_c(t_i)} + \frac{\varphi(t,t_i)}{E_c(28)}\right)\cdot\Delta\sigma(t_i) + \varepsilon_{cs}(t,t_s) \quad (1)$$

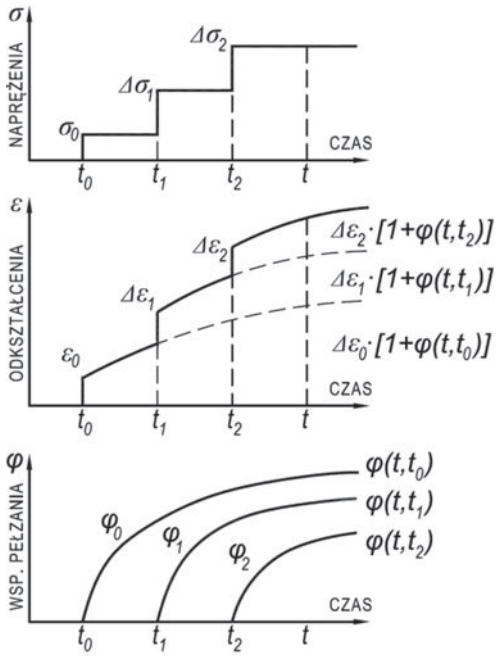
w której:

σ_0 – początkowe naprężenie w betonie,
$E_c(t_0)$ – moduł sprężystości w czasie t_0,
$E_c(28)$ – moduł sprężystości betonu po 28 dniach,
$E_c(t_i)$ – moduł sprężystości po upływie czasu t_i,
$\varphi(t,t_0)$ – współczynnik pełzania w przedziale czasowym od t_0 do t,
$\varphi(t,t_i)$ – współczynnik pełzania w przedziale czasowym od t_0 do t_i,
$\Delta\sigma(t_i)$ – przyrosty naprężeń w przekroju, w analizowanych przedziałach czasowych,
$\varepsilon_{cs}(t,t_s)$ – odkształcenie skurczu w czasie od t *do* t_s.

Sposoby oparte na równaniu ogólnym (1) mogą być stosowane, jeśli dysponuje się odpowiednimi (specjalistycznymi) programami komputerowymi wykorzystującymi podane w PN-EN modele obliczeniowe.

Pierwszy składnik równania (1) opisuje odkształcenia doraźne, wywołane naprężeniem przyłożonym w czasie t_0. Drugi składnik ujmuje pełzanie wywołane przez długotrwały efekt przyłożenia naprężenia w czasie t. Trzecie wyrażenie przedstawia sumę odkształceń doraźnych i odkształceń pełzania powstających na skutek zmiany naprężeń w analizowanych przedziałach czasowych (t, t_i). Czwarty składnik równania oznacza odkształcenie spowodowane skurczem. Jak widać w przedstawionym wzorze (1), efekty skurczu i pełzania betonu potraktowane są łącznie.

Zgodnie z metodą ogólną, przebieg odkształceń w czasie, uwzględnia się przyrostowo w odniesieniu do kolejnych przedziałów czasowych, biorąc pod uwagę w kolejnych przedziałach wartość naprężenia w betonie z poprzedniego przedziału (rys. 3). Metoda ta ujmuje zależność pełzania betonu w każdym przekroju od przebiegu naprężeń w czasie (historii



Rys. 3. Ilustracja zmian odkształceń betonu wywołanych przyrostem naprężeń w czasie w funkcji współczynnika pełzania [3, 10, 11]

obciążenia). Specjalistyczne programy komputerowe umożliwiają analizę pełzania w modelu numerycznym konstrukcji osobno w każdej z wydzielonych części modelu, w których odkształcenie zmienia się według wzoru (1), przy zachowaniu warunków równowagi i nierozdzielności.

W świetle PN-EN [20, 21] różnice wyników obliczeń dotyczących prognozowania przebiegu zmian pełzania na podstawie zależności normowych, w stosunku do badań laboratoryjnych, są na poziomie 20%. Wartości współczynników pełzania $\varphi(t,t_0)$ odnoszą się do stycznego modułu sprężystości betonu $E_c = 1{,}05 \cdot E_{cm}$ (E_{cm} – moduł sieczny). Zakłada się, że odkształcenia od obciążeń przyłożonych w różnym czasie podlegają zasadzie superpozycji. W większości przypadków zakłada się, że pełzanie przebiega liniowo, rozpatrując stan początkowy t_0 i końcowy t_∞ konstrukcji. Nieliniowość pełzania powinna być uwzględniana, jeżeli przy pierwszym obciążeniu w wieku t_0 wystąpiły w betonie naprężenia ściskające $\sigma_b(t_0) \geq 0{,}45 \cdot f_{ck}(t_0)$, a w elementach sprężonych dodatkowo przy naprężeniach trwałych $\sigma_b(t_\infty) \geq 0{,}45 \cdot f_{ck}(t_\infty)$ (f_{ck} – wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie). W praktyce wymaga to stosowania metod iteracyjnych i specjalistycznego oprogramowania, wykorzystującego metodę różnic skończonych i MES.

Zgodnie z algorytmem przedstawionym w PN-EN [21] i często przywoływanym w opracowaniach zagranicznych [2, 7÷10, 12, 14÷16, 18, 19, 22] redystrybucję sił wewnętrznych od efektów reologicznych w konstrukcji można oszacować sposobami uproszczonymi, stosując analogię do zagadnienia oddziaływania wymuszającego. Wzbudzone (dodatkowe, wtórne) końcowe wielkości statyczne można obliczyć, jako różnicę między wartościami początkowymi w stanie montażowym i wartościami wyznaczonymi przy założeniu wykonania schematu hiperstatycznego w jednym etapie. Ostateczne wartości sił wewnętrznych w konstrukcji opisać można za pomocą ogólnego wzoru [1, 2, 6÷10, 12÷22]:

$$S_\infty = S_{bud} + C_{creep} \cdot (S_{cont} - S_{bud}) \quad (2)$$

w którym:

S_∞ – końcowa siła wewnętrzna w rozpatrywanym przekroju,

S_{cont} – siła obliczona jak w układzie budowanym od razu jako ciągły,

S_{bud} – wartość siły wewnętrznej w przekroju przed uciągleniem,

C_{creep} – współczynnik korekcyjny pełzania, który można wyznaczyć kilkoma metodami z różną dokładnością.

W Eurokodzie „mostowym" (PN-EN 1992-2:2010 [21]) zaleca się uwzględnianie efektów reologicznych i związanej z nimi redystrybucji sił wewnętrznych w stanach granicznych nośności (ULS) i użytkowalności konstrukcji (SLS) według kilku metod o zróżnicowanej precyzji. Zastrzeżono, że normowe przybliżone metody obliczeń skurczu i pełzania mogą różnic się od wartości doświadczalnych o ±30%.

Uproszczone ujęcie wpływu pełzania

W PN-EN 1992-2 [21] dopuszczono stosowanie wzorów uproszczonych w odniesieniu do konstrukcji, w których następują zmiany w warunkach podparcia. Zmianę siły wewnętrznej w dowolnym przekroju konstrukcji, w czasie t_∞ można oszacować według zależności:

$$S_\infty = S_0 + (S_c - S_0)\frac{E_c(t_1)}{E_c(t_0)}\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \quad (3)$$

w której:

S_∞ – ostateczna, końcowa wartość siły wewnętrznej po zakończeniu procesów reologicznych,

S_0 – siła wewnętrzna na końcu procesu budowy (przed uciągleniem),

S_c – siła wewnętrzna obliczona jak dla końcowego schematu statycznego (hiperstatycznego),

t_0 – wiek betonu w chwili przyłożenia rozpatrywanego obciążenia stałego,

t_1 – wiek betonu, w którym następuje zmiana warunków podparcia (schematu statycznego),

$E_c(t_0)$ – moduł sprężystości betonu w czasie t_0,

$E_c(t_1)$ – moduł sprężystości betonu w czasie t_1,

$\chi = \chi(t,t_0)$ – współczynnik starzenia (gdy $t=\infty$ można przyjąć $\chi = 0{,}80$), zwykle $\chi = 0{,}6 \div 0{,}9$,

$\varphi(t_\infty, t_0)$ – wartość końcowa współczynnika pełzania,

$\varphi(t_1, t_0)$ – współczynnik pełzania w czasie od t_0 do t_1, w odniesieniu do odkształcenia sprężystego po 28 dniach.

Proporcja modułów sprężystości betonu w czasie t_0 i t_1 we wzorze (3) ujmuje zmiany tego parametru w czasie od chwili przyłożenia obciążenia stałego t_0 do zmiany warunków podparcia t_1 (np. usunięcia podpór montażowych). Współczynnik starzenia χ we wzorze (3) zaczerpnięto z metody zmodyfikowanego efektywnego modułu sprężystości. W rzeczywistości jest on zmienny w czasie $\chi = \chi(t)$. Współczynnik ten powoduje redukcję funkcji pełzania (odkształceń plastycznych pełzania), w celu zrekompensowania efektu przyrostu naprężeń obliczanego, tak jakby pełne obciążenie przykładane było do konstrukcji w czasie t_0 i trwało do rozpatrywanego wieku konstrukcji t.

Czynnik występujący w nawiasie kwadratowym zależności (3) nazywany jest w opracowaniach źródłowych, współczynnikiem korekcyjnym pełzania C_{creep} (ang. *creep correction factor*). Pełni on podobną rolę jak czynnik $(1-e^{-\varphi})$ znany z uproszczonych metod uwzględniania pełzania opracowanych w drugiej połowie XX w. (PCA, Metoda-P, metoda CTL lub im podobne [4, 8÷10, 12, 18, 22]).

Do określenia proporcji wzbudzanych pełzaniem sił wewnętrznych, w stosunku do tych, które powstałyby w konstrukcji pracującej od razu jako ciągła, można stosować według PN-EN, w zależności od wymaganej dokładności, następujące wzory na współczynnik korekcyjny pełzania (oznaczenia jak we wzorze (3)) [7, 10, 21]:

$$C_{creep}^{EN-1} = \frac{E_c(t_1)}{E_c(t_0)}\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \quad (4)$$

$$C_{creep}^{EN-2} = \frac{\varphi_{t=\infty}}{1 + \chi\varphi_{t=\infty}} \quad (5)$$

$$C_{creep}^{EN-3} = \frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)} \quad (7)$$

Przedstawione powyżej zależności wywodzą się z koncepcji opracowanej w latach 60. XX w. przez Stowarzyszenie Producentów Cementu (Portland Cement Association – PCA) [4, 14]. Mnożnik uwzględniający efekt pełzania przy obciążeniach długotrwałych (ciężar własny, sprężenie belek, wyposażenie) określano w tej metodzie prostym wzorem:

$$C_{creep}^{PCA} = \left(1 - e^{-\varphi}\right) \quad (8)$$

w którym:

φ – wartość pełzania belki, która jeszcze pozostała od chwili wystąpienia rozpatrywanego obciążenia w układzie uciąglonym.

Powyższa formuła (8) jest wciąż stosowana w wielu opracowaniach amerykańskich i europejskich. W 1998 roku zmodyfikowano wzór o składnik uwzględniający wpływ zarysowania monolitycznych węzłów żelbetowych, uwzględniający mniejszą wartość momentów wzbudzanych efektami reologicznymi w wyniku zmniejszenia sztywności węzłów [18]. Skorygowaną wartość współczynnika można określić z zależności:

$$C_{creep}^{P} = \alpha \cdot \left(1 - e^{-\varphi}\right) \quad (9)$$

w której:

α – współczynnik korekcyjny uwzględniający sztywność węzła uciąglającego z uwagi na zarysowanie, określany według wzoru [18]:

$$\alpha = \frac{I_w \cdot L}{I_w \cdot L + 1.5 \cdot I_z \cdot L_w} \quad (10)$$

w którym:

I_w – sprowadzony moment bezwładności zarysowanego (faza II) przekroju węzła uciąglającego,

I_z – moment bezwładności głównych przęseł zespolonych,

L – długość głównych przęseł,

L_w – długość węzła.

Niekiedy stosowano jeszcze zmodyfikowaną wersję wzoru podstawowego metody PCA [17]:

$$C_{creep} = \left(1 - e^{-(1-k_t)\cdot\varphi_\infty}\right) \tag{11}$$

w którym:

k_t – współczynnik uwzględniający czas, który upłynął od chwili sprężenia belek do chwili zabetonowania węzłów uciąglających,

φ_∞ – wartość graniczna (końcowa) współczynnika pełzania.

Wartości współczynnika korekcyjnego pełzania C_{creep} wyznaczone według wzorów (4)÷(11) mają ten sam sens fizyczny i obliczeniowy, ale różną dokładność ujęcia wpływów pełzania. Z ich wykorzystaniem zmianę (przyrost lub zmniejszenie) siły wewnętrznej w konstrukcji, wywołaną redystrybucją od pełzania, można oszacować na podstawie dowolnej z zależności (oznaczenia jak we wzorach (3), (8), (11)) podanych niżej:

$$\Delta S = (S_c - S_0)\left(1 - e^{-\varphi}\right) \tag{12}$$

$$\Delta S = (S_c - S_0)\left(1 - e^{-(1-k_t)\cdot\varphi_\infty}\right) \tag{13}$$

$$\Delta S = (S_c - S_0)\frac{E_c(t_1)}{E_c(t_0)}\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \tag{14}$$

$$\Delta S = (S_c - S_0)\frac{\varphi_{t=\infty}}{1 + \chi\varphi_{t=\infty}} \tag{15}$$

$$\Delta S = (S_c - S_0)\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \tag{16}$$

We wzorach (14), (15), (16) uwzględnia się najnowsze zasady określania współczynnika korekcyjnego pełzania przedstawione w Eurokodach.

Ocenę wtórnych efektów pełzania w układach hiperstatycznych z belek prefabrykowanych przeprowadza się najczęściej przy założeniu, że w fazie montażowej belki pracują pod obciążeniem własnym i ciężarem płyty nadbetonu (bez momentu podporowego w czasie montażu).

Wartość ostatecznych momentów podporowych, wzbudzonych oddziaływaniem pełzania od ciężaru własnego i sprężenia belek prefabrykowanych w konstrukcji uciąglonej, można wyznaczać według zależności:

$$M_{podp}(t) = M_{cont}\left(1 - e^{-\varphi}\right) \tag{17}$$

$$M_{podp}(t) = M_{cont}\frac{E_c(t_1)}{E_c(t_0)}\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \tag{18}$$

$$M_{podp}(t) = M_{cont}\frac{\varphi_{t=\infty}}{1 + \chi\varphi_{t=\infty}} \tag{19}$$

$$M_{podp}(t) = M_{cont}\left[\frac{\varphi(\infty,t_0) - \varphi(t_1,t_0)}{1 + \chi\varphi(\infty,t_1)}\right] \tag{20}$$

w których:

M_{cont} – moment, który powstałby w rozpatrywanym przekroju od obciążenia stałego (ciężar własny, sprężenie belek), gdyby konstrukcja pracowała od razu w schemacie hiperstatycznym (bez faz montażowych).

Powyższe, ogólne zależności nie ujmują w pełni specyfiki omawianych typów konstrukcji, w których poszczególne części podlegają pełzaniu z różną intensywnością. Niemniej jednak są przydatne do szacowania końcowych wartości sił wewnętrznych, gdyż w konstrukcjach wznoszonych etapowo rozkład wielkości statycznych dąży do wyniku jak w układzie ciągłym [1, 2, 6 ÷ 10, 12 ÷ 22]. Generalnie, omawiane efekty reologiczne można określić tylko w sposób przybliżony. Nie ma poza tym pewności, w jakim stopniu, w rzeczywistej konstrukcji intensywność i przebieg wspomnianych zjawisk będą zbieżne z przyjętymi założeniami projektowymi dotyczącymi technologii wykonania obiektu (czas składowania belek, odstępstwa od wytycznych projektu) oraz warunków pielęgnacji i dojrzewania betonu (wilgotność i temperatura, wpływ dodatków i domieszek do betonu, skład mieszanki betonowej).

Uproszczone ujęcie wpływu skurczu betonu

Zjawisko skurczu zwykle kojarzone jest z procesami technologicznymi zachodzącymi na budowie, a więc traktuje się je, jako domenę wyłącznie wykonawstwa. W rzeczywistości, w szczególności w konstrukcjach mostowych z belek prefabrykowanych, efekty skurczowe powodują redystrybucję sił wewnętrznych w całym ustroju, którą należy uwzględnić w projektowaniu [4÷6, 13, 14, 17, 22].

Normy PN-EN umożliwiają ocenę odkształceń skurczowych z większą dokładnością niż w wycofanych przepisach. W świetle Eurokodów całkowite odkształcenie skurczowe ε_{cs} jest sumą dwóch odkształceń: autogenicznego (samorodnego) ε_{ca} i spowodowanego wysychaniem (fizycznego) ε_{cd} [5÷7, 11, 20, 21]. Skurcz autogeniczny wynika z reakcji chemicznych cementu i wody oraz utraty wody przez zaczyn (zachodzi w początkowej fazie wiązania betonu), natomiast skurcz fizyczny związany jest z wysychaniem twardniejącego betonu (trwa nawet kilkadziesiąt lat).

Niebezpieczna sytuacja wynikająca ze skurczu betonu ujawnia się w warunkach ograniczenia swobody odkształceń elementów [5, 6]. Z taką sytuacją mamy do czynienia w obiektach mostowych z belek prefabrykowanych. Oddziaływanie skurczu w tych konstrukcjach dotyczy: różnicy skurczy belki i płyty oraz skurczu betonu monolitycznych żelbetowych części ustroju. Z uwagi na etapowanie budowy występuje różnica odkształceń skurczowych betonu wcześniej wyprodukowanej belki prefabrykowanej oraz płyty betonowej wykonywanej *in situ*. Efekty skurczu betonu wykonanego na budowie ujawniają się także w przypadku braku swobody odkształceń niektórych rodzajów węzłów uciąglających, które mogą być realizowane w wielu wariantach konstrukcyjnych (np. węzły typu „V" lub „Y", poprzecznice podporowe w wieloprzęsłowych, zintegrowanych układach ramowych, jak na rys. 1).

Ostateczną różnicę odkształceń skurczowych płyty i belki, przy założeniu wykonania płyty i części monolitycznych ustroju w czasie t_1, można określić na podstawie wzoru:

$$\Delta\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{sh,p}(\infty) - \left[\varepsilon_{sh,b}(\infty) - \varepsilon_{sh,b}(t_1)\right] \tag{21}$$

w którym:

$\varepsilon_{sh,p}(t_\infty)$ – końcowe odkształcenie skurczowe betonu płyty,

$\varepsilon_{sh,b}(t_\infty)$ – końcowe odkształcenie skurczowe betonu belki,

$\varepsilon_{sh,b}(t_1)$ – część odkształceń skurczowych betonu belki, które zaszły od chwili wystąpienia skurczu t_0 (1 dzień) do czasu wykonania płyty t_1.

Dokładne procedury szacowania wartości odkształceń skurczowych można znaleźć w PN-EN [20, 21] i w opracowaniach [7, 8, 10, 11]. Obszernie zasady obliczania skurczu wraz z komentarzem przedstawiono w [5, 6].

W PN-EN nie sprecyzowano sposobu uwzględniania wpływu pełzania na skurcz betonu. Współcześnie często stosowana jest w projektowaniu metoda zastępczego modułu sprężystości betonu uwzględniającego pełzanie [13]. Polega na redukcji sztywności elementów modelu numerycznego podlegających oddziaływaniom skurczowym, przez przyjęcie skorygowanych wartości $E_c(\varphi)$. Redukcja dotyczy tylko schematu statycznego przy oddziaływaniu skurczu.

W obliczeniach inżynierskich z wykorzystaniem programów MES oddziaływanie skurczowe można przedstawić za pomocą zastępczego oddziaływania termicznego lub momentów zaczepionych na końcach ustroju (metoda klasyczna) przyłożonych od razu w schemacie ciągłym.

Skurcz monolitycznych węzłów uciąglających można potraktować, jako równomierne oziębienie betonowych elementów belkowych lub powłokowych określone na podstawie alternatywnych zależności:

$$T_\varepsilon = \frac{\varepsilon_w}{\alpha_t} \tag{22}$$

$$T_\varepsilon = \frac{E_s A_s \varepsilon_w}{\alpha_t \left(E_w A_w + E_s A_s\right)} \tag{23}$$

w których:

T_ε – zastępcze równomierne oziębienie,
ε_w – odkształcenie skurczowe betonu uciąglającego,
α_T – współczynnik rozszerzalności liniowej,
E_s, A_s – moduł sprężystości i pole przekroju stali zbrojeniowej węzła,
E_w, A_w – moduł sprężystości i pole przekroju betonu uciąglenia.

We wzorze (23) uwzględniono w sposób przybliżony wpływ nasycenia przekroju węzła zbrojeniem, czego nie uwzględniono w normach PN-EN. Dokładniejszą metodę ujęcia wpływu zbrojenia na wartości odkształceń skurczowych przedstawiono w [5].

Różnicę skurczów płyty monolitycznej i belki prefabrykowanej uwzględnić można za pomocą równoważnych oddziaływań termicznych, przykładanych do elementów prętowych modelu obliczeniowego w schemacie docelowym ustroju (jako jeden przypadek obciążeniowy) [13]:

- składowej nierównomiernego rozkładu temperatury (gradientu) na wysokości przekroju pręta:

$$\delta_T = \frac{H \cdot a_d \cdot A_b}{I_{p\varphi} + I_b + a \cdot a_d \cdot A_b} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha_t} \tag{24}$$

- składowej równomiernego oziębienia przekroju pręta:

$$\Delta_t = \frac{a_d}{a} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{sh}}{\alpha_t} \tag{25}$$

w których przyjęto oznaczenia:

δ_T – gradient temperatury na wysokości przekroju zespolonego (oziębienie płyty nadbetonu lub ogrzanie dolnych włókien belki prefabrykowanej),
H – wysokość przekroju zespolonego belka-płyta,
a_d – odległość środków ciężkości przekroju zespolonego i belki,
A_b – pole przekroju belki,
$\Delta\varepsilon_{sh}$ – różnica odkształceń skurczowych płyty i belki,
$I_{p\varphi}$ – moment bezwładności płyty uwzględniający pełzanie,
I_b – moment bezwładności belki,
a – odległość środków ciężkości płyty i belki.

W przypadku modelu mieszanego konstrukcji, tj. belkowo-powłokowego płaskiego (e^1+e^2, p^2) lub przestrzennego (e^1+e^2, p^3), różnicę skurczu można uwzględnić w prosty sposób za pomocą równomiernego oziębienia elementów powłokowych modelujących płytę. Należy wykorzystać zależności (22) lub (23) podstawiając w miejsce odkształcenia skurczowego węzła ε_w wartość różnicy odkształceń skurczowych między płytą a belką $\Delta\varepsilon_{sh}$.

Ograniczenia efektów skurczowych z uwagi na pełzanie można dokonać, podobnie jak w przypadku sił wewnętrznych wzbudzonych pełzaniem od ciężaru własnego i sprężenia, za pomocą współczynników korekcyjnych skurczu:

$$C_{sh}^{PCA} = \frac{1-e^{-\varphi}}{\varphi} \tag{26}$$

$$C_{sh}^{E_c(\varphi)} = \frac{1}{1+\chi\varphi(\infty,t_0)} \tag{27}$$

w których:

φ – wartość pełzania belki, która jeszcze wystąpi od momentu pojawienia się obciążenia w układzie uciąglonym,
$\chi = \chi(t, t_0)$ – współczynnik starzenia,
$\varphi(t_\infty, t_0)$ – wartość końcowa współczynnika pełzania od czasu wystąpienia skurczu (wg PN-EN przy skurczu $t_0 = 1$ dzień).

Wzór (27) nawiązuje do znanej metody zastępczego współczynnika sprężystości betonu $E_c(\varphi)$ ujmującego wpływ pełzania i podobny jest jego sens obliczeniowy [13].

Ogólnie, rozkład momentów od różnicy skurczów na długości uciąglonego segmentu, jest superpozycją momentów obliczonych jak w belce wolnopodpartej oraz momentów wywołanych sprężystym utwierdzaniem końców belek w węźle uciąglającym (momentów wzbudzonych nadliczbowymi więzami), skorygowanych o wpływ pełzania za pomocą współczynnika C_{sh}. Przy zastosowaniu ekwiwalentnych oddziaływań termicznych przykładanych do schematu belki ciągłej lub ramy, jako wynik otrzymujemy siły wewnętrzne uwzględniające od razu efekty pierwotne (izostatyczne) i wtórne (hiperstatyczne).

Wartości sił wywołanych skurczem i pełzaniem betonu zależą od czasu, który upłynął między chwilą wyprodukowania prefabrykatu i wbudowania go w konstrukcję (uciąglenia). Im ten czas jest dłuższy, tym większa jest różnica skurczów belki i płyty, co powoduje większe wartości momentów dodatnich na długości belek. Z uwagi na to, że w takiej sytuacji zaszła już znaczna część pełzania betonu belek (maleje intensywność dalszego pełzania) wzbudzone momenty utwierdzenia belek (podporowe) w węźle uciąglającym ulegają redukcji w mniejszym stopniu.

Końcowe siły wewnętrzne

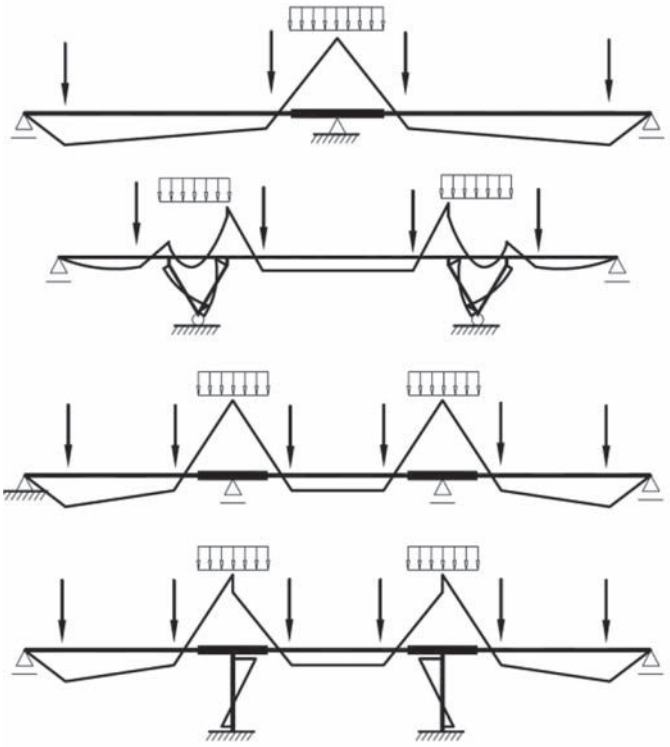
Z uwagi na specyfikę budowy obiektów mostowych z belek prefabrykowanych i występowanie kilku charakterystycznych

faz ich pracy (zmiana schematu statycznego, wpływ pełzania – zależny od typów obciążeń stałych) ostateczne momenty w konstrukcji powinny uwzględniać kolejność poszczególnych etapów obciążenia. W związku z tym wzory na końcowe momenty podporowe, stanowiące podstawę wymiarowania węzłów uciąglających, będą bardziej rozbudowane w stosunku do podanych wcześniej zależności (17)÷(20).

Usunięcie podpór tymczasowych następuje w chwili, kiedy konstrukcja jest już ciągła. Powoduje sprężystą redystrybucję sił wewnętrznych, która z kolei wpływa na dalszy przebieg pełzania elementów ustroju. Generalnie, efektem tego zabiegu technologicznego jest pojawienie się znacznych momentów podporowych, które należy uwzględniać przy wymiarowaniu zbrojenia węzłów (rys. 4).

Zwiększenie momentów podporowych, wywołanych pełzaniem od ciężaru własnego, w warunkach ograniczenia swobodnych obrotów końców belek przez podatne węzły uciąglające, określa się jako proporcję (ułamek) w odniesieniu do momentów układu ciągłego M_{cont}. Wyznacza się je na podstawie obciążenia ciężarem własnym konstrukcji w schemacie od razu hiperstatycznym (belka ciągła, rama). Momenty wzbudzone w wyniku pełzania oblicza się mnożąc wartości momentów sprężystych (bez pełzania) ze schematu ciągłego M_{cont} przez współczynniki korekcyjne pełzania C_{creep}.

W podobny sposób uwzględnia się wpływ pełzania wywołanego sprężeniem belek. W schemacie wolnopodpartym sprężone belki prefabrykowane ulegają swobodnym odkształceniom na skutek pełzania od siły sprężającej. Z uwagi na częściowe zamocowanie belek w węzłach deformacje te nie mogą narastać swobodnie (podobieństwo do sił wzbudzonych od sprężenia powstających w schematach hiperstatycznych).



Rys. 4. Przykłady wykresów momentów zginających wywołanych usunięciem podpór tymczasowych i demontażem deskowań węzłów monolitycznych (uciąglenie ustrojów)

Wpływ pełzania wywołanego sprężeniem można uwzględnić w dwóch etapach. W pierwszym momenty utwierdzenia (podporowe) belek w węzłach uciąglających oblicza się przy założeniu sprężystej pracy ustroju, tak jakby sprężenie belek nastąpiło po wbudowaniu w uciągloną konstrukcję (tj. od razu w układzie hiperstatycznym). Następnie powstające (wzbudzone) momenty utwierdzenia mnoży się przez czynnik C_{creep} uwzględniający pełzanie. Całkowite momenty w konstrukcji będą superpozycją momentów od sprężenia powstających w belkach wolnopodpartych (przed zabetonowaniem styków) i momentów wzbudzonych (nadliczbowych) skorygowanych o wpływ pełzania za pomocą współczynnika korekcyjnego C_{creep}.

Wpływ sztywności i geometrii węzłów uciąglających na momenty wzbudzone sprężystym utwierdzeniem belek, w obliczeniach MES jest uwzględniany od razu przy rozwiązywaniu układu równań równowagi. Uproszczone, analityczne procedury określania tego wpływu podano w [17].

Ostateczny (końcowy) moment podporowy od obciążeń długotrwałych, uwzględniany w wymiarowaniu węzła uciąglającego, można oszacować według wzoru:

$$M_{\infty}^{podp} = M_{upm} + M_{gb} \cdot C_{creep1} + M_{gp+gw+\Delta} \cdot C_{creep2} + \\ + M_{spr} \cdot C_{creep3} + M_{\varepsilon} \cdot C_{sh} \tag{28}$$

w którym:

- M_{upm} – moment podporowy od usunięcia podpór montażowych i deskowań (sprężysta redystrybucja sił w układzie hiperstatycznym),
- M_{gb} – moment podporowy od ciężaru własnego belki prefabrykowanej (w układzie hiperstatycznym),
- $M_{gp+gw+\Delta}$ – moment podporowy od pozostałych obciążeń długotrwałych (ciężar płyty nadbetonu, węzła uciąglającego, wyposażenia, osiadania podpór itp.) w schemacie hiperstatycznym,
- M_{spr} – wzbudzony (wtórny) podporowy moment od sprężania obliczony jak w układzie od razu ciągłym (bez fazowania),
- M_{ε} – wzbudzony moment podporowy od efektów skurczu (w układzie ramowym lub ciągłym),
- C_{creep1} – współczynnik korekcyjny pełzania od ciężaru własnego belki, uwzględniający pełzanie betonu belki φ_1 od czasu wytworzenia do chwili wbudowania,
- C_{creep2} – współczynnik korekcyjny pełzania od obciążeń przyłożonych po uciągleniu konstrukcji, uwzględniający pełzanie belki φ_2 wywołane obciążeniami stałymi od chwili uciąglenia,
- C_{creep3} – współczynnik korekcyjny pełzania od sprężenia belki od chwili wbudowania w układ hiperstatyczny, uwzględniający różnicę pełzania $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, określającą przedział czasowy między wykonaniem (sprężeniem) a wbudowaniem prefabrykatu,
- C_{sh} – współczynnik korekcyjny skurczu występującego w układzie hiperstatycznym z uwagi na równoczesne pełzanie przy skurczu.

Generalnie, pełzanie od ciężaru własnego powoduje powolne narastanie ujemnych momentów podporowych w węzłach uciąglających. Skurcz betonu generuje momenty ujem-

ne nad podporami. Pełzanie wywołane sprężeniem belek powoduje powstawanie dodatnich momentów na podporach. Zjawiska te w rzeczywistych konstrukcjach występują łącznie i częściowo znoszą się wzajemnie. Odseparowanie ich od siebie wynika z potrzeb obliczeniowych (zasada superpozycji). Ostateczny, wzbudzony, sumaryczny moment podporowy uzależniony jest od technologii wykonania (m.in. chwili wbudowania belki w układ hiperstatyczny).

Wpływ zarysowania elementów monolitycznych

Rozpatrując czynniki reologiczne powodujące redystrybucję sił wewnętrznych w hiperstatycznych ustrojach z belek prefabrykowanych nie należy zapominać o wpływie degradacji sztywności. Związana jest ona z zarysowaniem żelbetowych fragmentów monolitycznych. Jak wykazano w pracy [18] pominięcie zarysowania węzłów uciąglających może spowodować nawet 2÷3,5-krotne przeszacowanie momentów podporowych wzbudzanych przez wtórne efekty reologiczne (rozpatrywano schemat dwuprzęsłowy, jak na rys. 5a).

Belki prefabrykowane projektowane są najczęściej jako strunobetonowe o sprężeniu pełnym (nie dopuszcza się rozciągania betonu), ewentualnie ograniczonym (dopuszcza się rozciąganie betonu, ale $\sigma_c \le f_{ct}$ (f_{ct} – efektywna charakterystyczna wytrzymałość betonu na rozciąganie). Oznacza to, że dźwigary zespolone w obszarze przęsła pracują pełnym przekrojem w fazie I, a więc jako niezarysowane. Zarysowanie (faza II) dotyczy fragmentów monolitycznych takich jak węzły uciąglające i podpory w układach ramowych.

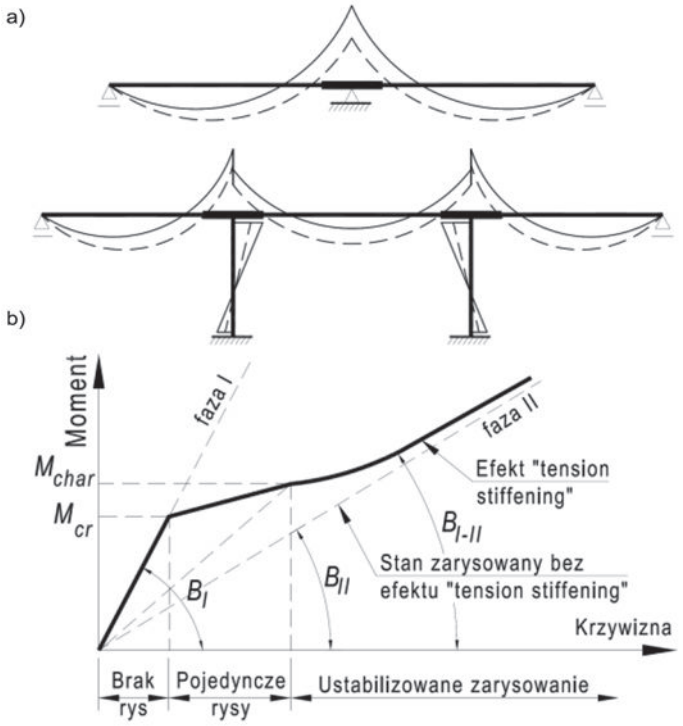
Zmniejszenie sztywności części monolitycznych powoduje przegrupowanie sił wewnętrznych w całej konstrukcji (rys. 5a). Redystrybucja powoduje zmniejszenie momentów podporowych i zwiększenie przęsłowych (wzrost wytężenia belek).

Obliczeniowo, zarysowanie przekrojów żelbetowych wiąże się z przejściem z fazy I do II. Elementy żelbetowe nie pracują na całej długości elementu w jednej „czystej" fazie. Nawet w przekrojach zarysowanych część strefy rozciąganej betonu współuczestniczy w zginaniu elementu. Faza II formalnie dotyczy tylko przekroju przez rysę. Z uwagi na współpracę zbrojenia między rysami w rzeczywistych konstrukcjach zarysowanie elementu jest niepełne. W PN-EN przy ocenie sztywności uwzględniono te zjawiska (efekt *tension stiffening*).

Odkształcenia elementów po zarysowaniu przyjmują wartości pośrednie między odkształceniami elementów pracujących w fazie I (brak zarysowania) oraz elementów pracujących w fazie II (pełne zarysowanie).

W PN-EN wpływ sztywności pośredniej między fazami I i II (rys. 5b) uwzględnia się za pomocą korekty wartości charakterystyki odkształcalności (np. ugięcia, odkształcenia, krzywizny) na podstawie współczynnika dystrybucji ζ. Można tego dokonać według wzoru na sztywność „pośrednią" [10, 20, 21]:

$$B_{I-II} = \frac{1}{\frac{\zeta}{B_{II}} + \frac{1-\zeta}{B_I}} \qquad (29)$$



Rys. 5. Efekty zarysowania fragmentów monolitycznych: a) wpływ na redystrybucję momentów, b) wpływ momentu zginającego na sztywność przekroju żelbetowego

w którym:

ζ – współczynnik dystrybucji uwzględniający usztywnienie przy rozciąganiu (*tension stiffening*), określany z zależności:

$$\zeta = \begin{cases} \zeta = 1 - \beta\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 \Leftrightarrow \text{faza II} \\ \zeta = 0 \quad \Leftrightarrow \text{faza I} \end{cases} \qquad (30)$$

w której:

$B_I = E_b \cdot J_{csI}$, $B_{II} = E_b \cdot J_{csII}$ – odpowiednio sztywności przekrojów niezarysowanych i w pełni zarysowanych,

E_b – moduł sprężystości betonu,

J_{csI} – sprowadzony moment bezwładności zbrojonego przekroju betonowego względem osi obojętnej w fazie I,

J_{csII} – sprowadzony moment bezwładności zbrojonego przekroju betonowego względem osi obojętnej w fazie II,

β – współczynnik wpływu czasu trwania obciążenia lub wpływu obciążeń powtarzalnych na średnie odkształcenie (β = 1,0 w przypadku pojedynczego obciążenia krótkotrwałego oraz β = 0,5 w odniesieniu do obciążeń długotrwałych i wielokrotnie powtarzalnych – przypadek spotykany w mostownictwie),

σ_{sr} – naprężenia w zbrojeniu rozciąganym przy zarysowaniu obliczone w założeniu pełnej fazy II,

σ_s – naprężenia charakterystyczne w zbrojeniu rozciąganym obliczone w założeniu pełnej fazy II, przy czystym zginaniu można przyjąć $\sigma_{sr}/\sigma_s = M_{cr}/M_{char.}$

Przy wykorzystaniu obecnego oprogramowania MES efekt zarysowania elementów żelbetowych można w prosty sposób uwzględnić przez redukcję sztywności (*EJ)* elementów modelujących fragmenty monolityczne konstrukcji.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono uproszczone modele redystrybucji sił wewnętrznych spowodowanej zjawiskami reologicznymi w nawiązaniu do technologii budowy obiektów mostowych z belek prefabrykowanych. Można je stosować w projektowaniu przy wspomaganiu specjalistycznego oprogramowania komputerowego do analizy statycznej konstrukcji inżynierskich, np. *R3D3-Rama 3D, RM-Win, ABC Rama 3D, Autodesk Robot Structural Analysis*.

Precyzyjne ujęcie zjawisk, które zachodzą w tego rodzaju ustrojach jest trudne, ale możliwe w przypadku stosowania zaawansowanych systemów MES dedykowanych konstrukcjom mostowym, np. *SOFiSTiK, Midas, Lusas, RM-Bridge, SAP-2000* itp. Wymaga to zbudowania dokładnego modelu numerycznego, w którym uwzględnia się: sekwencyjne sprężenie belek, stany montażowe i reologię poszczególnych części ustroju. Z uwagi na inżynierski – z natury przybliżony – sposób obliczeń na potrzeby projektowe, można stosować propozycje uproszczeń zaprezentowane w artykule.

Omawiane sposoby obliczeniowe nie są zbyt rozpowszechnione w krajowej praktyce projektowej. W opracowaniach zagranicznych, w zasadzie rutynowo, stosuje się je w projektowaniu konstrukcji z belek prefabrykowanych o rozpiętości dochodzącej do ~40 m, a nawet przy wstępnych obliczeniach mostów skrzynkowych wznoszonych nawisowo [2, 3, 7÷10, 12, 14÷16, 18, 19].

Ograniczenie obszerności analizy statycznej konstrukcji mostowych z belek prefabrykowanych różnego typu jest pożądane z punktu widzenia „ekonomiki" projektowania z wykorzystaniem rozwiązań katalogowych. Istotna jest możliwość obliczeń konstrukcji bez potrzeby powtórnego wymiarowania oraz dokładnej analizy naprężeń i ich redystrybucji w samej belce. Projektowanie sprowadza się wówczas do oszacowania sił wewnętrznych występujących w prefabrykatach i porównania ich z wartościami podanymi w katalogu, wymiarowania elementów niestandardowych (węzłów) przy rozsądnej adaptacji rozwiązań katalogowych (np. korekta długości osłonek lub liczby splotów sprężających, wydłużanie węzłów uciąglających).

Bibliografia

[1] J. Biliszczuk, R. Eldebi , Cz. Machelski, *Kilka uwag odnośnie oceny wpływu czynników reologicznych na wytężenie ciągłych przęseł mostowych z belek prefabrykowanych*, Seminarium „Problemy projektowania, budowy i utrzymania mostów małych", Szklarska Poręba, 1990

[2] J. Camara, A. Hipolito, *Precast Bridges – Design for Time Dependant Effects*, The Second International fib Congres, Naples, 2006

[3] K. Dyduch, *Analiza opóźnionych strat sprężenia w konstrukcjach z betonu*, Konferencja naukowo-techniczna „Konstrukcje sprężone", Kraków, 2015

[4] C. L. Freyermuth, *Design of Continuous Highway Bridges with Precast Prestressed Concrete Girders*, Journal of Prestressed Concrete Institute, nr 4/1969

[5] K. Flaga, *Rola skurczu betonu w żelbetowych elementach konstrukcyjnych*, Inżynieria i budownictwo nr 9/2014

[6] K. Flaga, *Zbrojenie przeciwskurczowe, obliczenia, zalecenia konstrukcyjne w budownictwie powszechnym*, XXII Ogólnopolska konferencja „Warsztat pracy projektanta konstrukcji", Ustroń, 2002

[7] A. Ghali, R. Favre, M. Eldbadry, *Concrete structures. Stresses and deformation – Third edition*, Spon Press, Londyn, 2002

[8] A. Hameed, M. Saleem, A.U. Qazi, J. Zhang, *Influence of girder age at continuity and construction sequence on the time dependent restraint moments in continuous prestressed concrete girder bridges*, Pakistan Journal of Science 1/2013

[9] N. R. Hawson, *Design of prestressed concrete bridges*, Institution of Civil Engineers, 2008

[10] C. R. Hendy, D. A. Smith, *Designers' guide to EN 1992-2. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 2: Concrete bridges*, Thomas Telford Publishing, London, 2007

[11] J. Hołowaty, *Pełzanie i skurcz betonu w konstrukcjach mostowych – potrzeba wprowadzenia Eurokodów*, Obiekty mostowe w infrastrukturze miejskiej, DWE, Wrocław, 2013

[12] S. Koch, C. L. Roberts, *Design recommendations for the optimized continuity diaphragm for prestressed concrete bulb-T beams*, Transportation Research Council, Virginia, 2008

[13] Cz. Machelski, *Obliczanie mostów z betonowych belek prefabrykowanych*, DWE, Wrocław, 2006

[14] A. H. Mattok, *Precast-Prestressed Concrete Bridges*, PCI Journal, 5/1961

[15] M. D. McConagh, K. B. Hinkley, *Resolving restraint moments and desinging for continuity in precast prestressed concrete girder bridges*, PCI Journal 7-8/2003

[16] R. M. Noureddin Nayal, R. J. Peterman, A. Esmaeily , *Post-tensioning the inverted-T bridge system for improved durability and increased span-to-depth ratio*, University of Kansas, Manhattan, 2007

[17] W. Nowak, *Zasady obliczeń uciąglenia przęseł mostowych za pomocą pełnego styku żelbetowego*, Drogownictwo nr 7-8/1991

[18] R. J. Peterman, J.A. Ramirez, *Restraint moments in bridges with full-span prestressed concrete form panels*, PCI Journal 1/1998

[19] A. Pimanmas, *The effect of long-term creep and prestressing on moment redistribution of balanced cantilever cast-in-place segmental bridge*, Songklanakarin J. Sci. Technol., Vol. 29/2007

[20] PN-EN 1992-1-1:2008+AC:2011. Część 1: Reguły ogólne i reguły dla budynków

[21] PN-EN 1992-2:2010. Część 2: Mosty z betonu. Obliczanie i reguły konstrukcyjne

[22] H. Rüsh, D. Jungwirth, *Skurcz i pełzanie w konstrukcjach betonowych*, Arkady, Warszawa, 1979

Zapraszamy do prenumerowania DROGOWNICTWA w 2016 roku

cena 1 egzemplarza 19 zł
prenumerata roczna 216 zł } (w tym 5% VAT)

Dla studentów 50% zniżki

Uprzejmie informujemy Szanownych Prenumeratorów, że egzemplarze „Drogownictwa" oraz faktury będą wysyłane po przesłaniu zamówienia na adres prenumerata.drogownictwo@sitkrp.org.pl oraz po wpłaceniu należnej kwoty na nasze konto:

38 1160 2202 0000 0000 2741 3872

Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Komunikacji RP, Zarząd Krajowy
ul. Czackiego 3/5, 00-043 Warszawa

Redakcja