Obręcze - przykłady rozwiązywania

MOTYWACJĄ DO NAPISANIA TEGO ARTYKUŁU był i jest zadziwiający brak zainteresowania autorów książek o wytrzymałości materiałów tematyką rozwiązywania łuków i obręczy. Tony papieru zużyto na metody i przykłady rozwiązywania belek, a w temacie łuków i obręczy cisza. Stąd wziął się pomysł uzupełnienia tej luki. Intencją autora było przedstawienie czytelnikowi, krok po kroku, metodologii rozwiązania kilku prostych przypadków obciążeń obręczy podpartych przykładem liczbowym. Jeśli temat znajdzie zainteresowanie u czytelników, to w kolejnych odcinkach prześwietlimy kilka innych, praktycznych przypadków obciążeń obręczy (w sumie będzie ich 12), tyle że wtedy będziemy już szli przez temat „szybszym krokiem" omijając podstawy, bo te są przedstawione niżej. Zapraszam na niestresujący spacer po obręczach.

W całej literaturze anglojęzycznej stalowy element usztywniający konstrukcje o przekroju cylindrycznym jest określany terminem „circular ring" lub po prostu „ring". W tłumaczeniu oznacza obręcz, koło, pierścień, flansza, kołnierz i pewnie kilka innych określeń. Żeby było swojsko, będę używał terminu „obręcz".

Rozwiązywanie obręczy sprowadza się do wyliczenia sił wewnętrznych w obręczy i policzenia odkształceń jej średnicy w dwu prostopadłych kierunkach. Wyliczone siły wewnętrzne *Mx*, *Nx*, *Vx* pozwolą na zaprojektowanie przekroju i policzenie naprężeń w obręczy. W odróżnieniu od belek, odkształcenia obręczy mają małe praktyczne znaczenie i są często pomijane w rachunkach. Dlatego liczenie odkształceń obręczy będzie pokazane tylko dla jednego przykładu.

Trochę teorii

Wszystkie rachunki poniżej są oparte na twierdzeniu **Castigliano**, które brzmi:

„Jeśli energia sprężysta jest wyrażona jako funkcja siły Q to pochodna cząstkowa tej energii względem siły Q jest równa odkształceniu w punkcie i kierunku przyłożenia siły Q".

Ogólny wzór na energię sprężystą w obręczy jest:

$$\boldsymbol{U}=\int\frac{\boldsymbol{Mx}^2}{2\boldsymbol{EI}}\boldsymbol{ds}+\int\frac{Nx^2}{2EA}ds+\int\frac{Qx^2}{2GA}ds$$

Głównym źródłem energii sprężystej w obręczy jest moment zginający *Mx* działający wzdłuż łuku *s*. Przyrost energii spowodowany siła podłużną *Nx* i poprzeczną *Vx* jest bardzo mały, więc dwie ostatnie całki pomijamy.

Kąt obrotu przekroju w miejscu działania momentu *Mo* jest:

$$\delta Mo=\frac{\partial U}{\partial Mo}\;\rightarrow\;\delta Mo=\frac{1}{EI}\int_s Mx\frac{\partial Mx}{\partial Mo}ds$$

Przesunięcie w miejscu działania siły osiowej *No* jest:

$$\delta No=\frac{\partial U}{\partial No}\;\rightarrow\;\delta No=\frac{1}{EI}\int_s Mx\frac{\partial Mx}{\partial No}ds$$

Przesunięcie w miejscu działania siły tnącej *Vo* jest:

$$\delta Vo=\frac{\partial U}{\partial Vo}\;\rightarrow\;\delta Vo=\frac{1}{EI}\int_s Mx\frac{\partial Mx}{\partial Vo}ds$$

Wzory do liczenia odkształcenia średnicy obręczy: wzór na energię sprężystą *U* w obręczy jest:

$$U=\int\frac{Mx^2}{2EI}ds\;\rightarrow\;\text{odkształcenie: }\Delta=\frac{\partial U}{\partial Q}$$

Jest wiele podobieństw między belkami obustronnie utwierdzonymi, obciążonymi symetrycznym obciążeniem, a modelami obręczy przedstawionymi niżej. Właściwie, obręcz to taka belka utwierdzona na obu końcach, tylko zwinięta w okrąg tak, że lewa i prawa podpora zostały zredukowane do jednego punktu.

Metodologia

Obręcz to element 3-krotnie statycznie niewyznaczalny. Żeby rozwiązać obręcz, należy ją „myślowo przeciąć" w wybranym miejscu i policzyć siły w miejscu przecięcia potrzebne do utrzymania niezmiennego kształtu obręczy.

Schemat postępowania jest następujący:

1. Przyjmujemy wygodny schemat obliczeniowy, czyli taki, który będzie miał najmniejszą ilość niewiadomych sił wewnętrznych. Jeśli obciążenie obręczy jest symetryczne, to oś symetrii będzie prawdopodobnie najdogodniejszym miejscem do „przecięcia" obręczy.
2. Piszemy ogólne równanie momentu *Mx* dla każdego przedziału zmienności kąta *x*.
3. Liczymy pochodną energii względem szukanej, niewiadomej siły, czyli: $\frac{\partial U}{\partial Mo},\frac{\partial U}{\partial No},\frac{\partial U}{\partial Vo}$.
4. Mnożymy każdy wyraz równania momentu przez pochodną względem szukanej niewiadomej siły i całkujemy uzyskane wyrażenie, w wyniku otrzymujemy **odkształcenie w punkcie i kierunku przyłożenia szukanej siły**.
5. Odkształcenie policzone w punkcie 3 jest zwykle równe zero, więc przyrównujemy obliczone odkształcenie do zera i otrzymujemy zależność, w której uwikłane są wszystkie poszukiwane siły.
6. Punkt 3 i 4 powtarzamy dla każdej pochodnej szukanej siły, obecnej w założonym przekroju, czyli osobno dla *Mo*, *No* i *Vo* (jeśli *Vo* nie jest zero).
7. Uzyskane zależności tworzą uklad równań z dwoma (lub trzema) niewiadomymi siłami, z rozwiązania układu równań uzyskujemy wartości sił *Mo*, *No* i *Vo*.
8. Piszemy ogólne równania sił *Mx*, *Nx* i *Vx* dla każdego przedziału zmienności kąta *x*, wstawiamy uzyskane wartości *Mo*, *No* i *Vo* do wzorów i liczymy siły wewnętrzne w żądanym przekroju obręczy.

I to tyle.

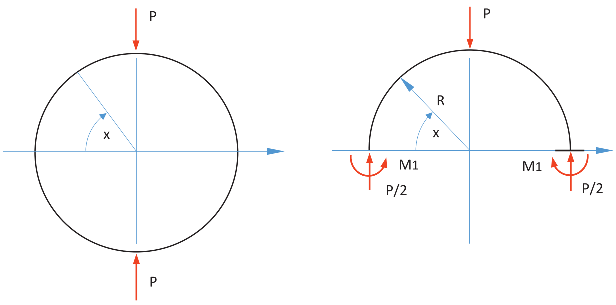
Uwaga: *jeśli punkt „przecięcia" może się przemieścić wzdłuż kierunku którejś z poszukiwanych sił wewnętrznych skutkiem oddziaływania sił zewnętrznych, to liczenie odkształceń (punkt 4) w kierunku poszukiwanej siły wewnętrznej, np.: Vo jest bezcelowe bo warunek δVo = 0 nie może być użyty*.

Konwencja znaków

Wszystkie rachunki przedstawione niżej stosują się do następującej konwencji:
- siła ma znak (+) jeśli jest skierowana do środka obręczy, skierowana na zewnątrz ma znak (–);
- moment *Mx* ma znak (+) jeśli wygina obręcz do wewnątrz (tzn. rozciąganie od wewnątrz);
- siła podłużna *Nx* ma znak (+) jeśli powoduje rozciąganie w przekroju (czyli przyrost długości);
- siła poprzeczna *Vx* ma znak (+) jeśli jest skierowana na zewnątrz;
- kąt zmiennej oznaczany jest literą *x* i jest (+) jeśli jest zgodny z ruchem wskazówek zegara;
- cztery punkty na obręczy odpowiadające godzinom na tarczy zegara, będą nazywane punktami „12:00", „3:00", „6:00" i „9:00";
- *Mo*, *No* i *Vo* to wartości momentu, siły podłużnej i poprzecznej dokładnie w punkcie „12:00";
- oznaczenia przemieszczeń:
  - δMo oznacza kąt obrotu przekroju w punkcie i kierunku działania momentu *Mo*,
  - δNo oznacza poziome przemieszczenie przekroju w punkcie i kierunku działania siły *No*,
  - δVo oznacza pionowe przemieszczenie przekroju w punkcie i kierunku działania siły *Vo*.

Model 1-1

Żeby policzyć siły wewnętrzne trzeba obręcz „przeciąć" w jakimś miejscu. Zacznijmy więc od przecięcia obręczy wzdłuż poziomej osi symetrii, jak na rysunku niżej.



Odcięta, górna połowa obręczy jest w równowadze dzięki przyłożonym siłom symulującym reakcje dolnej, odciętej części. Ze względu na symetrię obciążeń i z warunku $\Sigma Y = 0$ znajdujemy siły osiowe w punktach przecięcia „9:00" i „3:00", będą miały wartość $N1 = P/2$ każda. Moment *M*1 nie jest znany i jego wartość trzeba będzie wyliczyć. Zasadniczo, w każdym miejscu przecięcia obręczy powinny pojawić się trzy siły wewnętrzne, czyli trzy niewiadome po każdej stronie – siła podłużna *N*1, poprzeczna *V*1 i moment *M*1. Więc czemu na rysunku są przedstawione tylko dwie siły? Brakuje sił poprzecznych *V*1 (tnących). Już wyjaśniam – obręcz ściśnięta siłami przyłożonymi w punktach „12:00" i „6:00" jak na rysunku, odkształci się jak balon wzdłuż poziomej osi tak, że krzywizna w punktach przecięcia „9:00" i „3:00" będzie największa więc i moment *M*1 będzie w tych punktach największy (będzie to widoczne na wykresie momentów, niżej). Wiemy z wytrzymałości materiałów, że w miejscach gdzie moment osiąga (lokalne) maximum, tam ścinanie jest równe zero. Stąd brak sił poprzecznych *V*1 (tnących), w punktach przecięcia – są równe zeru.

Ze względu na symetrię względem obu prostopadłych osi, można by „pójść na skróty", policzyć kąt odkształcenia – $\delta M1$ używając tylko ¼ obwodu obręczy (czyli $0 \le x \le \pi/2$), wynik pomnożyć przez 2, policzony kąt $\delta M1$ przyrównać do zera i z uzyskanej zależności policzyć brakujący moment *M*1.

Miało być krok po kroku więc na bok ze „skrótami", zrobimy to ćwiczenie „długim" sposobem posługując się rysunkiem połówki obręczy jak wyżej.

Napiszmy ogólne równania sił wewnętrznych *Mx*, *Nx*, *Vx* wzdłuż łuku obręczy:

– dla kąta w przedziale $0 \le x \le \pi/2$

$$Mx = -M1 + \frac{P}{2}R\left(1-\cos(x)\right) \;\rightarrow\; \frac{\partial Mx}{\partial M1} = -1$$

$$Nx = -\frac{P}{2}\cos(x) \qquad \text{dla } x = 0,\ N1 = -P/2$$

minus oznacza ściskanie

$$Vx = \frac{P}{2}\sin(x) \qquad \text{dla } x = 0,\ V1 = 0$$

– dla kąta w przedziale $\pi/2 \le x \le \pi$

$$Mx = -M1 + \frac{P}{2}R\left(1-\cos(x)\right) - PR\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \;\rightarrow\; \frac{\partial Mx}{\partial M1} = -1$$

$$Nx = -\frac{P}{2}\cos(x) - P\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{dla } x = \pi,\ N1 = -P/2$$

minus oznacza ściskanie

$$Vx = \frac{P}{2}\sin(x) - P\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{dla } x = \pi,\ V1 = 0$$

Utwierdzamy jeden z punktów przecięcia (np. ten po prawej jak na rysunku), do lewego końca przykładamy moment *M*1 i znaną siłę *P*/2 i liczymy kąt obrotu $\delta M1$ w miejscu przecięcia (czyli w punkcie „9:00").

$$\delta M1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-M1 + \frac{P}{2}R\left(1-\cos(x)\right)\right)(-1)R\,dx +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-M1 + \frac{P}{2}R\left(1-\cos(x)\right) - PR\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)(-1)R\,dx$$

$$\delta M1 = M1R\int_0^{\pi} dx - \frac{P}{2}R^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos(x)\right)dx + PR^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$

Obliczony kąt obrotu $\delta M1$ tak naprawdę jest równy zeru, bo „odcięta" cześć obręczy dzięki ciągłości elementu w punkcie „9:00" gwarantuje, że żadnych zmian kąta stycznej do obręczy w punkcie „9:00" nie będzie. Po scałkowaniu, piszemy:

$$\delta M1 = \pi M1R - \pi\frac{P}{2}R^2 + PR^2 = 0$$

Stąd uzyskujemy wartość szukanego *M*1:

$$M1 = \frac{PR}{2\pi}(\pi - 2)$$

I to tyle, to kończy całe ćwiczenie.

Dla ciekawości, policzmy wartość momentu, siły osiowej i siły porzecznej w punkcie „12:00". Siły w tym punkcie będą oznaczane odpowiednio *Mo*, *No* i *Vo* – będą to zwykle poszukiwane niewiadome, które umożliwią policzenie sił wewnętrznych w dowolnym punkcie obręczy.

$$Mo = -\frac{PR}{2\pi}(\pi-2) + \frac{PR}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \;\rightarrow\; Mo = \frac{PR}{\pi}$$

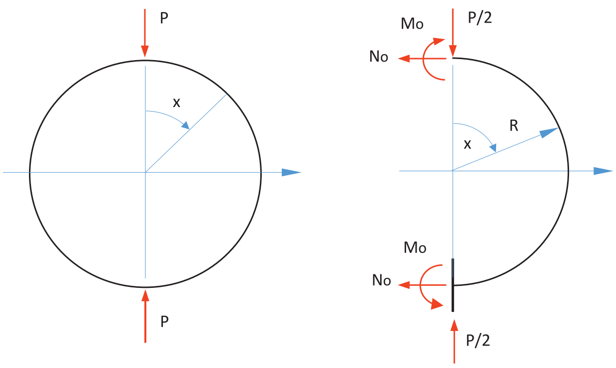
$$No = -\frac{P}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \;\rightarrow\; No = 0$$

$$Vo = 0$$

Jeszcze słowo względem *Vo*. Czytelnik zauważy, że z równań ogólnych na *Vx* wynika, że dla kąta $x = \pi/2$ można uzyskać w punkcie „12:00” dwie rożne wartości *Vx*. Zbliżając się do punktu „12:00” od lewej strony uzyskamy $Vx = +P/2$, a ze wzoru na *Vx* dla kąta w przedziale $\pi/2 \le x \le \pi$ uzyskamy $Vx = -P/2$. Wartości *Vx* po obu stronach punktu „12:00” są liczbowo takie same, różnią się tylko znakiem. To znaczy, że *Vx* zmienia znak w punkcie „12:00”, a więc musi istnieć trzecia wartość $Vx = 0$ w tym punkcie i to jest szukana wartość.

Model 1-2

Ten sam model, lecz tym razem obręcz jest przecięta wzdłuż pionowej osi symetrii. Zauważ, że przyłożone siły też są przecięte na pól, czyli każda z odciętych części jest obciążona połową siły w punkcie „12:00” i w punkcie utwierdzenia, punkt „6:00”, jak na rysunku. Kąt jest mierzony od punktu „12:00” zgodnie z ruchem wskazówek zegara czyli jest (+).



Jeśli obciążenie modelu jest symetryczne względem osi pionowej (jak w tym wypadku) wystarczy skupić uwagę na jednej z odciętych części przy liczeniu trzech niewiadomych sił w punkcie przecięcia.

Z warunku $\Sigma Y = 0$ wynika, że $Vo = 0$ w punkcie „12:00”, dlatego Vo nie jest zaznaczone na rysunku. Także z warunku $\Sigma X = 0$ można wydedukować, że $No = 0$ w punkcie „12:00”, ponieważ brak jest poziomych sił przyłożonych do obręczy. Mimo że znamy wartość *No*, przyjmijmy że *No* jest niewiadomą i spróbujmy ją policzyć. Nie można tego samego zrobić z siłą *Vo*, bo punkt „12:00” może się przemieścić w kierunku siły *Vo* skutkiem działania siły $P/2$.

Zacznijmy od ogólnych równań sił wewnętrznych *Mx*, *Nx*, *Vx* wzdłuż łuku obręczy i pochodnych równania momentu *Mx*, osobno, względem *Mo* i *No*:

– dla kąta w przedziale $0 \le x \le \pi$

$$Mx = Mo - NoR\left(1-\cos\left(x\right)\right) - \frac{P}{2}R\sin\left(x\right) \rightarrow \frac{\partial Mx}{\partial Mo} = 1 \rightarrow \frac{\partial Mx}{\partial No} = -R\left(1-\cos\left(x\right)\right)$$

$$Nx = +No\cos\left(x\right) - \frac{P}{2}\sin\left(x\right)$$

$$Vx = -No\sin\left(x\right) - \frac{P}{2}\cos\left(x\right)$$

– dla kąta w przedziale $\pi \le x \le 2\pi$, choć ta część obręczy nie będzie potrzebna do liczenia δNo i δMo

$$Mx = Mo - NoR\left(1-\cos\left(x\right)\right) - \frac{P}{2}R\sin\left(x\right) - PR\sin\left(x-\pi\right)$$

$$Nx = +No\cos\left(x\right) - \frac{P}{2}\sin\left(x\right) - P\sin\left(x-\pi\right)$$

$$Vx = -No\sin\left(x\right) - \frac{P}{2}\cos\left(x\right) - P\cos\left(x-\pi\right)$$

Liczymy kąt obrotu δMo w punkcie „12:00” używając tylko prawej odciętej części obręczy:

$$\delta Mo = \int_0^\pi \left(Mo - NoR\left(1-\cos\left(x\right)\right) - \frac{P}{2}R\sin\left(x\right)\right)\left(1\right)R\,dx$$

$$= MoR\int_0^\pi dx - NoR^2\int_0^\pi\left(1-\cos\left(x\right)\right)dx - \frac{PR^2}{2}\int_0^\pi \sin\left(x\right)dx$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\delta Mo = \pi MoR - \pi NoR^2 - 2\frac{PR^2}{2} = 0$$

dzięki ciągłości obręczy w punkcie „12:00” kąt $\delta M = 0$

skąd dostajemy:

$$Mo - NoR = \frac{PR}{\pi}$$

Policzmy teraz przemieszczenie poziome δNo w punkcie „12:00” używając tylko prawej odciętej części.

$$\delta No = \int_0^\pi \left(Mo - NoR\left(1-\cos\left(x\right)\right) - \frac{P}{2}R\sin\left(x\right)\right)\left(-R\left(1-\cos\left(x\right)\right)\right)R\,dx$$

$$= -MoR^2\int_0^\pi\left(1-\cos\left(x\right)\right)dx + NoR^3\int_0^\pi\left(1-\cos\left(x\right)\right)^2dx$$

$$+\frac{PR^3}{2}\int_0^\pi \sin\left(x\right)\left(1-\cos\left(x\right)\right)dx$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\delta No = -\pi MoR^2 + \frac{3\pi}{2}NoR^3 + 2\frac{PR^3}{2} = 0$$

dzięki ciągłości obręczy w punkcie „12:00” przemieszczenie $\delta N = 0$

skąd dostajemy:

$$Mo - \frac{3}{2}NoR = \frac{PR}{\pi}$$

Niewiadome wartości *Mo* i *No* uzyskujemy rozwiązując układ dwóch równań:

$$Mo - NoR = \frac{PR}{\pi}$$

$$Mo - \frac{3}{2}NoR = \frac{PR}{\pi} \rightarrow Mo = \frac{PR}{\pi} \rightarrow No = 0$$

$Vo = 0$

Końcowe wartości *Mx*, *Nx* i *Vx* są następujące:

– dla kąta w przedziale $0 \le x \le \pi$

$$Mx = \frac{PR}{2\pi}\left(2 - \pi\sin\left(x\right)\right)$$

$$Nx = -\frac{P}{2}\sin\left(x\right)$$

$$Vx = -\frac{P}{2}\cos\left(x\right)$$

– dla kąta w przedziale $\pi \le x \le 2\pi$

$$Mx = \frac{PR}{2\pi}\left(2 - \pi\sin\left(x\right) - 2\pi\sin\left(x-\pi\right)\right)$$

$$Nx = -\frac{P}{2}\left(\sin\left(x\right) - 2\sin\left(x-\pi\right)\right)$$

$$Vx = -\frac{P}{2}\left(\cos\left(x\right) - 2\cos\left(x-\pi\right)\right)$$

Pionowe odkształcenie średnicy obręczy

Moment wzdłuż łuku prawej odciętej części obręczy:

$$Mx = Mo - \frac{P}{2} R \sin(x) = \frac{PR}{2\pi}\left(2 - \pi \sin(x)\right)$$

Liczymy energię sprężystą w odciętej części i mnożymy przez 2 (bo dwie połówki) żeby uzyskać całkowitą energię w obręczy:

$$U = 2\int_0^{\pi} \frac{Mx^2}{2EI} ds = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi} Mx^2 dx = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi} \frac{P^2R^2}{4\pi^2}\left(4 - 4\pi \sin(x) + \pi^2 sin^2(x)\right) dx$$

Po scałkowaniu:

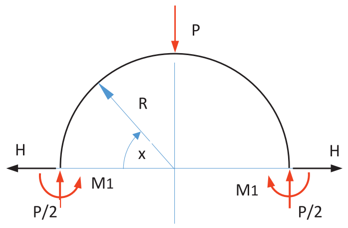
$$U = \frac{P^2R^3}{4\pi^2 EI}\left(4\pi - 8\pi + \frac{\pi^3}{2}\right) \rightarrow U = \frac{P^2R^3}{8\pi EI}\left(\pi^2 - 8\right)$$

Odkształcenie:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \Delta Y \rightarrow \Delta Y = \frac{PR^3}{4\pi EI}\left(\pi^2 - 8\right)$$ całkowite skrócenie średnicy mierzone pionowo.

Poziome odkształcenie średnicy obręczy

Użyjmy modelu 1-1 z dwoma dodatkowymi, fikcyjnymi siłami $H = 0$ w punktach „9:00” i „3:00” jak na rysunku.



Żeby policzyć poziome odkształcenie średnicy obręczy, mierzone miedzy punktami „9:00” i „3:00”, należy dołożyć fikcyjne siły w tych punktach skierowane w kierunku oczekiwanego odkształcenia (czyli poziomym w tym wypadku). Siły *H* są fikcyjne, mają wartość zero każda, więc nie zmieniają nic w rozkładzie sił wewnętrznych w obręczy, ale umożliwiają policzenie pochodnej z uzyskanej energii obręczy „U” względem siły *H* w zamierzonym kierunku, czyli przemieszczenia tego punktu.

Równanie momentu wzdłuż odciętej górnej części obręczy dla kąta w przedziale $0 \le x \le \pi/2$:

$$Mx = -M1 + \frac{P}{2} R\left(1 - \cos(x)\right) + HR\sin(x)$$

Wartość momentu *M*1 w punkcie „9:00” odzyskujemy z modelu 1-1:

$$M1 = \frac{PR}{2\pi}\left(\pi - 2\right)$$

$$Mx = \frac{PR}{2\pi}\left(2 - \pi\cos(x)\right) + HRsin(x)$$

$$Mx^2 = \frac{P^2R^2}{4\pi^2}\left(2 - \pi\cos(x)\right)^2 + \frac{HPR^2}{\pi}\left(2 - \pi\cos(x)\right)\sin(x) + H^2R^2 sin^2(x)$$

Tylko te części równania, które zawierają siłę *H*, mają znaczenie do dalszych rachunków, resztę można pominąć.

Liczymy energią sprężystą w górnej odciętej części obręczy:

$$U = 2\int_0^{\pi/2} \frac{Mx^2}{2EI} ds = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2} Mx^2 dx =$$

$$U = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2} \frac{HPR^2}{\pi}\left(2 - \pi\cos(x)\right)\sin(x) dx + \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2} H^2R^2 sin^2(x) dx$$

Po scałkowaniu:

$$U = \frac{HPR^3}{2\pi EI}\left(4 - \pi\right) + \frac{\pi H^2R^3}{4EI}$$

Liczymy poziome odkształcenie średnicy obręczy ΔX pamiętając, że $H = 0$ (drugi element wzoru znika):

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \Delta X \rightarrow \Delta X = \frac{PR^3}{2\pi EI}\left(4 - \pi\right)$$ całkowita wartość wydłużenia średnicy mierzona poziomo.

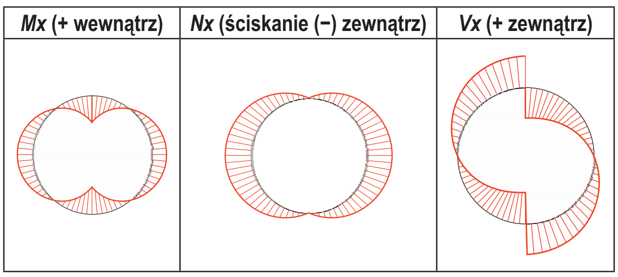
Przykład liczbowy

1. Zaczynamy od sił wewnętrznych *Mo*, *No*, *Vo* w punkcie „12:00”.
2. Siły wewnętrzne w dowolnym przekroju dla kąta w zakresie $0 \le x \le \pi$ liczymy z ogólnych równań podanych wyżej. Wartości sił *Mx* i *Nx* w odciętej, lewej części obręczy będą lustrzanym odbiciem tych policzonych po prawej stronie. Wartości *Vx* w przedziale $\pi \le x \le 2\pi$, czyli po lewej stronie będą numerycznie identyczne jak po prawej, ale ze zmienionym znakiem, *Vx* (po lewej) = − *Vx* (po prawej).

Dane: siła $P = 100$ kN, promień $R = 0{,}500$ m
Mo = 15,915 kNm, *No* = 0 kN, *Vo* = 0 kN.

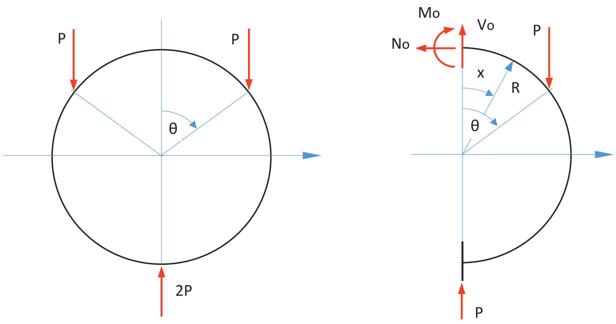
x [°]	*x* [rad]	*Mx* [kNm]	*Nx* [kN]	*Vx* [kN]
0	0.000	15.915	0.00	-50.00
10	0.175	11.574	-8.68	-49.24
20	0.349	7.365	-17.10	-46.98
30	0.524	3.415	-25.00	-43.30
40	0.698	-0.154	-32.14	-38.30
50	0.873	-3.236	-38.30	-32.14
60	1.047	-5.735	-43.30	-25.00
70	1.222	-7.577	-46.98	-17.10
80	1.396	-8.705	-49.24	-8.68
90	1.571	-9.085	-50.00	0.00
100	1.745	-8.705	-49.24	8.68
110	1.920	-7.577	-46.98	17.10
120	2.094	-5.735	-43.30	25.00
130	2.269	-3.236	-38.30	32.14
140	2.443	-0.154	-32.14	38.30
150	2.618	3.415	-25.00	43.30
160	2.793	7.365	-17.10	46.98
170	2.967	11.574	-8.68	49.24
180	3.142	15.915	0.00	50.00

Wykresy sił wewnętrznych



Model 2

Przecinamy obręcz wzdłuż osi pionowej. W punkcie „12:00” wstawiamy nieznane siły wewnętrzne, w punkcie „6:00” zakładamy pełne utwierdzenie. Żeby w miejscu przecięcia „12:00”



zapewnić ciągłość obręczy, zastępujemy odciętą część (ta po lewej stronie) siłami wewnętrznymi, które tam być powinny, jeśli kształt obręczy ma się nie zmienić. Jak wspomniałem wyżej, dla symetrycznych obciążeń wiemy, że siła tnąca w punkcie „12:00" jest równa zero. Zatem, mamy do wyliczenia *Mo*, *No* w punkcie „12:00" przecięcia.

Zacznijmy od ogólnych równań sił wewnętrznych *Mx*, *Nx* i *Vx* wzdłuż łuku:

– dla kąta w przedziale $0 \le x \le \theta$

$$Mx = Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x) \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial Mo} = 1$$

$$Nx = No\cos(x) + Vo\sin(x)$$

$$Vx = -No\sin(x) + Vo\cos(x)$$

– dla kąta w przedziale $\theta \le x \le \pi$

$$Mx = Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x) - PR\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right) \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial Mo} = 1$$

$$Nx = No\cos(x) + Vo\sin(x) - P\sin(x)$$

$$Vx = -No\sin(x) + Vo\cos(x) - P\cos(x)$$

Liczymy kąt obrotu δMo w punkcie „12:00" używając tylko prawej odciętej części obręczy:

$$\delta Mo = \int_0^{\theta}\left(Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x)\right)1R\,dx$$
$$+\int_{\theta}^{\pi}\left(Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x) - PR\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right)\right)1R\,dx$$

$$\delta Mo = MoR\int_0^{\pi}dx - NoR^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos(x)\right)dx + VoR^2\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$$
$$-PR^2\int_{\theta}^{\pi}\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right)dx$$

Po scałkowaniu i pamiętając, że prawdziwa wartość $\delta Mo = 0$ otrzymamy:

$$\delta Mo = \pi\,Mo\,R - \pi\,No\,R^2 + 2\,Vo\,R^2$$
$$-\,P\,R^2\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + 1\right) = 0$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie zawierające *Mo*, *No* i *Vo* w postaci:

$$Mo - NoR + \frac{2VoR}{\pi} = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + 1\right)$$

Policzmy teraz przemieszczenie poziome δNo w punkcie „12:00" używając tylko prawej odciętej części:

$$Mx = Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x) - PR\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial No} = -R\left(1-\cos(x)\right)$$

$$\delta No = \int_0^{\theta}\left(Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x)\right)\left(-R\left(1-\cos(x)\right)\right)dx$$
$$+\int_{\theta}^{\pi}\left(Mo - NoR\left(1-\cos(x)\right) + VoR\sin(x)\right.$$
$$\left.-PR\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right)\right)\left(-R\left(1-\cos(x)\right)\right)R\,dx$$

$$\delta No = -MoR^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos(x)\right)dx + NoR^3\int_0^{\pi}\left(1-\cos(x)\right)^2dx$$
$$-VoR^3\int_0^{\pi}\sin(x)\left(1-\cos(x)\right)dx$$
$$+PR^3\int_{\theta}^{\pi}\left(\sin(x)-\sin(\theta)\right)\left(1-\cos(x)\right)dx$$

Po scałkowaniu i pamiętając, że prawdziwa wartość $\delta No = 0$ otrzymamy:

$$\delta No = -\pi\,MoR^2 + \frac{3\pi}{2}NoR^3 - 2VoR^3$$
$$+PR^3\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) - \frac{\sin^2(\theta)}{2} + 1\right) = 0$$

Co prowadzi do wyrażenia:

$$Mo - \frac{3}{2}NoR + \frac{2}{\pi}VoR = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) - \frac{\sin^2(\theta)}{2} + 1\right)$$

Z układu dwóch równań znajdujemy *No*

$$Mo - NoR + \frac{2VoR}{\pi} = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + 1\right)$$

$$Mo - \frac{3}{2}NoR + \frac{2}{\pi}VoR = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) - \frac{\sin^2(\theta)}{2} + 1\right)$$

$$No = \frac{P}{\pi}\sin^2(\theta)$$

Następnie znajdujemy *Vo*

dla $x = \pi \rightarrow Vx = +P$

$Vx = -No\sin(\pi) + Vo\cos(\pi) - P\cos(\pi)$

$P = -Vo + P$

$Vo = 0$

Z układu dwóch równań, znając *Vo* i *No* znajdujemy *Mo*:

$$Mo - NoR + \frac{2VoR}{\pi} = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + 1\right)$$

$$Mo - \frac{3}{2}NoR + \frac{2}{\pi}VoR = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) - \frac{\sin^2(\theta)}{2} + 1\right)$$

$$Mo = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) + 1\right)$$

Wstawiamy wyliczone wartości *No* i *Mo* do ogólnych równań i uzyskujemy:

– dla kąta w przedziale $0 \le x \le \theta$

$$Mx = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) + \sin^2(x)\cos(x) - (\pi-\theta)\sin(\theta) + 1\right)$$

$$Nx = \frac{P}{\pi}\sin^2(\theta)\cos(x)$$

$$Vx = -\frac{P}{\pi}\sin^2(\theta)\sin(x)$$

– dla kąta w przedziale $\theta \le x \le \pi$

$$Mx = \frac{PR}{\pi}\left(\cos(\theta) + \sin^2(x)\cos(x) + \theta\sin(\theta) - \pi\sin(x) + 1\right)$$

$$Nx = \frac{P}{\pi}\left(\sin^2(\theta)\cos(x) - \pi\sin(x)\right)$$

$$Vx = -\frac{P}{\pi}\left(\sin^2(\theta)\sin(x) + \pi\cos(x)\right)$$

Przykład liczbowy

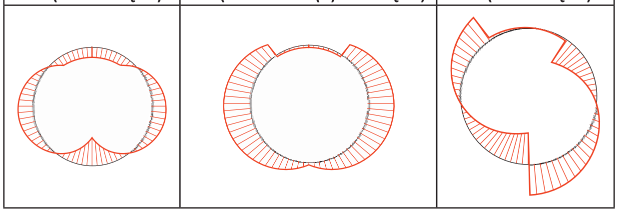
1. Zaczynamy od sił wewnętrznych *Mo*, *No*, *Vo* w punkcie „12:00”.
2. Siły wewnętrzne w dowolnym przekroju dla kąta w zakresie $0 \le x \le \pi$ liczymy z ogólnych równań podanych wyżej. Wartości sił *Mx* i *Nx* w odciętej, lewej części obręczy będą lustrzanym odbiciem tych policzonych po prawej stronie. Wartości *Vx* w przedziale $\pi \le x \le 2\pi$, czyli po lewej stronie będą numerycznie identyczne, jak po prawej, ale ze zmienionym znakiem, *Vx* (po lewej) = − *Vx* (po prawej).

Dane: siła $P = 100$ kN, promień $R = 0{,}500$ m, kąt $\theta = 35°$
$Mo = 11{,}086$ kNm, $No = 10{,}47$ kN, $Vo = 0$ kN

x [°]	*x* [rad]	*Mx* [kNm]	*Nx* [kN]	*Vx* [kN]
0	0.000	11.086	10.47	0.00
10	0.175	11.007	10.31	-1.82
20	0.349	10.771	9.84	-3.58
30	0.524	10.385	9.07	-5.24
40	0.698	6.401	-56.26	-83.34
50	0.873	-0.407	-69.87	-72.30
60	1.047	-6.154	-81.37	-59.07
70	1.222	-10.665	-90.39	-44.04
80	1.396	-13.802	-96.66	-27.68
90	1.571	-15.471	-100.00	-10.47
100	1.745	-15.620	-100.30	7.05
110	1.920	-14.246	-97.55	24.36
120	2.094	-11.390	-91.84	40.93
130	2.269	-7.139	-83.34	56.26
140	2.443	-1.621	-72.30	69.87
150	2.618	4.995	-59.07	81.37
160	2.793	12.508	-44.04	90.39
170	2.967	20.690	-27.68	96.66
180	3.142	29.293	-10.47	100.00

Wykresy sił wewnętrznych

Mx (+ wewnątrz) | *Nx* (ściskanie (–) zewnątrz) | *Vx* (+ zewnątrz)



Na zakończenie mogę tylko wyrazić nadzieję, że przykłady przedstawione w tym artykule, przybliżyły czytelnikowi ten ciekawy dział konstrukcji stalowych i wytrzymałości materiałów i pomogły zapoznać się z ogólnym mechanizmem rozwiązywania obręczy. Cdn.

Maciej Janik

Maciej Janik – mgr inż. budownictwa lądowego (Politechnika Wrocławska) z 25. letnim doświadczeniem przy projektowaniu (obliczenia) i budowie (w stoczni) dużych konstrukcji dla przemysłu petrochemicznego (platformy morskie).