

*Materiały Wysokoenergetyczne / High Energy Materials*, 2018, 10, 77 – 87; DOI: 10.22211/matwys/0169  
ISSN 2083-0165

Copyright 2018 © Institute of Industrial Organic Chemistry, Poland



Article is available under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 license CC BY-NC-ND 3.0.

## Praca doświadczalna / Research paper

# Wyznaczenie pola obciążeń generowanych wybuchem wydłużonych ładunków cylindrycznych *Modelling of blast field generated by elongated cylindrical charges*

**Andrzej Papliński**

Military University of Technology, Faculty of Mechatronics and Aerospace, Safety Engineering Division,  
ul. gen. Witolda Urbanowicza 2, 00-908 Warszawa, PL

<https://orcid.org/0000-0001-5286-3682>

E-mail: [andrzej.paplinski@wat.edu.pl](mailto:andrzej.paplinski@wat.edu.pl)

**Streszczenie.** *Przedmiotem pracy jest wyznaczenie pola obciążeń generowanych w górotworze wybuchem wydłużonych ładunków cylindrycznych. Podczas prac strzałowych w otworach wiertniczych stosowane są ładunki o długościach kilkunastu metrów i większych. W związku z tym, stacjonarny rozkład pól naprężeń i przemieszczeń ustala się w obciążonym górotworze wokół otworu, w którym detonacja przemieszcza się ze stałą prędkością. W pracy przedstawione zostało stacjonarne rozwiązanie określające rozkłady ciśnienia oraz prędkości radialnej i wzdłuż osi symetrii wytwarzanych ruchomym obciążeniem przemieszczającym się wzdłuż kawerny cylindrycznej wyciętej w nieograniczonym ośrodku materialnym. Obciążony ośrodek opisywany jest modelem jednofalowym, w którym prędkość rozprzestrzeniania się małych zaburzeń określona jest wielkością modułu odkształceń objętościowych. Rozwiązanie wyznaczone jest z wykorzystaniem metody przekształceń całkowitych. Przedstawiono rozwiązanie przykładowe, w którym przemieszczające się wzdłuż cylindrycznego otworu wymuszenie o stałej wielkości oddziałuje na ośrodek w określonym czasie.*

**Abstract:** *Dynamic load field generated in the rock mass by detonation of elongated cylindrical charges is determined. In practical blasting operations charges of dozen and more meters long are employed. Therefore, in the ambient medium around of the hole in which the charge detonates, a stationary field of stress and displacements is established. In the paper a stationary solution is presented which estimates the fields of pressure as well as of radial and axial velocity generated by a moving load propagating with constant velocity along the cylindrical hole cut in an infinite medium. The loaded medium is described by a one-wave model in which the small displacements speed is determined by the magnitude of the bulk modulus. The solution is estimated using integral transformations. A sample solution is provided, for a constant-value moving load acting on the internal surface of the hole for a given interval of time.*

**Słowa kluczowe:** cylindryczne ładunki wybuchowe, obciążenia dynamiczne

**Keywords:** cylindrical charges, rock blasting, stationary solution

## 1. Wprowadzenie

Przemysłowe wykorzystanie energii wybuchu jest ważnym aspektem działalności gospodarczej w zakresie pozyskiwania surowców mineralnych ze skał zwięzłych. Przemysłowe wykorzystanie materiałów wybuchowych

wyказuje tendencję rosnącą. Sumaryczne zużycie górniczych materiałów wybuchowych w Polsce w 2004 roku wynosiło ponad 10 tysięcy Mg, podczas gdy w 2013 roku było to już ponad 37 000 Mg [1]. Skumulowana w ładunku wybuchowym energia pozwala na kruszenie i fragmentację bloków skalnych w sposób o wiele bardziej ekonomiczny, niż byłoby w przypadku zastosowania urabiania mechanicznego. Oddziaływanie wybuchu na górotwór jest złożonym procesem, na który składają się zarówno właściwe określenie parametrów przemiany detonacyjnej, w warunkach umieszczenia ładunku w otworze strzałowym, jak i rozpoznanie mechaniki wybuchowego obciążenia materiału skalnego. Rozpoznanie mechanizmów przemiany i oddziaływania wybuchu na górotwór jest przedmiotem wielu aktualnie prowadzonych prac, które poświęcone są zarówno pogłębieniu wiedzy, jak i poprawie efektywności oddziaływania ładunków wybuchowych na górotwór, co przy dużej i rosnącej skali zastosowań ma również istotne znaczenie ekonomiczne [2, 3].

Przedmiotem pracy było wyznaczenie pola obciążeń wytwarzanych w górotworze wybuchem wydłużonych ładunków cylindrycznych. Podczas prowadzenia prac strzałowych w otworach wiertniczych stosowane są ładunki o długościach kilkunastu metrów i większych.

W podjętej publikacji przedstawione zostało rozwiązanie stacjonarne określające pola obciążeń wytwarzane ruchomym obciążeniem przemieszczającym się wzdłuż kawerny cylindrycznej wyciętej w ośrodku skalnym. Wyznaczone zostało rozwiązanie podstawowe, od obciążenia skupionego. Przedstawione zostało zastosowanie splotu, który pozwala na określenie rozkładu ciśnienia i prędkości wytwarzanych w obciążanym ośrodku detonacją wydłużonego ładunku cylindrycznego umieszczonego w otworze strzałowym.

## 2. Aproksymacja właściwości sprężystych ośrodka modelem jednofalowym

Obciążenie i propagacja zaburzeń w ośrodku sprężystym charakteryzowane są poprzez prędkości podłużnych ( $c_L$ ) i poprzecznych ( $c_T$ ) fal obciążenia.

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\mu$  – stałe sprężystości Lamego [4, 5]. Parametr  $\lambda$  związany jest z wartością modułu Younga  $E$  poprzez wielkość współczynnika Poissona  $\nu$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (3)$$

W wielu pracach stała Lamego  $\mu$  oznaczana jest symbolem  $G$ . Po uwzględnieniu zależności pomiędzy stałymi Lamego a modułem Younga

$$E = \frac{\lambda \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}{\nu} = 2G \cdot (1 + \nu) \quad (4)$$

prędkości podłużnych i poprzecznych fal naprężeń wyrażą się wówczas zależnościami

$$c_L = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{1 + \nu} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}} \quad (5)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6)$$

W przypadku badania właściwości dynamicznych wielu materiałów pierwszym wyborem jest często oznaczenie modułu rozciągania/ściskania jednowymiarowego, tj. modułu Younga. W takim przypadku, podczas opisu propagacji zaburzeń może być wykorzystana prędkość propagacji sprężystych  $c_1$  określona poprzez wielkość modułu Younga

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (7)$$

Przyjmując za podstawę opisu procesu obciążenia ośrodka prędkość  $c_1$  uzyskujemy jednofalowy opis rozwoju pola zaburzeń. Jednakże, takie założenie jest niewątpliwie związane z nadmiernymi uproszczeniami, całkowicie pomijane są przestrzenne efekty obciążeń i odkształceń. W związku z tym, w przedstawianej pracy przyjęty został model, w którym właściwości falowe materiału skalnego opisywane są jedną wartością prędkości rozprzestrzeniania się zaburzeń, jest to jednak wielkość odpowiadająca prędkości rozprzestrzeniania się w górotworze odkształceń postaciowych

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (8)$$

gdzie  $K$  – moduł odkształceń postaciowych

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (9)$$

W przypadku, gdy  $\nu = 0,3333$ , zachodzi równość  $E = K$ , co odpowiada relacji  $c_0 = c_1$ . W szczególności, wartość  $K$  wiąże ze sobą zależność pomiędzy dylatacją i średnią wartością naprężenia

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{-p}{K} \quad (10)$$

gdzie  $v$  - objętość właściwa ( $v = 1/\rho$ ),  $p$  - ciśnienie.

Przyjęcie uproszczenia określonego zależnością (10) sprowadza się do założenia, że rozpatrujemy ośrodek poddany hydrostatycznej kompresji, w których zachodzi równość normalnych składowych naprężeń,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p = \sigma \quad (11)$$

podczas gdy styczne składowe tensora naprężeń są równe zeru

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (12)$$

Jeżeli przyjmiemy, że zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniami może być wyrażona zależnością (10), wówczas ogólny wzór określający prędkość propagacji małych zaburzeń w ośrodku sprężystym

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}} \quad (13)$$

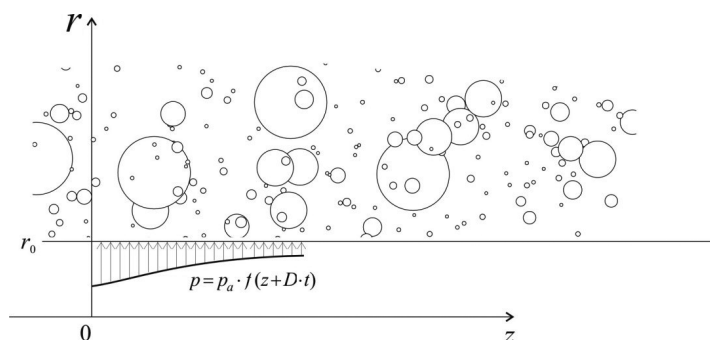
może być wyrażony za pomocą zależności

$$\dot{\sigma} = K \frac{\dot{v}}{v} \quad (14)$$

gdzie symbole  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{v}$  oznaczają różniczki zupełne po czasie, odpowiednio naprężenia średniego  $\sigma$  oraz objętości właściwej  $v$ . Zależność (14) podkreśla charakter parametru  $K$  jako wielkości, która wiąże ze sobą szybkość zmian wymuszenia z szybkością zmian objętości obciążanego materiału. Podobnie jak wzór (8), zależność (14) określa moduł  $K$  jako czynnik decydujący o szybkości rozprzestrzeniania się zaburzeń w obciążanym ośrodku. Przyjęcie jednofalowego modelu opisu właściwości ośrodka prowadzi do opisu stanu obciążenia materiału za pomocą kulistego tensora naprężeń. Opis obciążanego ośrodka z wykorzystaniem kulistego tensora naprężeń jest powszechnie stosowany podczas rozpatrywania oddziaływania produktów detonacji i wybuchu na ośrodki materialne (np. [6-8]). Warunki przejścia do przybliżenia jednoprędkościowego zostały szczegółowo omówione w pracy [9] (Dodatek D).

### 3. Równania ruchu ośrodka sprężystego obciążonego ruchomym obciążeniem przemieszczającym wzdłuż wewnętrznej powierzchni pustki cylindrycznej

Przedmiotem pracy jest wyznaczenie rozwiązania określającego pole naprężeń i prędkości w materiale, w którym obciążenie przemieszcza się wzdłuż wyciętej w ośrodku cylindrycznej kawerny. Schemat ilustrujący rozpatrywane zagadnienie przedstawiony został na rys. 1, na którym zaznaczone zostały osie cylindrycznego układu współrzędnych  $(r, z)$  oraz, w sposób schematyczny, naprężenie wymuszające, które działa na wewnętrzną powierzchnię cylindrycznej kawerny wyciętej w ośrodku. Rozpatrywane jest obciążenie przemieszczające się wzdłuż kawerny z prędkością  $D$ . Ciśnienie na czole obciążenia wzrasta skokowo do wartości  $p_a$ .



**Rys. 1.** Ruchome obciążenie przemieszczające się z prędkością  $D$ , działające na wewnętrzną powierzchnię pustki wyciętej w obciążonym ośrodku

Równania ruchu ośrodka sprężystego w cylindrycznym układzie współrzędnych  $(r, z)$  mogą być zapisane w postaci [4, 10, 11]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (15)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r}$$

gdzie  $v_r, v_z$ , - składowe prędkości odpowiednio w kierunku promieniowym i poosiowym,  $\sigma_r, \sigma_z$  - naprężenia promieniowe i wzdłuż osi  $z$ ;  $\sigma_\varphi$  - naprężenie obwodowe,  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$  - ścinające składowe naprężeń,  $\rho$  - gęstość właściwa ośrodka.

W przypadku, gdy rozpatrywane jest obciążenie rozprzestrzeniające się ze stałą prędkością wzdłuż osi symetrii, dogodnym jest wprowadzenie ruchomego układu współrzędnych  $(r, \zeta)$ , gdzie

$$\zeta = z + D \cdot t \quad (16)$$

odpowiednio

$$\frac{\partial}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

W przypadku, gdy stan naprężeń może być opisany uśrednionym naprężeniem  $\sigma$ , po wykorzystaniu zależności (14) wiążącej zmiany naprężenia uśrednionego ze zmianami objętości (gęstości) właściwej, pierwsze z równań (15) można sprowadzić do postaci

$$\frac{d\sigma}{dt} = K \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (18)$$

lub w ruchomym układzie współrzędnych  $(r, \zeta)$

$$\frac{1}{c_0^2} D \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = \rho_0 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \right) \quad (19)$$

Odpowiednio, w przybliżeniu jedno-prędkościowym, drugie i trzecie z równań (15) przyjmują postać

$$D \frac{\partial v_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \quad (20)$$

$$D \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \quad (21)$$

Ze względu na przyjęte założenie o pomijaniu wpływu zmian gęstości właściwej względem jej całkowitej wartości, pochodne substancjalne  $d/dt$  występujące w równaniach (15) w układzie równań (19-21) zastąpione zostały pochodnymi cząstkowymi. Różniczkując równania (19, 21) względem  $\zeta$  oraz równanie (20) względem  $r$  można równanie (19) sprowadzić do jednego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \left(1 - \frac{D^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (22)$$

Po wyznaczeniu rozwiązania równania (22), składowe prędkości określone są z równań

$$\frac{\partial v_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho_0 D} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \quad (23)$$

$$v_z = \frac{1}{\rho_0 D} \sigma$$

Rozpatrywane jest pole obciążeń propagujące się w ośrodek niezaburzony

$$\sigma(r, \zeta) = v_r(r, \zeta) = v_z(r, \zeta) = 0; \quad r > r_0, \zeta < 0 \wedge \zeta > z_1 \quad (24)$$

gdzie przedział  $\zeta \in [0, z_1]$  jest zakresem, w którym działa wymuszenie przyłożone na wewnętrznej powierzchni kawerny

$$\sigma(r_0, z, t) = \sigma(r_0, \zeta) = -p_a f(\zeta) \quad 0 \leq \zeta \leq z_1 \quad (25)$$

#### 4. Wyznaczenie rozwiązania podstawowego metodą transformacji całkowych

W celu uproszczenia procesu wyznaczania rozwiązania i uogólnienia otrzymywanych wyników, wprowadzone zostały zmienne bezwymiarowe

$$R = \frac{r}{r_0};$$

$$\eta = \frac{\zeta}{r_0} = \frac{z + D \cdot t}{r_0};$$

$$M = \frac{D}{c_0};$$

$$\Sigma = \frac{\sigma}{p_a};$$

$$V_r = \frac{\rho_0 c_0 v_r}{p_a};$$

$$V_z = \frac{\rho_0 c_0 v_z}{p_a}; \quad (26)$$

Zgodnie z rys. 1, symbolem  $r_0$  oznaczony został promień kawerny, na powierzchnię której działa wymuszenie, przy czym  $p_a$  oznacza skokowy wzrost ciśnienia na czole przemieszczającego się obciążenia. W przypadku, gdy rozpatrywane jest obciążenie generowane detonacją wydłużonego ładunku cylindrycznego, wielkość  $p_a$  odpowiada skokowi ciśnienia na czole fali detonacyjnej. Odpowiednio, funkcja  $f(\zeta)$  występująca w warunku brzegowym (25) opisuje zmiany ciśnienia za czołem fali detonacyjnej. Pozostałe wielkości występujące we wzorach (26) odpowiadają zmiennym wprowadzonym w punkcie 2, podczas formułowania równań ruchu, w szczególności symbol  $\sigma$  oznacza średnią wartość naprężenia (wzór (11)).

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych (26) układ równań (22, 23) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \Sigma(R, \eta)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma(R, \eta)}{\partial R} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \Sigma(R, \eta)}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\frac{\partial V_r(R, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{M} \frac{\partial \Sigma(R, \eta)}{\partial R} \quad (27)$$

$$V_z(R, \eta) = \frac{1}{M} \Sigma(R, \eta)$$

Równania (27) są alternatywną postacią zadania (22-25) sformułowaną we współrzędnych bezwymiarowych (26). Do wyznaczenia rozwiązania problemu wykorzystana zostanie metoda przekształceń całkowych [12, 13]. Zastosowano transformację Fouriera względem zmiennej  $\eta$

$$\tilde{F}(R, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(R, \eta) e^{-i\omega\eta} d\eta \quad (28)$$

Po przeprowadzeniu transformacji, równania (27)<sub>1</sub>, (27)<sub>2</sub> przyjmują postać

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Sigma}(R, \omega)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Sigma}(R, \omega)}{\partial R} + (1 - M^2)(-i\omega)^2 \tilde{\Sigma}(R, \omega) = 0 \quad (29)$$

$$\tilde{V}_r(R, \omega) = \frac{1}{M} \frac{i}{\omega} \frac{\partial \tilde{\Sigma}(R, \omega)}{\partial R} \quad (30)$$

W przypadku, gdy prędkość wymuszenia jest większa od prędkości propagacji zaburzeń falowych w obciążonym ośrodku, tj. gdy  $M > 1$ , współczynnik przy trzecim członie równania (29) ma wartość dodatnią

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Sigma}(R, \omega)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Sigma}(R, \omega)}{\partial R} + (M^2 - 1)\omega^2 \tilde{\Sigma}(R, \omega) = 0 \quad (31)$$

Rozwiązanie ogólne określające wartość transformaty naprężenia będzie miało wówczas postać

$$\tilde{\Sigma}(R, \omega) = A_1(\omega) H_0^{(1)}(\beta\omega \cdot R) + B_1(\omega) H_0^{(2)}(\beta\omega \cdot R) \quad (32)$$

gdzie  $H_0^{(1)}$ ,  $H_0^{(2)}$  są funkcjami Hankela (funkcjami Bessela trzeciego rodzaju), natomiast

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1} \quad (33)$$

Zgodnie z regułą wypromieniowania, wraz ze wzrostem  $R$  rozwiązanie w nieskończoności powinno dążyć do zera. Stąd, należy przyjąć

$$A_1(\omega) = 0 \quad (34)$$

Wykorzystując zależności pomiędzy funkcjami Bessela

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x) \quad (35)$$

$$K_0(i \cdot x) = i \frac{\pi}{2} (J_0(x) - iY_0(x)) \quad (36)$$

rozwiązanie ogólne równania (31) wyrazić można w postaci

$$\tilde{\Sigma}(R, \omega) = B(\omega) K_0(i\omega\beta \cdot R) \quad (37)$$

gdzie  $J_0$ ,  $Y_0$  – funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, podczas gdy  $K_0$  – zmodyfikowana funkcja Bessela rzędu 0. Stała  $B(\omega)$  wyznaczana jest z warunku brzegowego.

Zgodnie z metodyką wyznaczania rozwiązań z wykorzystaniem transformacji całkowych, w pierwszej kolejności wyznaczane jest rozwiązanie podstawowe od wymuszenia opisywanego uogólnioną funkcją  $\delta$  Diraca

$$\sigma(r_0, z, t) = -p_a \delta(z + D \cdot t) \quad (38)$$

Funkcja Diraca jest funkcją punktową. W punkcie zero wartość funkcji dąży do nieskończoności. Wszędzie poza punktem zero funkcja przyjmuje wartości zerowe, przy czym całka z funkcji  $\delta$  Diraca równa jest jedności. Transformata warunku brzegowego (38), wyraża się zależnością

$$\tilde{\Sigma}(1, \omega) = -1 \quad (39)$$

Po uwzględnieniu warunku brzegowego (39) otrzymano

$$B(\omega) = -\frac{1}{K_0(i\omega\beta \cdot 1)} \quad (40)$$

Rozwiązanie układu równań (29, 30) przyjmuje zatem postać

$$\tilde{\Sigma}(R, \omega) = -\frac{K_0(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} \quad (41)$$

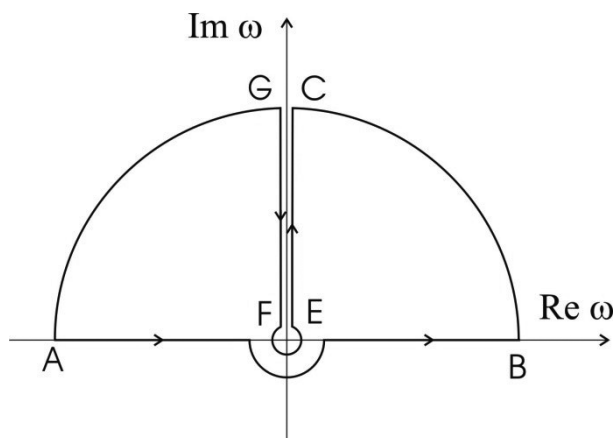
oraz odpowiednio

$$\tilde{V}_r(R, \omega) = \frac{\beta}{M} \frac{K_1(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} \quad (42)$$

Transformacja odwrotna, niezbędna do wyznaczenia poszukiwanego rozwiązania, określona jest zależnością [12, 13]

$$F(R, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(R, \omega) e^{i\omega\eta} d\omega \quad (43)$$

Wykonanie transformacji odwrotnej wymaga wykonania całkowania wzdłuż drogi AB, jak zaznaczona na rys. 2.



Rys. 2. Kontur całkowania do wyznaczenia transformacji odwrotnej

Funkcje (41, 42) nie mają punktów osobliwych wewnątrz konturu ABCEFGA przedstawionego na rys. 2. W związku z tym, zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego, całka po tym konturze jest równa zeru. Wyznaczenie transformat odwrotnych, tj. określenie całek wzdłuż osi zmiennych rzeczywistych AB może być zatem zastąpione obliczeniem całek po łukach niekończonych AG i CB, wzdłuż półosi GF i CE połączonym z uwzględnieniem wartości residuum w początku układu współrzędnych.

Dla dużych wartości argumentu funkcje zmodyfikowane funkcje Bessela  $K_0(x)$  i  $K_1(x)$  mają przedstawienie asymptotyczne [14]

$$K_n(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (44)$$

, gdzie  $n = 0, 1$ .

Po uwzględnieniu (44), całki transformat (41, 42) po łukach niekończonych mogą być wyrażone za pomocą zależności

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{AG,CB} \frac{K_0(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} e^{i\omega\eta} d\omega = -\frac{1}{\sqrt{R}} \delta(\eta - \beta \cdot (R-1)); \quad \eta - \beta \cdot (R-1) \geq 0 \quad (45)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\beta}{M} \int_{AG,CB} \frac{K_1(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} e^{i\omega\eta} d\omega = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\beta}{M} \delta(\eta - \beta \cdot (R-1)); \quad \eta - \beta \cdot (R-1) \geq 0$$

Punkt zero na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest dla funkcji Bessela punktem rozgałęzienia. W związku z tym całki po półosiach GF, CE nie będą się znosić (zerować). Na poszczególnych płatach płaszczyzny Riemanna zachodzą zależności [14]

$$K_n(\rho \cdot e^{i\pi}) = (-1)(K_n(\rho) - i\pi \cdot I_n(\rho)) \quad (46)$$

$$K_n(\rho \cdot e^{-i\pi}) = (-1)(K_n(\rho) + i\pi \cdot I_n(\rho))$$

Po uwzględnieniu, że półosie GF, CE leżą na różnych płatach płaszczyzny zmiennej zespolonej, otrzymano

$$\frac{1}{2\pi} \int_{GF,EC} \frac{K_0(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} e^{i\omega\eta} d\omega = \int_0^{\infty} G_{\Sigma}(R, \rho) e^{-\rho\eta} d\rho$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{GF,EC} \frac{K_1(i\omega\beta \cdot R)}{K_0(i\omega\beta)} e^{i\omega\eta} d\omega = \int_0^{\infty} G_V(R, \rho) e^{-\rho\eta} d\rho \quad (47)$$

gdzie

$$G_{\Sigma}(R, \rho) = \frac{K_0(\beta \cdot \rho) I_0(\beta \cdot \rho \cdot R) - K_0(\beta \cdot \rho \cdot R) I_0(\beta \cdot \rho)}{K_0^2(\beta \cdot \rho) + \pi \cdot I_0^2(\beta \cdot \rho)} \quad (48)$$

$$G_V(R, \rho) = \frac{K_1(\beta \cdot \rho \cdot R) I_0(\beta \cdot \rho) + K_0(\beta \cdot \rho \cdot R) I_1(\beta \cdot \rho \cdot R)}{K_0^2(\beta \cdot \rho) + \pi \cdot I_0^2(\beta \cdot \rho)}$$

Funkcje  $K_0(x)$  i  $K_1(x)$  dążą w początku układu współrzędnych do nieskończoności [14]. Jednakże, ponieważ

$$K_0(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\cong} -\ln(x) \quad (49)$$

$$K_1(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\cong} -\frac{1}{x}$$

transformaty (41, 42) nie posiadają w początku układu współrzędnych residuum (wartość residuum wynosi zero). Uwzględniając (45, 48, 49) otrzymamy następujące wyrażenia określające pola ciśnienia i prędkości radialnej

$$\Sigma(R, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{R}} \delta(\eta - \beta \cdot (R-1)) - \int_0^{\infty} G_{\Sigma}(R, \rho) e^{-\rho\eta} d\rho \cdot H(\eta - \beta \cdot (R-1))$$

$$V_r(R, \eta) = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\beta}{M} \delta(\eta - \beta \cdot (R-1)) + \frac{\beta}{M} \int_0^{\infty} G_V(R, \rho) e^{-\rho\eta} d\rho \cdot H(\eta - \beta \cdot (R-1)) \quad (50)$$



We wzorach (50) wprowadzona została funkcja Heaviside'a

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \\ 1 & \text{gdy } z \geq 0 \end{cases} \quad (51)$$

Funkcja Heaviside'a odzwierciedla rozbieżność, jaka występuje dla całek po łukach nieskończonych AG i CB w przypadku  $\eta - \beta \cdot (R - 1) < 0$ . Całe rozwiązanie jest wówczas rozbieżne.

## 5. Wyznaczenie pola obciążeń wytwarzanych w górotworze ruchomym obciążeniem przemieszczającym wzdłuż wewnętrznej powierzchni pustki cylindrycznej

Otrzymane rozwiązanie podstawowe (50) pozwala na wyznaczenie rozwiązania dla innych postaci funkcji wymuszającej  $f(\zeta)$ , występującej w warunku brzegowym (25). W przypadku, gdy otrzymane rozwiązanie od warunku brzegowego opisywanego funkcją delta Diraca (wzór (38)) oznaczmy za pomocą funkcji  $\Sigma_0(R, \eta)$ , rozwiązanie od obciążenia opisywanego funkcją  $f(\eta)$  o dowolnej postaci, tj. od warunku brzegowego (25), wyrażać się będzie poprzez spłot

$$\Sigma(R, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma_0(R, \eta - \tau) f(\tau) d\tau \quad (52)$$

Jako rozwiązanie przykładowe rozpatrzone zostało obciążenie o stałej wartości, które na powierzchnię pustki cylindrycznej oddziałuje w określonym przedziale czasu. Przyjęto, że ciśnienie działające na powierzchni pustki ma wartość stałą ( $p_m = p_a$ ) i działa przez okres  $t_1$ . Bezwymiarowa funkcja charakteryzująca ciśnienie działające na wewnętrzzną powierzchnię kawerny ma w takim przypadku postać

$$f(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \eta_1 \geq \eta \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } \eta < 0 \cap \eta > \eta_1 \end{cases} \quad (53)$$

gdzie  $\eta_1 = (D \cdot t_1) / r_0$ . Zgodnie z regułą spłotu (52), rozwiązanie dla funkcji wymuszenia o postaci (53) otrzymamy w postaci

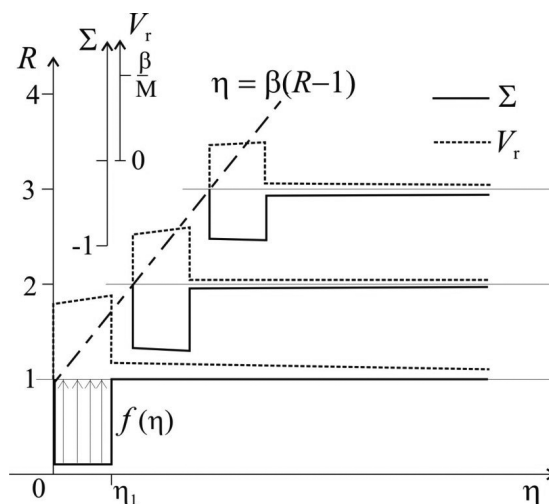
$$\Sigma(R, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{R}} f(\eta - \beta \cdot (R - 1)) - \int_0^{\infty} G_{\Sigma}(R, \rho) S(\eta, \rho) d\rho \cdot H(\eta - \beta \cdot (R - 1)) \quad (54)$$

$$V_r(R, \eta) = \frac{\beta}{M} f(\eta - \beta \cdot (R - 1)) + \frac{\beta}{M} \int_0^{\infty} G_r(R, \rho) S(\eta, \rho) d\rho \cdot H(\eta - \beta \cdot (R - 1)) \quad (55)$$

gdzie

$$S(\eta, \rho) = \int_{-\infty}^{\eta - \beta(R-1)} f(\tau) e^{-\rho(\eta - \tau)} d\tau \quad (56)$$

Ze względu na postać funkcji  $G_{\Sigma}$  i  $G_{Vr}$  wyznaczenie całek (54) i (55) wymaga całkowania numerycznego. Przykładowa postać pola zaburzeń wytwarzanego w obciążanym ośrodku wymuszeniem o postaci (53), które przemieszcza się ze stałą prędkością wzdłuż wyciętej w ośrodku cylindrycznej kawerny, przedstawiona została na rys. 3.



**Rys. 3.** Pole naprężeń ( $\Sigma$ ) i prędkości radialnej ( $V_r$ ) powstające w wyniku obciążenia powierzchni cylindrycznej kawerny wymuszeniem, które przemieszcza się ze stałą prędkością

Rozwiązanie wyznaczone za pomocą metody transformacji całkowych otrzymywane jest w postaci jawnej. Ułatwia fizyczną interpretację charakteru rozwiązania. W szczególności, rozwiązanie określone wzorami (54, 55) pozwala na bezpośrednie, w sposób jawny, wyznaczenie położenia frontu zaburzeń falowych. Równanie frontu zaburzeń generowanych obciążeniem poruszającym się z prędkością  $D$  określone jest zależnością

$$\eta = \beta \cdot (R - 1); \quad z + D \cdot t = \sqrt{\frac{D^2}{c_0^2} - 1} \cdot (r - r_0) \quad (57)$$

gdzie  $c_0$  jest prędkością rozprzestrzeniania się małych zaburzeń.

Rozwiązanie przedstawione na rys. 3 dotyczy wybranego rodzaju obciążenia. W podobny sposób, poprzez zastosowanie reguły splotu (56), z wykorzystaniem rozwiązania podstawowego (54, 55), mogą być wyznaczone rozwiązania określające pola obciążeń wytwarzane przez inne rodzaje wymuszenia. Podobnie, mogą być uwzględnione właściwości poszczególnych rodzajów obciążanych skał, poprzez wprowadzenie odpowiednich wartości do zmiennych bezwymiarowych, dla których wyznaczone zostało przedstawione w pracy rozwiązanie.

## 6. Podsumowanie

W pracy przeprowadzona została analiza pola obciążeń wytwarzanego w ośrodku sprężystym wymuszeniem, które przemieszcza się ze stałą prędkością wzdłuż wyciętej w ośrodku cylindrycznej kawerny. Obciążany materiał skalny opisany został modelem ośrodka jednofalowego, w którym prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń określona jest prędkością odkształceń objętościowych.

Otrzymane rozwiązanie podstawowe pozwoliło na wyznaczanie rozwiązań od funkcji obciążenia o różnych postaciach, poprzez zastosowanie reguły splotu. Przedstawione zostało rozwiązanie przykładowe od obciążenia o stałej wartości, które działa na wewnętrzną powierzchnię cylindrycznej kawerny w określonym przedziale czasu.

## Literatura

- [1] Sitkiewicz-Wołodko R., Maranda A. 2016. Analiza wybranych parametrów saletroli i emulsyjnych materiałów wybuchowych. *CHEMIK* 70 (1): 3-16.
- [2] Mertuszka P., Fuławka K. 2017. Badania kontrolne parametrów strzałowych materiałów wybuchowych i środków strzałowych w warunkach ruchowych zakładu górniczego. *Materiały Wysokoenergetyczne* 9: 194-203.
- [3] Mertuszka P., Fuławka K., Baran W., Waczur J. 2018. *Wpływ sposobu umieszczenia sondy pomiarowej względem ładunku materiału wybuchowego na prędkość detonacji*. Materiały XV Międzynarodowej Konferencji Naukowej IPOEX2018 *Materiały Wybuchowe. Badania – Zastosowanie – Bezpieczeństwo*, Ustroń-Zawodzie, 11-13.06.2018, p. 36.
- [4] Nowacki W. 1970. *Teoria sprężystości*. Warszawa : PWN.
- [5] Fung Y.C. 1965. *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, ISBN 65-18496.
- [6] Orlenko L.P., red. 2004, *Fizika Vzryva*. t. 2, Moskwa : Fizmatlit, ISBN 978-5922102209.
- [7] Zukas J.A. 1982. *Impact dynamics*. New York : Wiley, ISBN 978-0894646904.
- [8] Włodarczyk E. 2012. *Podstawy fizyki wybuchu*. Warszawa : WAT, ISBN 978-83-62954-30-8.
- [9] Włodarczyk E., Jackowski A. 2016. *Teoretyczne podstawy kumulacji*. Warszawa : WAT, ISBN 978-83-7938-110-4.
- [10] Malvern L. 1969. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, ISBN 69-13712.
- [11] Jach K. 2001. *Komputerowe modelowanie dynamicznych oddziaływań ciał metodą punktów swobodnych*. Warszawa : PWN, ISBN 83-01-13378-3.
- [12] Irving J., Mullineux N. 1962. *Mathematics in Physics and Engineering*. New York : Academic Press, ISBN 59-7685.
- [13] Trajdos-Wróbel T. 1966. *Matematyka dla inżynierów*. Warszawa : WNT.
- [14] Ryżik I.M., Gradsztejn I.S. 1964. *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. Warszawa : PWN.

Received: November 14, 2018

Revised: December 2, 2018

Published: December 14, 2018