



Andrzej BRZOZA, Michał MUSZYŃSKI

KONTAKT SKRĘTNY Z UWZGLĘDNIENIEM CZĘŚCIOWYCH POŚLIZGÓW DLA STEMPLA STOŻKOWEGO

Streszczenie

W artykule omówiono kontakt skrętny dla stempla stożkowego i sprężystej półprzestrzeni. Przedstawiono ogólne rozwiązanie osiowosymetrycznego zagadnienia skręcania z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla znanego rozkładu naprężeń normalnych i znanej wielkości strefy styku. Prezentowane podejście jest odmienne, niż w rozwiązaniu klasycznym, w którym stosuje się teorię Herta. Problem częściowych poślizgów sprowadza się do równań całkowych rozwiązywanych numerycznie. Przedstawione wyniki są porównywalne z klasycznym rozwiązaniem dla styku skrętnego stempla stożkowego i sprężystej półprzestrzeni w zagadnieniu Lubkina.

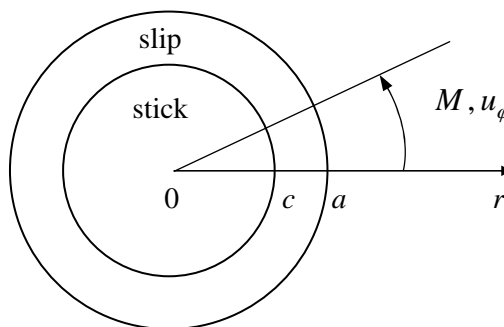
WSTĘP

Wiedza o zagadnieniach kontaktowych jest wykorzystywana do wielu zastosowań takich jak budowa maszyn, budowa dróg i mostów, transport kołowy i szynowy, a także do wielu innych współczesnych dziedzin techniki, w tym między innymi w elektrotechnice, inżynierii mechanicznej, biomechanice [1-5]. Pionierska praca Herta [1] podaje rozwiązanie zagadnienia kontaktowego dla styku idealnie sprężystych ciał o doskonale gładkich brzegach, na których nie występują siły tarcia. Rozwiązanie to, mimo tak sformułowanych uproszczeń, nadal odgrywa bardzo istotną rolę przy projektowaniu połączeń i węzłów kontaktowych. Jednakże współczesna praktyka inżynierska wymaga uwzględnienia rzeczywistych warunków, które charakteryzują zjawiska i procesy występujące w kontakcie ciał, nie uwzględnione w klasycznym rozwiązaniu. Wśród wielu czynników wpływających na kontakt ciał bardzo ważną rolę odgrywa struktura brzegowa stykających się powierzchni i powstawanie mikroślizgów, których uwzględnienie przybliży zagadnienie kontaktowego do warunków rzeczywistych.

W niniejszym artykule badane jest inne od klasycznego ogólne rozwiązanie zagadnienia skręcania z uwzględnieniem częściowych poślizgów, przy założeniu, że znany jest rozkład naprężeń normalnych oraz wielkość strefy styku [7]. W rozdziale pierwszym przedstawione zostały ogólne relacje uwzględniające związki między kątem skręcania, a wielkością strefy przyczepności, momentem obrotowym i naciskami kątowymi, przy uwzględnieniu podziału strefy styku na obszary przyczepności i poślizgów. Następnie w rozdziale drugim rozpatrujemy kontakt skrętny stempla stożkowego przy uwzględnieniu częściowych poślizgów, który jest rozwiązany przy pomocy wzorów przedstawionych w rozdziale pierwszym. Wyniki są porównane z klasycznym rozwiązaniem styku skrętnego w zagadnieniu Lubkina [2].

1. UOGÓLNIONY KONTAKT SKRĘTNY Z UWZGLĘDNIENIEM CZĘŚCIOWYCH POŚLIZGÓW

Rozważamy zagadnienie osiowosymetrycznego styku ciał, z których jedno jest sztywnym stemplem, a drugie sprężystą półprzestrzenią, w układzie współrzędnych walcowych $0r\varphi z$. Zakładamy, że naciski normalne spełniają warunki, przy których w zagadnieniu kontaktu skrętnego we wspólnej strefie styku powstają poślizgi. Uważamy, że środkowa część strefy styku znajduje się w warunkach całkowitej przyczepności, podczas gdy na zewnętrznym pierścieniu tej strefy powstają poślizgi [5], co przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Osiowosymetryczny styk skręcający – strefa przyczepności (stick) i strefa poślizgu (slip)

Niech znany jest rozkład nacisków normalnych pomiędzy ciałami $p(r)$ oraz wielkość kołowej strefy styku a . Następnie przyłożony jest moment obrotowy M , który nie ma wpływu na zagadnienie normalne. Pod działaniem momentu obrotowego w półprzestrzeni powstaje stan czystego skręcania opisany jednym niezerowym przemieszczeniem w kierunku kątowym $u_\varphi(r, z)$, co powoduje dwie niezerowe składowe tensora naprężeń $\tau_{r\varphi}(r, z)$ i $\tau_{z\varphi}(r, z)$.

Biorąc pod uwagę relacje pomiędzy składowymi tensora naprężeń, a przemieszczeniem kątowym z prawa Hooke'a [3] otrzymujemy równanie równowagi na przemieszczenia

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Warunki brzegowe rozważonego problemu w strefie przyczepności

$$u_\varphi(r, 0) = \kappa r, \quad 0 < r \leq c \quad (2a)$$

$$q(r) < fp(r), \quad 0 < r \leq c \quad (2b)$$

Warunki brzegowe rozważonego problemu w strefie poślizgów

$$u_\varphi(r, 0) > 0, \quad c < r < a \quad (2c)$$

$$q(r) = fp(r), \quad c < r < a \quad (2d)$$

gdzie: $\kappa = \text{const}$ – dany kąt skręcania sztywnego stempla, c – niewiadomy promień obszaru przyczepności, f – współczynnik tarcia, q – naciski kątowe, u_φ – przemieszczenie kątowe.

Do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia stosujemy transformację całkową Hankela, równanie operatorowe Abela [6], natomiast do obliczenia całek, których nie da się rozwiązać analitycznie, zastosowano całkowanie numeryczne standardową metodą prostokątów.

Rozwiązanie końcowe przedstawionego zagadnienia sprowadza się do wzorów [7]

dla nacisków kątowych

$$q(r) = fp(r) - \begin{cases} \frac{d}{dr} \int_r^c \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ 0, & r > c \end{cases} \quad (3)$$

dla przemieszczenia kąowego

$$u_\varphi(r,0) = -\frac{f}{\mu} R_1(r) - \frac{1}{\mu r} \begin{cases} \int_0^r \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ \int_0^c \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & r > c \end{cases} \quad (4)$$

dla szukanej funkcji $\varphi_0(r)$ z rozwiązania równania Abela [6]

$$\varphi_0(r) = -\frac{4}{\pi} \mu \kappa r - \frac{2}{\pi} f r \int_r^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad 0 \leq r \leq c \quad (5)$$

dla relacji pomiędzy kątem skręcania κ i promieniem strefy przyczepności c

$$\kappa = -\frac{f}{2\mu} \int_c^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \quad (6)$$

dla relacji pomiędzy momentem skrętnym i naciskiem normalnym

$$M = 2\pi \int_0^a r^2 p(r) dr - \frac{32}{3} \mu \kappa c^3 - 8f \int_0^c r \int_r^c \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_t^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt dr \quad (7)$$

Wzory (3)-(7) zależne są od funkcji $p(r)$ wyrażającej rozkład nacisków normalnych.

Wykorzystując powyższe wzory można przykładowo rozwiązać zagadnienia Lubkina [2] dla styku skrętnego dwóch kul. Wychodząc od rozkładu Hertza na naciski normalne [1]

$$p(r) = -\frac{3P}{2\pi a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (8)$$

otrzymujemy wzór [7]

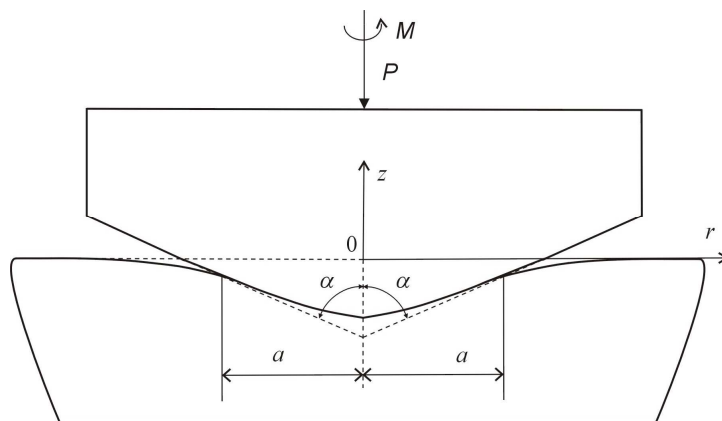
$$\kappa^* \equiv \frac{\mu a^2}{fP} \kappa = \frac{3}{4\pi} k^2 D(k) \quad (9)$$

odpowiadający znanej zależności między znormalizowanym kątem skręcania i wielkością strefy przyczepności w zagadnieniu Lubkina dla styku skrętnego dwóch kul [2].

2. PRZYKŁAD STEPLA STOŻKOWEGO

W oparciu o ogólne wzory (3-7) z rozdziału pierwszego zostanie rozwiązane zagadnienie kontaktu skrętnego z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla stempla stożkowego.

Rozważmy osiowoosymetryczny styk stempla stożkowego o danym kącie rozwarcia 2α ze sprężystą półprzestrzenią, który jest przedstawiony na rys. 2.



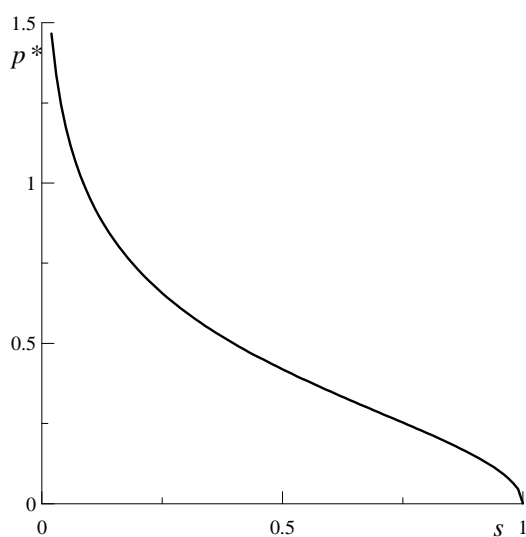
Rys. 2. Geometria styku stempla stożkowego z półprzestrzenią

Rozkład nacisków normalnych w zmiennych bezwymiarowych pomiędzy stemplem stożkowym i sprężystą półprzestrzenią $p(r)$ oraz promień strefy styku a są znane [4]

$$p(r) = \frac{E^* \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi} \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}} \right] \quad (10a)$$

$$a = \sqrt{2PE^* \operatorname{tg} \alpha} \quad (10b)$$

gdzie: $E^* = \frac{E_1 E_2}{(1-\nu_2)E_1 + (1-\nu_1)E_2}$, E_1, E_2 – moduły Younga, ν_1, ν_2 – współczynniki Poissona.



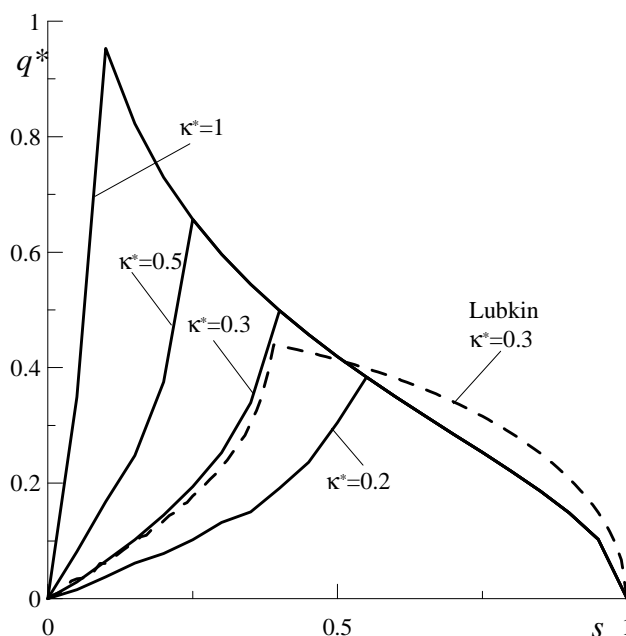
Rys. 3. Rozkład nacisków normalnych dla stempla stożkowego

Rozkład nacisków normalnych pokazuje rys. 3. Na przedstawionym wykresie widoczne jest, że naciski normalne zanikają na granicy styku $s=1$. Wzrost wartości nacisków

kontaktowych występuje w centralnej strefie styku wraz ze zmniejszaniem się promienia s , natomiast rosną one nieograniczenie w środku strefy styku dla $s=0$. To zachowanie jest spowodowane doskonale ostrym wierzchołkiem stempla stożkowego.

Niech w warunkach rozważanego styku normalnego przyłożony jest moment skrętny M . Z powyższego wynika, że naciski normalne spełniają warunki, przy których w zagadnieniu skręcania powstają częściowe poślizgi, a do rozwiązania zagadnienia o podanej geometrii można użyć ogólnych wzorów (3), (4), (5), (6) i (7) przedstawionych w rozdziale pierwszym. Ponieważ całki występujące we wzorach (3)-(7) nie mogą być policzone analitycznie dla funkcji nacisków kontaktowych danej wzorem (10a), więc do obliczenia tych całek zastosowano całkowanie numeryczne metodą prostokątów [7].

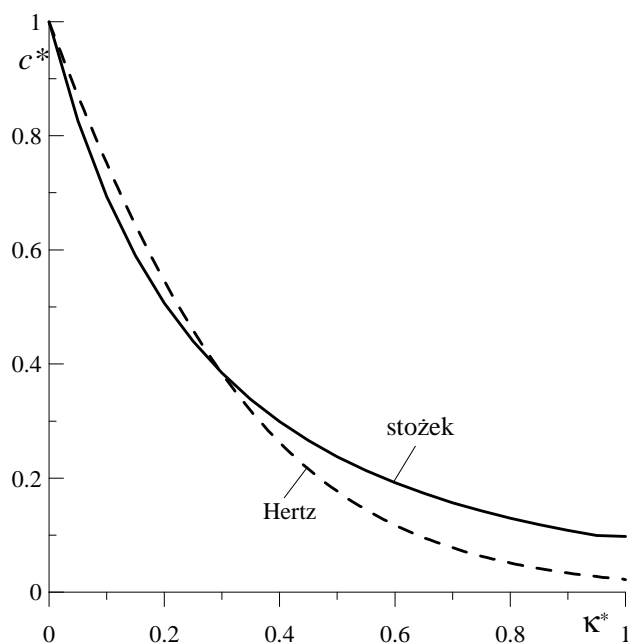
Wstawiając rozkład normalny (10a) do wzoru (5) obliczamy funkcję pomocniczą $\varphi_0(r)$. Następnie wstawiamy obliczoną funkcję pomocniczą do wzoru (3) i poprzez zastosowanie całkowania numerycznego standardową metodą prostokątów wyznaczamy rozkład nacisków kątowych w zmiennych znormalizowanych. Naciski te dla kilku wartości bezwymiarowego kąta skręcania κ^* przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Rozkład siły stycznej przy różnych kątach skręcania dla stempla stożkowego

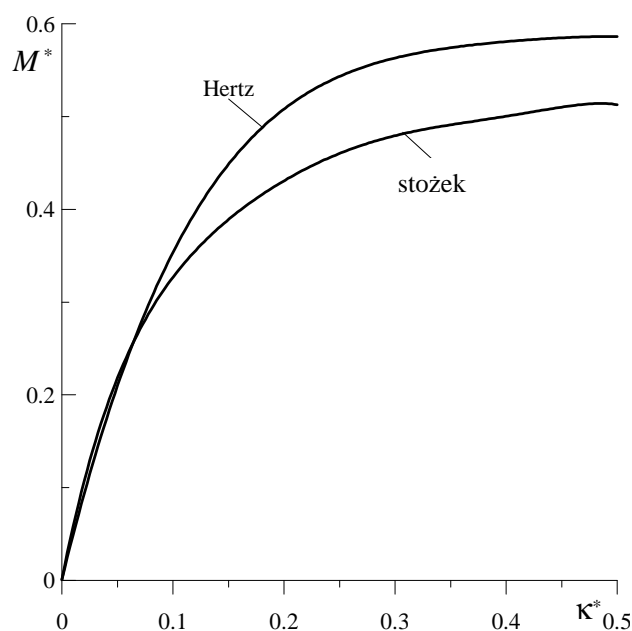
Wzrost bezwymiarowego kąta skrętnego κ^* powoduje wzrost sił stycznych, które maksymalną wartość osiągają przy zbliżaniu się do środka obrotu w punkcie $s=0$. Dla porównania, naciski kątowe w zagadnieniu Lubkina [2] są przedstawione linią przerywaną, przy ustalonej wartości kąta $\kappa^* = 0,3$.

Wstawiając znany rozkład normalny (10a) do wzoru (6) i postępując analogicznie jak wyżej otrzymujemy rozwiązanie numeryczne dla zależności strefy przyczepności od kąta skrętnego, które zostało przedstawione na rys. 5. Na wykresie ilustrującym rozwiązanie wielkości strefy przyczepności widoczne jest, że wzrost kąta skrętnego powoduje zmniejszenie obszaru przyczepności. Linia przerywana obrazuje omawianą zależność dla stempla stożkowego w zagadnieniu Lubkina [2].



Rys. 5. Strefa przyczepności w zależności od kąta skrętnego dla stempla stożkowego

Wstawiając teraz naciski normalne (10a) do wzoru na moment skrętny (7), numerycznie otrzymamy zależność momentu skrętnego od kąta skrętnego w zmiennych bezwymiarowych. Wykres tej zależności przedstawiony jest na rys. 6. Dla porównania przytoczono odpowiednią zależność w zagadnienia Lubkina [2].



Rys. 6. Moment skrętny w zależności od kąta skrętnego dla stempla stożkowego

Należy zwrócić uwagę na to, że w przypadku stempla stożkowego zależności, zarówno promienia strefy przyczepności jak i momentu od kąta skręcającego, dla małych wartości kąta mało różnią się od odpowiednich zależności w zagadnieniu Lubkina. Dla większych wartości kąta κ^* różnica pomiędzy naszym rozwiązaniem, a rozwiązaniem Lubkina jest znacząca.

PODSUMOWANIE

W referacie zaprezentowano inne od klasycznego podejście do kontaktu skrętnego ciał uwzględniającego częściowe poślizgi, które przedstawiono w postaci uogólnionych wzorów. Pokazano warunki na rozkład nacisków kontaktowych, przy których częściowy poślizg jest nieunikniony. Otrzymano rozwiązane zagadnienie kontaktu skrętnego z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla stempla stożkowego i sprężystej półprzestrzeni jako szczególny przypadek ogólnego rozwiązania.

TORSIONAL CONTACT INVOLVING PARTIAL SLIP FOR A CONICAL PUNCH

Abstract

This paper discusses torsional contact between a conical punch and an elastic half-space. It provides a general solution to the problem of axially symmetric torsion, taking into account partial slip for a known distribution of normal stress and a known contact area. The approach differs from the classical solution, in which the Hertz theory is used. The partial slip problem was reduced to integral equations solved numerically. The results are similar to those of the classical solution for a conical punch and an elastic half-space in a Lubkin's problem.

BIBLIOGRAFIA

1. Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92, pp.156-171, 1881.
2. Lubkin J.L.: *The torsion of elastic spheres in contact*, ASME J. Appl. Mech., 18, 183-187, 1951.
3. Nowacki W.: *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN 1970.
4. Johnson K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, UK, 1985.
5. Pauk V.: *Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych*, ISSN 0239-4952, Wyd. Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2005.
6. Sneddon I.N.: *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York 1951.
7. Brzoza A.: *Kontakt skrętny z uwzględnieniem częściowych poślizgów*, ISSN 1231-5478, Logistyka, 3/2012, s. 193-202, Maj-Czerwiec 2012.

Autorzy:

dr Andrzej BRZOZA – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Wydział Budownictwa i Architektury, Katedra Inżynierii Komunikacyjnej, e-mail: a.brzoza@tu.kielce.pl

mgr inż. Michał MUSZYŃSKI – Politechnika Warszawska w Warszawie, Wydział Elektryczny, Automatyka i Robotyka, e-mail: Michal.Muszynski@iem.pw.edu.pl