

Budowa wiarygodnego modelu obliczeniowego układu nawierzchnia drogowa-podłoże gruntowe

Dr hab. inż. Marta Kadela, prof. ITB, Samodzielne Stanowisko ds. Projektów Badawczych, Instytut Techniki Budowlanej

1. Wprowadzenie

W ciągu ostatnich pięćdziesięciu lat dokonał się gwałtowny postęp w zakresie oceny i przewidywania zachowania materiałów, elementów budowlanych czy całych konstrukcji przy zastosowaniu odpowiednich metod obliczeniowych. Jest to związane z jednej strony z rosnącymi potrzebami, jakie niosą za sobą wielkie inwestycje, takie jak konstrukcje podziemne, budowle typu wieżowego, ciężkie budynki przemysłowe, wielkie zbiorniki i składowiska, autostrady i duże obiekty mostowe, a z drugiej – wiąże się ściśle z rozwojem aparatury, procedur badawczych oraz metod interpretacji otrzymanych rezultatów badań, jak również z brakiem możliwości przeprowadzenia badań w pełnowymiarowej skali w warunkach in situ (głównie z uwagi na czas i koszty samych inwestycji). Do procesu przyczynił się także rozwój możliwości realizacyjnych wielkich zamierzeń, które rosły wraz z rozwojem zarówno możliwości technologicznych, jak i obliczeniowych związanych z modelowaniem numerycznym rozważanych zagadnień.

Rozwój mechaniki oraz rozwój komputeryzacji, zwłaszcza w zakresie dostępnych programów do wykonywania obliczeń, przyczynił się do stosowania metody elementów skończonych (MES) w ocenie odpowiedzi konstrukcji i podłoża na zadane obciążenie [1–4] oraz coraz szerszego wykorzystywania w procesie projektowania i oceny stanu nośności i użyteczności wszelkiego typu konstrukcji budowlanych. Bazując na nich, wykonano wiele analiz, dotyczących oceny trwałości elementów budowlanych i całych konstrukcji.

Stosowanie obliczeń numerycznych jest również zasadne ze względu na rosnące zapotrzebowanie analizy zachowania układu budowla-podłoże, mające na celu optymalizację kosztów wykonania, oszacowanie możliwości przekształcenia istniejących obiektów, rozbudowy, nadbudowy itp. Jest to także zgodne z podejściem proponowanym w normach europejskich Eurocod, w tym przypadku Eurocod 7 [5] oraz podejściem BIM, bazując na całym cyklu życia nawierzchni drogowej od momentu jej zaprojektowania do zniszczenia (rys. 1).

Numeryczny model obliczeniowy może być zbudowany w różny sposób, zależnie od:

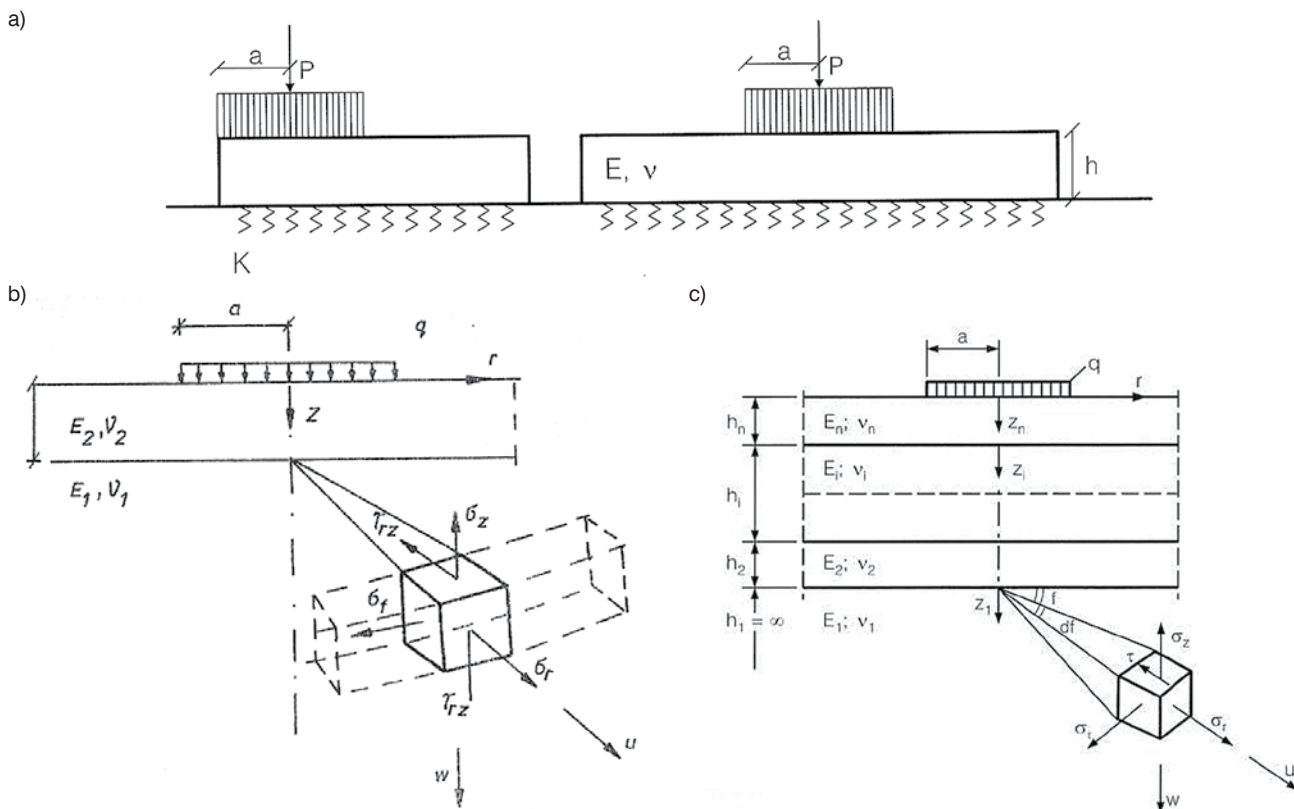
- budowy geometrycznej modelu obliczeniowego oraz sposób wprowadzania warunków brzegowych,
- przyjęcie modeli konstytutywnych materiałów warstw konstrukcji oraz modelu podłoża gruntowego, wraz z doborem adekwatnych parametrów modeli,
- sposób realizacji obciążenia w modelach obliczeniowych (2D) lub (3D) [9-14].

2. Wiarygodna budowa modelu obliczeniowego w analizie wytrzymałości konstrukcji i podłoża

Teoretyczne podejście do problemu wymiarowania nawierzchni drogowej ma swoje początki w próbie rozwiązania zadania statycznego płyty sprężystej Kirchoffa [15] spoczywającej na podłożu Winklera oraz poszukiwaniu rozwiązania równania równowagi statycznej płyty we współrzędnych



Rys. 1. Nawierzchnia drogowa przed oddaniem do użytku – odcinek doświadczalny w Ornontowicach (a) [6-8] oraz spękanie nawierzchni drogowej w Mysłowicach (b) (zdjęcia własne)



Rys. 2. Schemat modelu Werstergaarda (a), schemat układu dwuwarstwowego (b), model sprężystej półprzestrzeni warstwowej (c) [16]

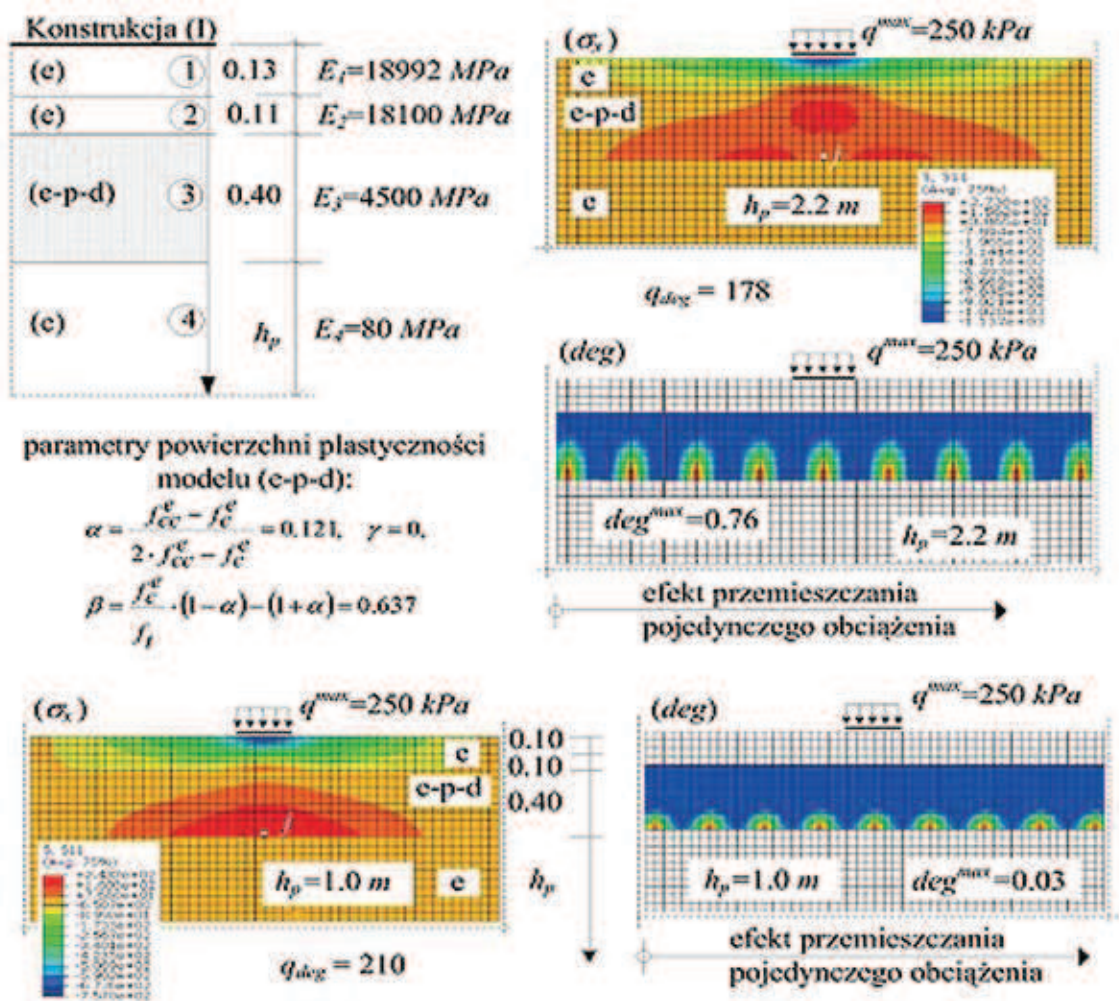
biegunowych [16, 17]. W 1926 r. H. M. Westergaard teorię tę przystosował do potrzeb projektowania nawierzchni betonowych [18]. W postępowaniu takim schemat płyty sprężystej spoczywającej na podłożu Winklera wykorzystywany jest do chwili obecnej w celu określenia stanów naprężenia, odkształcenia i przemieszczeń [19].

Wraz z pojawieniem się pojazdów ciężarowych na drogach oraz rozwojem towarowego transportu drogowego nastąpił wielki wzrost intensywności obciążenia przypadającego na koło, a w ślad za tym pojawiły się pierwsze teorie pozwalające na określenie rozkładu stanu naprężenia w konstrukcji nawierzchni drogowej oraz w podłożu gruntowym. W 1916 roku problem warstwy sprężystej położonej na półprzestrzeni obciążonej siłą skupioną postawiony został przez K. Terezawa [20], a następnie był rozwijany przez M. Melana (1918 r.) [21] i K. Marguere (1931 r.) [22].

W 1943 roku taki układ dwuwarstwowy, obciążony naciskiem równomiernie rozłożonym, został rozwiązany przez D. M. Burmistera [23], który podał rozwiązanie numeryczne dla ugięć tego układu. W roku 1945 Burmister rozpatruje płytę początkowo dwuwarstwową [24], a później wielowarstwową, spoczywającą na modelu podłoża w postaci półprzestrzeni sprężystej [21, 25]. Zastępczy nacisk opony samochodowej jest przedstawiany jako osiowo-symetryczne obciążenie płyty rozłożone na powierzchni koła, a następnie zadanie to sprowadza się do rozwiązania równania biharmonicznego płyty we współrzędnych walcowych. Numerycznym określeniem stanu naprężenia w omawianym

układzie zajmowali się również między innymi Fox [26] czy Hank i Scrivner [27].

Do chwili obecnej w praktyce inżynierskiej model izotropowych warstw ułożonych na półprzestrzeni sprężystej jest modelem bazowym, a obliczenia naprężeń i odkształceń przeprowadza się w sposób analityczny przy użyciu specjalistycznych programów komputerowych [28–35]. Chcąc jednak zastosować metody MES, w których używane powszechnie określenia „analiza na podłożu sprężystym” lub „analiza na półprzestrzeni sprężystej” są niezdefiniowane, należy zastosować odpowiedni model obliczeniowy układu konstrukcja drogowa-podłoże gruntowe w stanie (3D) lub (2D). Najbliższy rozwiązaniu półprzestrzeni wydaje się model osiowej symetrii (OS), będący uproszczeniem modelu w pełnej przestrzeni. Stąd powszechne jego stosowanie w praktyce inżynierskiej, jak również rozważaniach naukowych [36]. Jest to podejście odmienne do modelowania układów budynek-podłoże, gdzie najczęściej spotyka się modele w płaskim stanie odkształcenia (2D). Modelowanie układu nawierzchnia-podłoże w stanie (2D) wydaje się jednak wysoce zasadne nie tylko z uwagi na prostotę i szybkość obliczeń, ale przede wszystkim ze względu na samą specyfikę „drogi”, która może być rozpatrywana jako przekrój poprzeczny wycięty z nieskończonej przestrzeni. Wykorzystanie analiz w stanie (2D) można znaleźć m.in. w [37, 38]. Przy czym w literaturze tej dominuje wykorzystywanie tego modelu kontynualnego przy rozważaniach badawczych np. doboru geosyntetyków [39], oceny wpływu oddziaływań



Rys. 3. Ocena stopnia degradacji warstwy podbudowy [10]

poziomych powstałych pod wpływem prowadzonej eksploatacji górniczej [40] lub przy uwzględnianiu zaawansowanych związków konstytutywnych [41].

Zagadnienia modelowania numerycznego w pełnej przestrzeni (3D) stanowią nadal wyjątki wśród przedstawianych w literaturze [42–44]. Prowadzenie analiz w stanie (3D) dotyczy raczej modelowania konkretnych zjawisk, których wpływ mógłby zostać pominięty lub w ogóle nie jest możliwy do oceny w analizach wykorzystujących uproszczenia w modelowaniu. Są to np. prace, mające na celu ocenę wpływu kół (rozstaw i rodzaj) na odpowiedź nawierzchni [45], czy ocenę wpływu kształtu swobodnych powierzchni bocznych warstw konstrukcji [1], kształtowania kolein [46] lub pośrednio związanych – modelowanie wzmocnienia podłoża pod nasypy drogowe [47]. Wprowadzając założenie, że model podłoża gruntowego pod konstrukcją drogową jest półprzestrzenią sprężystą, obszar odpowiedzi na obciążenie jest myślowo nieograniczony. W rzeczywistości tylko nieliczne dostępne oprogramowania komputerowe MES mają opcję siatek z elementami nieskończonymi [31, 48], dlatego standardem jest przyjmowanie do obliczeń modelu obliczeniowego o skończonych wymiarach (w poziomie i w pionie).

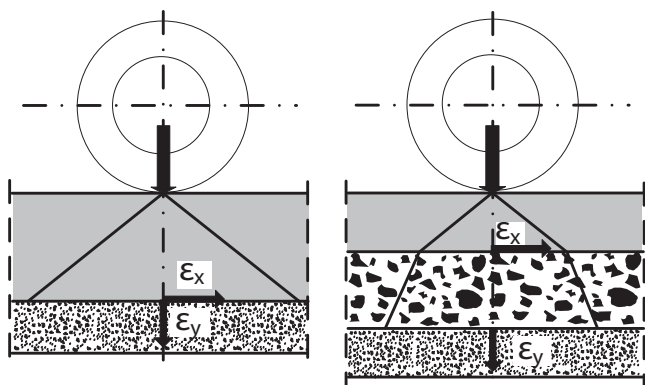
3. Model obliczeniowy układu nawierzchnia-podłoże gruntowe

3.1. Opis modelu obliczeniowego

W podejściu inżynierskim zaawansowane modelowanie, z użyciem zaawansowanych modeli konstytutywnych do opisu zachowania materiałów warstw (rys. 3) nie spełnia roli użytecznego modelu, możliwego do stosowania.

Dlatego w niniejszym artykule przedstawiono skuteczność prostych numerycznych modeli obliczeniowych, wykorzystujących związki liniowej sprężystości w analizach mechanicznych wymiarowania nawierzchni drogowej, oceny jej nośności i wzmocnienia, a docelowo także technice BIM. Analizę przeprowadzono z uwagi na analizę wielkości, wchodzących do kryteriów zmęczenia (rys. 4):

- odkształcenie rozciągające ϵ_x w spodzie dolnej warstwy asfaltowej,
- odkształcenie ściskające ϵ_y na górnej powierzchni podłoża gruntowego,
- odkształcenie rozciągające lub naprężenie rozciągające w spodzie warstwy podbudowy, gdy warstwa ta jest warstwą związaną spoiwem hydraulicznym.



Rys. 4. Charakterystyczne wielkości kryterialne, uwzględniane przy projektowaniu

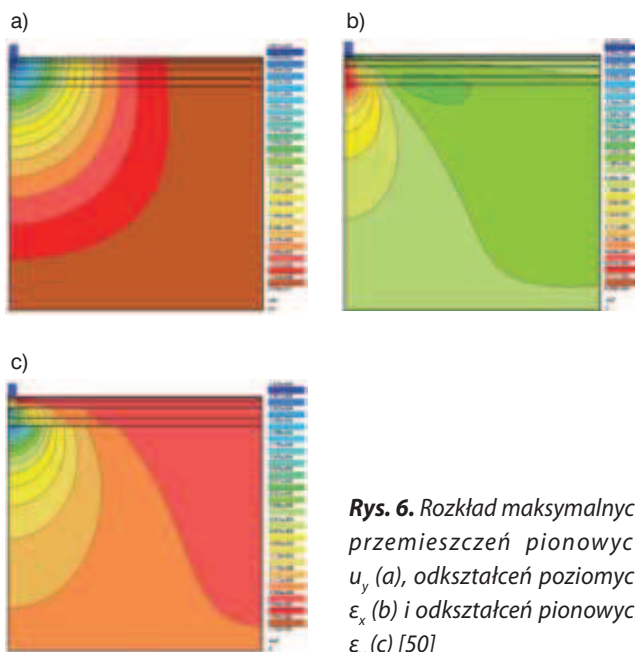


Rys. 5. Bazowy model MES układu nawierzchnia-podłoże (osiowa symetria)

Przedmiotem analizy były także maksymalne przemieszczenie pionowe bezpośrednio pod obciążeniem kołem u_y . Do obliczeń przyjęto przykładowy układ nawierzchnia-podłoże gruntowe jako trójwymiarowe kontinuum materialne złożone z jednorodnych, izotropowych warstw, opisanych związkami liniowej sprężystości (rys. 5). Założono pełną szczepność pomiędzy warstwami konstrukcyjnymi oraz pomiędzy warstwami nawierzchni a podłożem. Model obliczeniowy został zdyskretyzowany siatką MES o wymiarze najmniejszego oczka równym 0,01 m (s1). Założono brak możliwości przemieszczania punktów na ścianach bocznych i na dolnej podstawie w kierunkach do nich prostopadłych. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programu ZSoil.PC. Założono, że na nawierzchnię działa standardowe koło samochodowe o dopuszczalnym nacisku osi o wartości $P=100$ kN. Obciążenie przyłożono bezpośrednio na nawierzchnię jako równomiernie rozłożone q na powierzchni koła o średnicy d .

3.2. Wyniki analiz numerycznych

Wyniki dla konstrukcji bazowej w postaci map odkształceń i przemieszczenia przedstawiono na rysunku 6. Rozkłady przemieszczeń i odkształceń dla modelu w stanie



Rys. 6. Rozkład maksymalnych przemieszczeń pionowych u_y (a), odkształceń poziomych ϵ_x (b) i odkształceń pionowych ϵ_y (c) [50]

(2D) i modelu w pełnej przestrzeni (3D) zostały przedstawione na rysunku 6. Dla analiz w stanie (2D) przyjęto obciążenie zastępcze $q^* = 125$ kN/m, stanowiące najlepsze dopasowanie do wielkości kryterialnych uzyskanych w modelu bazowym (modelu OS) [49].

Zaobserwowano taki sam charakter odpowiedzi układu nawierzchnia-podłoże, wyznaczony rozkładami przemieszczenia i odkształcenia, przy czym analizowane wartości są różne w zależności od przyjętego modelu konstytutywnego. Biorąc pod uwagę analizy w płaskim stanie odkształcenia (2D), w stanie osiowo-symetrycznym (OS) i pełnego modelu przestrzennego (3D), największe wartości poszczególnych wielkości kryterialnych (rys. 7) otrzymano dla stanu (2D), a najmniejsze dla – (3D). W odniesieniu do wielkości uzyskanych w modelu osiowo-symetrycznym stanowią one odpowiednio 20 i 4%. Potwierdza to także dobrą korelację analiz w stanie (3D), czyli w zakresie osiowo-symetrii i pełnego modelu przestrzennego.

Wpływ wielkości obszaru obliczeniowego na wartości przemieszczeń i odkształceń w charakterystycznych miejscach układu był przedmiotem następnych badań. Analizy numeryczne zostały przeprowadzone dla modelu bazowego (OS) i kolejno powiększanego obszaru podłoża sprężystego. W pracy przyjęto następujące wymiary:

- szerokość: $B = 3,5; 5,0; 7,0$ m,
- wysokość: $H = h_p + h_{naw} = 0,42-15,42$ m,

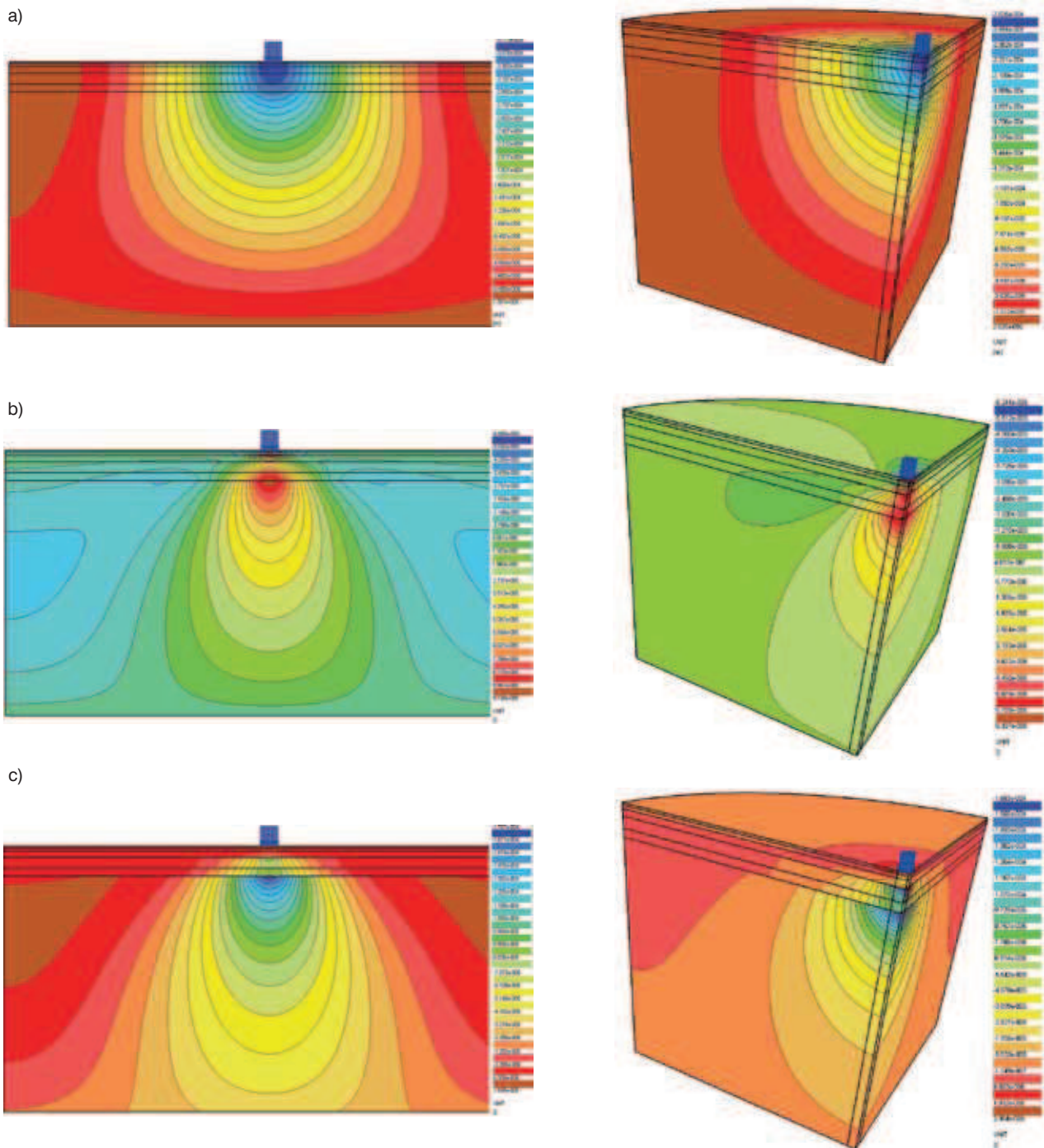
gdzie:

h_p – miąższość podłoża w zakresie 0,0–15,0 m,

h_{naw} – grubość konstrukcji nawierzchni drogowej równa w analizowanym przypadku 0,42 m.

Wyniki zostały przedstawione na rysunkach 8-15.

Wraz ze zwiększaniem wielkości obszaru obliczeniowego zaobserwowano stabilizację wielkości kryterialnych. Jest



Rys. 7. Rozkłady maksymalnych przemieszczeń pionowych u_y (a), odkształceń poziomych ϵ_x (b) i pionowych ϵ_y (c) rejestrowanych w charakterystycznych miejscach w nawierzchni dla modelu, po lewej stronie w stanie (2D), po prawej – (3D) [50]

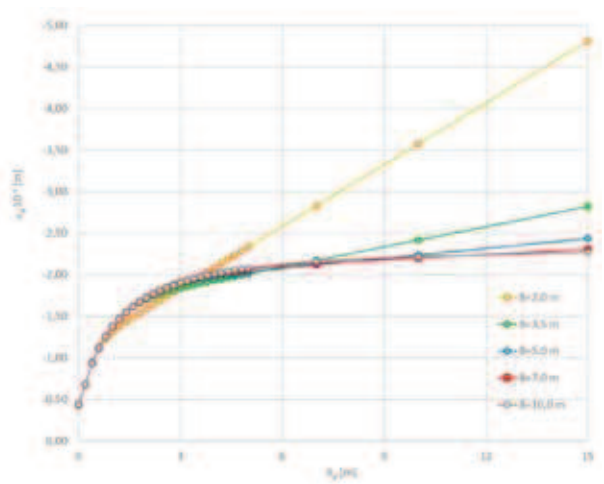
to równoznaczne z zanikiem wpływu geometrii wielkości podkładu dolnego, reprezentującego podłoże gruntowe, na odkształcenia uwzględniane w procesie projektowania. Jako optymalne wymiary z uwagi na otrzymaną dokładność wielkości kryterialnych oraz mając na uwadze czas obliczeń związany z wielkością obszaru, został uznany model obliczeniowy układu o wymiarach 5,0x5,42 m. Tak zbudowanym modelem obliczeniowym posłużono się w dalszych analizach.

Następnie model nawierzchni współpracującej z podłożem

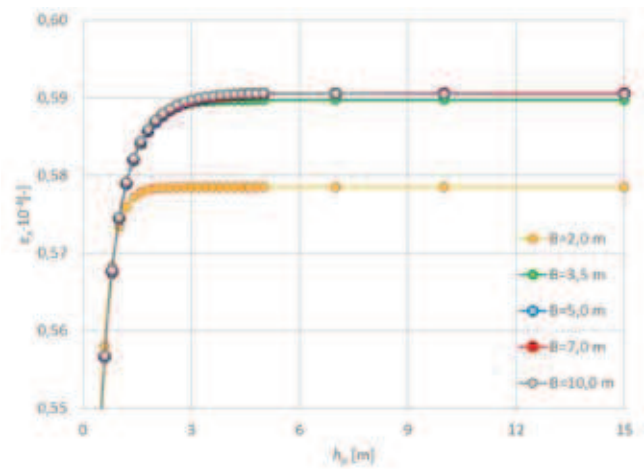
gruntowym został zdyskretyzowany przy użyciu siatek MES o różnych wymiarach oczek. Przedmiotem analiz były siatki o najmniejszym wymiarze oczka równym 0,005 m (s0), 0,02 m (s2), 0,03 m (s3), 0,04 m (s4), 0,05 m (s5) oraz 0,08 m (s6). Tło stanowią analizy przeprowadzone dla siatki bazowej (s1) o najmniejszym wymiarze oczka równym 0,01 m.

3.3. Analiza wyników

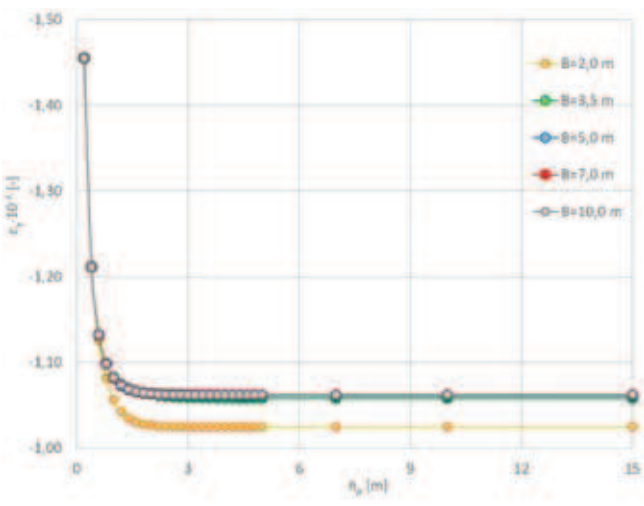
Wyniki analiz z zastosowaniem metody MES, przedstawione powyżej, potwierdzają, że analizy wykonane w stanie



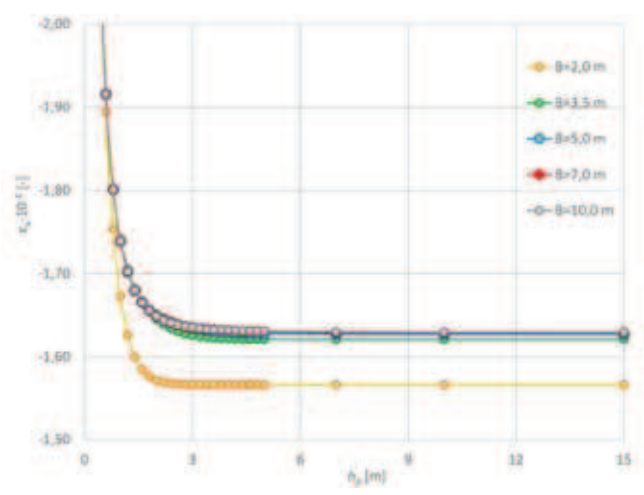
Rys. 8. Rozkład maksymalnych przemieszczeń pionowych u_y w zależności od H i B [50]



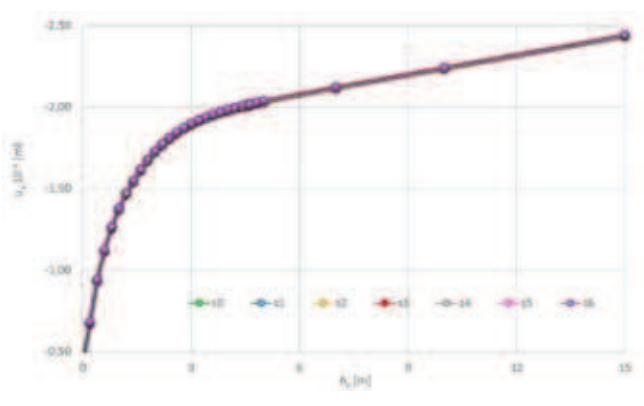
Rys. 9. Rozkład odkształceń poziomych ϵ_x w spodzie warstw asfaltowych w funkcji wielkości przyjętego obszaru obliczeniowego H i B [50]



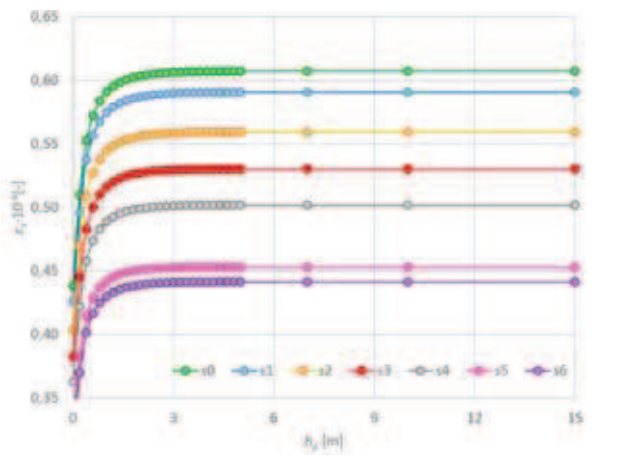
Rys. 10. Rozkład odkształceń pionowych ϵ_y w górnej powierzchni wzmocnionego podłoża gruntowego w funkcji wielkości przyjętego obszaru obliczeniowego H i B [50]



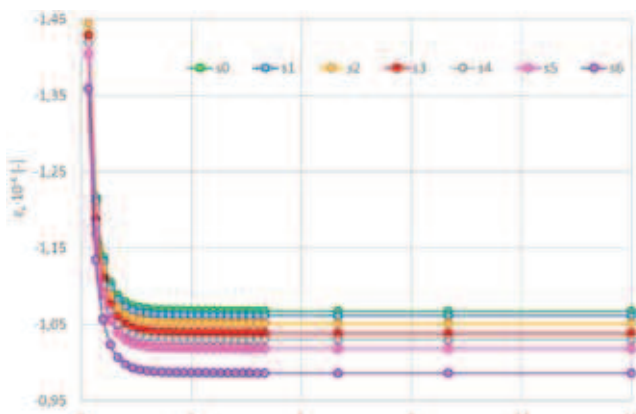
Rys. 11. Rozkład odkształceń pionowych ϵ_y w górnej powierzchni rodzimego podłoża gruntowego w funkcji wielkości przyjętego obszaru obliczeniowego H i B [50]



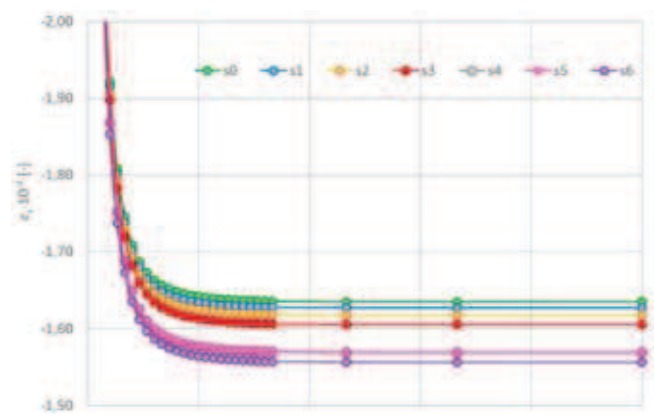
Rys. 12. Rozkład maksymalnych przemieszczeń pionowych u_y w zależności dla różnych rozmiarów siatek dyskretyzacyjnych [50]



Rys. 13. Rozkład odkształceń poziomych ϵ_x w spodzie warstw asfaltowych w funkcji przyjętej wysokości modelu dla różnych rozmiarów siatek dyskretyzacyjnych [50]



Rys. 14. Rozkład odkształceń pionowych ϵ_y rejestrowanych na górnej powierzchni podłoża wzmocnionego w funkcji przyjętej wysokości modelu dla różnych rozmiarów siatek dyskretyzacyjnych [50]



Rys. 15. Rozkład odkształceń pionowych ϵ_y rejestrowanych na górnej powierzchni podłoża rodzimego w funkcji przyjętej wysokości modelu dla różnych rozmiarów siatek dyskretyzacyjnych [50]

3D pozwalają na wyznaczenie z większą dokładnością badanych wielkości. Wadą tego jest, że dla dokładnej siatki dyskretyzacji czas obliczeń jest stanowczo większy. Odpowiednio dokładne wyniki otrzymuje się w modelu osiowej symetrii. Przeprowadzenie analiz w stanie (2D) wymaga wyznaczenia obciążenia zastępczego q^* (p. 3.2), uzyskanego metodą prób.

Zaobserwowano stabilizację wielkości uwzględnianych w projektowaniu nawierzchni (odkształceń ϵ_x i ϵ_y) dla modelu o miąższości podkładu dolnego, reprezentowanego przez podłoża $h_p \geq 5,0$ m, a dla $h_p \geq 2,0$ m można uznać, że zachodzi ze znaną dokładnością. Dokładność ta wynosi 1,0% dla odkształceń poziomych ϵ_x oraz 1,3% dla odkształceń pionowych ϵ_y . Dla modelu obliczeniowego o miąższości podłoża $h_p = 3,0$ m otrzymano dokładność poniżej 1,0%. W przypadku rozkładu maksymalnych ugięć układu nawierzchnia-podłoża nie uzyskano stabilizacji. Wartość ta rośnie wraz ze wzrostem miąższości podłoża gruntowego, przy czym zaobserwowano tendencję do zmniejszania wpływu wysokości modelu wraz ze wzrostem jego szerokości. Dla miąższości podłoża mniejszej niż 7,0 m rozbieżność między wynikami dla szerokości modelu $B = 3,5-10,0$ m można uznać jako pomijalną (rzędu do 5,0%).

Wysokość modelu obliczeniowego powyżej ok. 5,0 m (w zależności od grubości konstrukcji nawierzchni) [31] jest dopuszczalne, jednak jest to związane ze wzrostem czasu przeprowadzania obliczeń. Przyjęcie miąższości podłoża poniżej 2,0 m [12] wpływa na wartości wielkości kryterialnych, uwzględniane przy projektowaniu i ocenie stanu nawierzchni przy użyciu metod mechanistycznych. Może to prowadzić do złego zaprojektowania nawierzchni lub nakładek wzmacniających). Zamyka to także drogę analizom termomechaniki [51], nie pozwalając na ocenę wpływu temperatury na trwałość konstrukcji nawierzchni, co przy uwzględnieniu zmian klimatycznych oraz podejściu zgodnym z technologią BIM może odgrywać ważną rolę w ocenie cyklu życia nawierzchni drogowych.

Bazując na powyższym zaleca się założenie dolnego podsystemu o powierzchni obliczeniowej 5,0×4,58 m (w tym przypadku wraz z konstrukcją nawierzchni ten rozmiar wynosi 5,0×5,00 m). Aby poprawić szybkość wykonywania analiz, można założyć rozmiar podłoża 5,0×4,0 m ze znaną dokładnością.

Wykazano, że znaczny wpływ na analizowane wartości odkształcenia ma rozmiar elementów dyskretyzujących, co praktycznie jest pomijalne w literaturze przedmiotu. Dla mniejszych rozmiarów boków elementów uzyskano większe wartości analizowanych odkształceń. W związku z tym z uwagi na przyjęcie rozmiarów siatki podziału może zachodzić zjawisko niedoszacowania trwałości nawierzchni. Czynnikiem ten nie ma wpływu na wartości przemieszczeń, czyli ocenę stanu nawierzchni. Bez względu na wielkość boku oczka siatki uzyskano w analizach MES takie same wartości maksymalnych przemieszczeń pionowych.

Wielkości kryterialne, uzyskane w analizach numerycznych odniesiono do wartości otrzymanych przy użyciu programu specjalistycznego do projektowania nawierzchni drogowych VEROAD [33]. Szczegółowe wyniki przedstawiono w [49]. Największą dokładność uzyskano dla modelu obliczeniowego w stanie osiowej symetrii dla siatki dyskretyzującej (s1).

4. Podsumowanie

W dobie zwiększonego zapotrzebowania na ocenę zachowania obiektów budowlanych zarówno w procesie projektowania, jak i późniejszej oceny zachowania układu pod wpływem zachodzących oddziaływań, a równocześnie z uwagi na dostępność programów komputerowych i podejścia zgodnego z BIM zachodzi konieczność wykorzystywania w tym celu analiz numerycznych MES.

Jednakże model obliczeniowy może być zbudowany w różny sposób. W ramach przeprowadzonych analiz przedstawiono wpływ poszczególnych czynników na budowę modelu



nawierzchnia-podłoże gruntowe na wielkości uwzględniane przy projektowaniu i ocenie stanu konstrukcji drogowych.

W pracy wykorzystano wyniki projektu badawczego „Wzmacnianie słabego podłoża poprzez zastosowanie warstwy z pianobetonu w kontakcie z podłożem gruntowym” (LIDER/022/537/L-4/NCBR/2013), finansowanego przez NCBR w ramach programu LIDER IV.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Nagórski R., *Mechanika nawierzchni drogowych w zarysie*, PWN, Warszawa, 2014
- [2] Desai C. S. (red.), *Advances in finite element modelling of rigid pavements. Special Issue of International Journal of Geomechanics*, tom 1, 3/2001
- [3] Scarpas A., Shourkry S. N. (red.), *3D Finite element modelling of pavement structures. Proc. Third Intern. Symp. on 3D Finite Element for Pavement Analysis, Design and Research*, 2–5 April 2002, Amsterdam
- [4] Schmidt G., Stappert K. H., *Verherstedische Ergebnisse aus dem Abgas – Großenverkehrstechnik* 3/1986
- [5] PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7 – Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne
- [6] Kadela M., Babiak B., *Pianobeton w budownictwie komunikacyjnym, Materiały Budowlane* 3/2018, str. 80–81
- [7] Kadela M., *Wzmocnienie podłoża poprzez zastosowanie warstwy z pianobetonu, Magazyn Autostrady*, 2018
- [8] Kadela M., *Zastosowanie pianobetonu w warstwach konstrukcji nawierzchni drogowej, Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury*, 2017
- [9] Brown S. F., *Soil mechanics in pavement engineering/Geotechnique* 46, 3/1996, str. 383-426
- [10] Fedorowicz L., Kadela M., *Zastosowanie modelu z degradacją w analizie układu warstwowego konstrukcji nawierzchni drogowej współpracującej z podłożem gruntowym, Górnictwo i Geoinżynieria, kwartalnik AGH*, z. 33, 1/2009, str. 161–168
- [11] Kadela M., Fedorowicz L., *Model obliczeniowy układu konstrukcja warstwowo-podłoże gruntowe zgodnie z EC7. ACTA Scientiarum Polonorum Architectura* 12(3)2013, str. 17–25
- [12] Lade P. V., *Overview of constitutive models for soils, ASCE Geotechnical Special Publication No. 128, Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection and Calibration*, ed. Yamamoto J.A. i Kaliakin V.N., 2005, str. 1–34
- [13] Fedorowicz L., *Zagadnienia kontaktowe budowla – podłoże gruntowe. Część I: Kryteria modelowania i analiz podstawowych zagadnień kontaktowych konstrukcja budowlana-podłoże gruntowe. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice*, 2006
- [14] Fedorowicz L., Kadela M., *Model calibration of line construction-subsoil assisted by experimental research, AGH Journal of Mining and Geoen지니어ing*, tom 36, 1/2012, str. 155–164
- [15] Kirchhoff G., *Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Sitzungsberichte der math. physik. Klasse der Akademie der Wissenschaften, Vienna* 9, 1852, str. 762–773
- [16] Westergaard H. M., *Stress in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis, Public Roads*, tom 7, nr 2, kwiecień 1926
- [17] Westergaard H. M., *Computation of Stresses in Concrete Roads. Proceedings, Highway Research Board*, 5, 1, 1926, str. 90–115
- [18] Westergaard H. M., *Theory of concrete pavements design. Proc. HRB*, 1927
- [19] Szydło A., *Nawierzchnie drogowe z betonu cementowego. Teoria. Wymiarowanie. Realizacja, Wydawnictwo Polski Cement, Kraków*, 2004
- [20] Terezawa K., *On the Elastic Equilibrium of a Semi-Infinite Solid Under Given Boundary Conditions with Some Applications, Journal Coll. Science*, tom 37, art. 7, Univ. of Tokyo, Tokyo, 1916
- [21] Chan K. S., Karasudhi P., Lee S. L., *Force at a point in the interior of a layered elastic halfspace ELSAVIER*
- [22] Marguerre K., *Ansatz zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, Z. Angew. Math. Mech*, 35/1955, str. 242–263
- [23] Burmister D. M., *Theory of stress and displacement in layered systems and application to design of airport runway. Proc. Highway Res. Board*, 23, Washington, DC, 1943, str. 126–148
- [24] Burmister D. M., *The general theory of stress and displacements in layered system. Journal of Applied Physics*, 1945, tom 16, nr 2, str. 89–94, nr 3, str. 126–127, nr 5, str. 296–302
- [25] Burmister D., *Stress and Displacement Characteristics of a two Layer Rigid Base Soil System. Influence Diagrams and Practical Applications, Proc. HRB*, tom 35, 1956
- [26] Fox L., *Computation of Traffic Stress In a Simple Road Structure. Road Research Laboratory (England), Road Research Paper 9, London*, 1948
- [27] Hank R. J., Scrivner F. H., *Some numerical Solutions of Stress in Two – and Three-Layeres Systems. HRB Proceedings*, 28/1948, str. 457–468
- [28] Firliej S., *Podłoże drogowe według Katalogu typowych konstrukcji nawierzchni 1997, Drogownictwo* 7/1998, Warszawa
- [29] Górski K., Wyjadłowski M., *Projektowanie konstrukcji drogi na słabo-nośnym podłożu gruntowym, Roczniki Inżynierii Budowlanej – zeszyt 7/2007, Opole*, 2007
- [30] De Jong D. L., Peutz M. G. F., Korswagen A. R., *Computer program BISAR: layered systems under normal and tangential loads. Koninklike Shell Laboratorium, Rep. No. AMSR 0006.73, Amsterdam*, 1973
- [31] Nagórski R., Nagórska M., *Weryfikacja modeli skórczenia elementowych w analizie statycznej konstrukcji nawierzchni drogowych podatnych, Prace zbiorowe Politechniki Warszawskiej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa*, 2014, *Budownictwo*, z. 158, str. 3–53
- [32] Szydło A., *Ocena nośności konstrukcji nawierzchni w świetle nowego katalogu. Rozwój technologii w budownictwie drogowym. Teoria i praktyka, praca zbiorowa pod redakcją Jana Kukielki, Wydawnictwo Norbertinum, Lublin* 1998, str. 21–27
- [33] VEROAD: *User manual, Version 2000 April. Appendix B: Additional Theory. NPC, Utrecht, Netherlands*, 2000
- [34] Warren H., Dieckmann W. L., *Numerical computation of stresses and strains in a multiple-layer asphalt pavement system, Internal Report. Chevron Res. Corporation, California*, 1963
- [35] Chen D. H., Zaman M., Laguros J., Soltani A., *Assessment of computer programs for analysis of flexible pavement structure, Transportation Research Record* 1482 (1995), str. 123–133
- [36] Jemiolo S., *Osiowo-symetryczne zagadnienia Bousinessqa, XV Russian-Slovak-Polish Seminar: Theoretical Foundations of Civil Engineering, Moscow-Rostov on Don, B. Rymsha, Sz. Lutomirski, V. Vasilkov, I. Dreveniy [eds], str. 109–118, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa* 2006
- [37] Burd H. J., Houlsby G. T., *Numerical modeling of reinforced unpaved roads. Third International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Niagara Falls*, 8–11 maja 1989, str. 699–706
- [38] Kadela M., Parkasiewicz B., *Wartości odkształceń i naprężeń w typowych konstrukcjach drogowych w ujęciu analiz numerycznych, [w]: Nauka i wiedza kluczem do poznania świata, praca zbiorowa pod redakcją Marcina Olkiewicza, Magdaleny Drewniak, Wydawnictwo Intellect, Słupsk*, 2015, str. 52–60
- [39] Sękowski J., *Podstawy wymiarowania poduszek, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Budownictwo, zeszyt 94, Gliwice*, 2002
- [40] Fedorowicz J., Fedorowicz L., *Numeryczna ocena bezpieczeństwa konstrukcji liniowych w obszarach zagrożonych dużymi deformacjami górniczymi, Drogi. Budownictwo infrastrukturalne* 4/2012, str. 37–41
- [41] Fedorowicz L., Kadela M., *Recreation of Small Strains Phenomenon under Pavement Structure and Consequences of Failure to Address It. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 245 (2), 022005, 2017
- [42] Kim M., *Three-dimensional finite element analysis of flexible pavements considering nonlinear pavement foundation behavior. PhD diss., University of Illinois, Urbana*, 2007
- [43] Lacey G., Thenoux G., Rodriguez-Roa F., *Three-dimensional finite element model for flexible pavement analyses based on field modulus measurements, The Arabian Journal for Science and Engineering*, tom 33, nr 1B, 2008, str. 65–76
- [44] Kadela M., Kozłowski M., *Foamed Concrete Layer as Sub-Structure of Industrial Concrete Floor. Procedia Engineering*, tom 161C, 2016. *Proceeding of World Multidisciplinary Civil Engineering-Architecture-Urban Planning Symposium 2016, WMCAUS 2016*, str. 468–476
- [45] Wardęga R., *Wpływ struktury ruchu na nośność nawierzchni drogowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, Wrocław*, 2006
- [46] Leonardi G., *Finite element analysis for airfield asphalt pavements rutting prediction. Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences Technical Sciences*, tom 63, 2/2015, DOI: 10.1515/bpasts-2015-0045
- [47] Kanty P., Sternik K., Kwiecień S., *Numerical analysis of consolidation of embankment subsoil reinforced with dynamic replacement stone columns, Technical Transactions Environmental Engineering*, tom 2-5 (24) 2015, str. 79–100
- [48] Kowalska M., *Identyfikacja parametryczna modeli gruntów w zagadnieniach geotechniki, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice*, 2009
- [49] Kadela M., *Układy nawierzchnia drogowa-podłoże gruntowe w modelach numerycznych i badaniach in situ. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice*, 2016
- [50] Kadela M., *Model of multiple-layer pavement structure-subsoil system Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* 64 (4), str. 751–762
- [51] Bartoszek M., Fedorowicz L., Kadela M., *Modelowanie numeryczne konstrukcji warstwowych w świetle badań laboratoryjnych i badań in situ, Modelowanie Inżynierskie* 12 (43)2012, str. 15–26