

Prof. dr hab. Inż. Leszek MIESZKALSKI  
 Wydział Inżynierii Produkcji  
 Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji  
 Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

# METODA TWORZENIA TRÓJWYMIAROWYCH MODELI ZEWNĘTRZNEGO KSZTAŁTU JAJA KURZEGO ZA POMOCĄ MATEMATYCZNEGO OPISU KONTURÓW POPRZECZNYCH PRZEKROJÓW®

Method for creating three-dimensional models of the external shape of the egg chicken with the mathematical description of the contours of transverse sections®

**Słowa kluczowe:** jajo kurze, przekroje, zewnętrzny kształt, bryła 3D, model matematyczny.

Opracowano matematyczny model zewnętrznego kształtu jaja kurzego, w którym kontury poprzecznych przekrojów opisano elipsami. Zaproponowano dwa sposoby opisu kształtu zewnętrznego jaja kurzego. Pierwszy sposób polega na pomiarze suwmiarką długości, szerokości i grubości jaja. Wymiary elips na poprzecznych przekrojach, rozmieszczonych co 5 mm w przedziale od 0 do 60 mm, określono współczynnikami  $\alpha$  i  $\beta$  pomniejszającymi zmierzone wymiary szerokości i grubości. W drugim sposobie wykorzystano wyskalowane cyfrowe obrazy wzdłużnych rzutów jaja na płaszczyzny XZ i YZ. Długości osi wielkich i małych elips przybliżających kontury poprzecznych przekrojów jaja zmierzono z wykorzystaniem programu Corel Draw. Elipsy opisano równaniami parametrycznymi. Współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  punktów leżących na konturach poprzecznych przekrojów jaja zapisano w macierzach  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  i  $XA$ ,  $YA$ ,  $ZA$ . Macierze posłużyły do wizualizacji modeli brył jaja kurzego wykonanych w programie Mathcad. Proponowana metoda nie uwzględnia wewnętrznej budowy jaja.

**Key words:** egg chicken, transverse sections, the external shape, solid 3D, mathematical model.

The mathematical model developed ovalbumin external shape, wherein the transverse sections contours of the ellipses are described. Proposed two ways of describing the shape of the external egg chicken. The first way is to caliper measurements of length, width and thickness of the egg. Dimensions of the transverse sections of ellipses, spaced 5 mm in the range of 0 to 60 mm, and the determined coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  decreasing measured width and thickness. In the second method uses a digital image scaled longitudinal projections eggs XZ and YZ planes. The length of the axis of the great and the small axis of the ellipse approximating the contours of transverse sections of the eggs was measured using Corel Draw. Ellipses are described parametric equations. Coordinates  $x$ ,  $y$ ,  $z$  points lying on the contours of transverse sections of eggs stored in arrays  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , and  $XA$ ,  $YA$ ,  $ZA$ . The arrays were used to visualize solid models ovalbumin made in the program Mathcad. The proposed method does not take into account the internal structure of the egg.

## WSTĘP

Jaja kurze stanowią cenny surowiec dla przemysłu spożywczego i gospodarstw domowych. W Polsce w 2012 r. ich produkcja wynosiła, jak podaje Mały Rocznik Statystyczny Polski [9], 9537 mln szt. W ostatnich latach nastąpił spadek produkcji jaj kurzych o 1587 mln szt. w stosunku do 2010 r. W produkcji jaj oraz w procesach ich przetwarzania stosuje się zautomatyzowane linie technologiczne (Garcia-Alegre i in., [4, 5, 6], Patel i in., [12]). Informacja o ich właściwościach geometrycznych jest konieczna przy podejmowaniu decyzji podczas projektowania nowych maszyn i urządzeń. Dokładność zapisu trójwymiarowej geometrii obrazów zewnętrznych lub wewnętrznych jaj zależy od tego, w jakim celu jest wykorzystywany model.

W literaturze spotyka się różne metody opisu geometrii materiałów pochodzenia rolniczego. Frączek i Wróbel

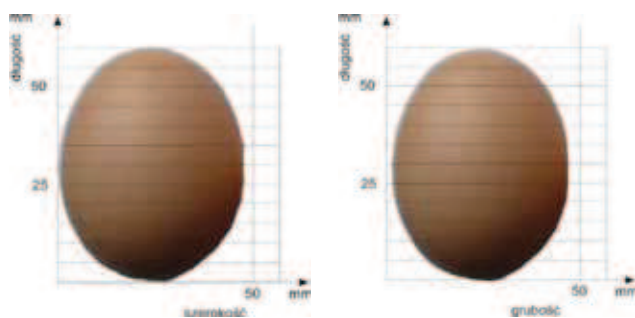
[3] opracowali metodę rekonstrukcji 3D nasion, polegającą na wykonaniu dużej liczby przekrojów nasiona zatopionego w żywicy. Każdy przekrój poddawano komputerowej analizie obrazu. Uzyskane obrazy stanowiły podstawę budowy modelu 3D. Podobną metodę zaproponowali Weres [14], Anders i in. [1], którzy do rekonstrukcji kształtu pieczywa zastosowali skaner 3D. Również Smykła [13] metodę budowy geometrycznych modeli opisał na podstawie skanowanych przekrojów. Mabille i Abecassis [10], Gielis [7], Gielis i Gerats [8] proponują metody matematycznego modelowania, które można wykorzystać do opisu kształtu brył surowców pochodzenia roślinnego i zwierzęcego. Do modelowania kształtu surowców pochodzenia roślinnego Mieszkalski [11] zastosował parametryczną krzywą przestrzenną.

Kształt przekroju jaja kurzego, jak twierdzą Budryn i Krysiak [2], jest zbliżony do elipsy.

Celem artykułu jest przedstawienie opracowanej matematycznej metody modelowania zewnętrznego kształtu jaja kurzego za pomocą opisu konturów jego poprzecznych przekrojów.

## OPIS METOD

Przedmiotem modelowania było jajo kurze o następujących wymiarach: długość 60 mm, szerokość 47 mm, grubość 46 mm. Trójwymiarowe modele zewnętrznego kształtu jaja kurzego utworzono za pomocą poprzecznych przekrojów, których kontury stanowiły elipsy. Zaproponowano dwa sposoby opisu kształtu zewnętrznego jaja kurzego. W pierwszym zmierzono suwmiarką (dokładność do 0,1 mm) długość, szerokość i grubość jaja. Wymiary elips na poprzecznych przekrojach rozmieszczonych co 5 mm w przedziale od 0 do 60 mm określano za pomocą współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  pomniejszających zmierzone wymiary szerokości i grubości. W drugim sposobie wykorzystano wyskalowane cyfrowe obrazy wzdłużnych rzutów jaja na płaszczyzny  $XZ$  i  $YZ$ . Sfotografowane obrazy jaja wczytano do programu Corel Draw i umieszczono w układzie współrzędnych, dokonując skalowania obrazu. Podczas pomiaru pomocne były linie poziome będące śladami płaszczyzn, na których leżały kontury poprzecznych przekrojów jaja (rys.1). Za pomocą programu Corel Draw dokonano pomiaru współrzędnych punktów leżących na przecięciu konturu jaja z liniami poziomymi układu współrzędnych. Na podstawie informacji o położeniu punktów leżących na konturze jaja, w znanej odległości między poszczególnymi przekrojami, wyznaczono długości osi wielkich i małych elips przypisanych do wyznaczonych przekrojów. Poprzeczne przekroje były rozmieszczone co 5 mm w przedziale od 0 do 60 mm. Elipsy opisano równaniami parametrycznymi. Współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  punktów leżących na konturach poprzecznych przekrojów zapisano w macierzach  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  i  $XA$ ,  $YA$ ,  $ZA$ , które posłużyły do wizualizacji modeli brył jaja kurzego wykonanych za pomocą programu Mathcad. W zaproponowanej metodzie nie uwzględniono wewnętrznej budowy jaja.



Rys. 1. Rzuty jaja na płaszczyzny  $XZ$ ,  $YZ$ .

Fig. 1. A throw eggs on the plane  $XZ$ ,  $YZ$ .

Źródło: Opracowanie własne

## MODEL BRYŁY JAJA ZBUDOWANY Z ELIPS O DŁUGOŚCIACH OSI WYZNACZONYCH ZA POMOCĄ WSPÓŁCZYNNIKÓW $\alpha$ i $\beta$

Równania parametryczne elips opisujące kontury poprzecznych przekrojów jaja kurzego mają następującą postać:

$$X_{ni,j} = \frac{An}{2} \cdot \cos(\theta_i) \quad (1)$$

$$Y_{ni,j} = \frac{Bn}{2} \cdot \sin(\theta_i) \quad (2)$$

$$Z_{ni,j} = Cn \quad (3)$$

gdzie:  $n$  – numer kolejnego przekroju,  $n = [1, 2, \dots, 15]$

Liczbę wierszy i kolumn w macierzy ustalono wyrażeniem:

$$i = j = 0 \dots N \quad (4)$$

gdzie:  $N$  – rozmiar macierzy (przyjęto  $N = 60$ ),

$i$  – liczba wierszy,

$j$  – liczba kolumn.

Współrzędne punktów konturów danego poprzecznego przekroju zależą od kąta  $\theta$ . Wektor kąta  $\theta$  ma postać:

$$\theta_j = j \cdot \frac{2\pi}{N} \quad (5)$$

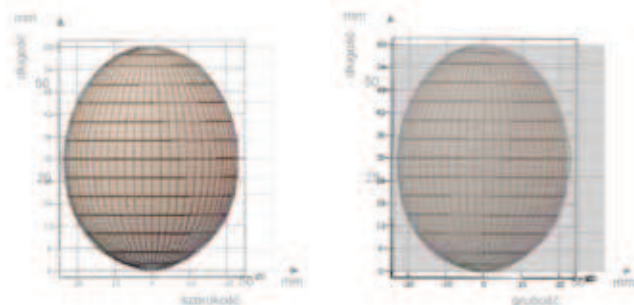
W macierzy 6 zapisano położenia poprzecznych przekrojów, długości osi wielkich i małych elips określonych współczynnikami  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$\begin{matrix} C1 & A1 & B1 \\ C2 & A2 & B2 \\ C3 & A3 & B3 \\ C4 & A4 & B4 \\ C5 & A5 & B5 \\ C6 & A6 & B6 \\ C7 & A7 & B7 \\ C8 & A8 & B8 \\ C9 & A9 & B9 \\ C10 & A10 & B10 \\ C11 & A11 & B11 \\ C12 & A12 & B12 \\ C13 & A13 & B13 \\ C14 & A14 & B14 \\ C15 & A15 & B15 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & asz \cdot \alpha 1 & bsz \cdot \beta 1 \\ 2 & asz \cdot \alpha 2 & bsz \cdot \beta 2 \\ 5 & asz \cdot \alpha 3 & bsz \cdot \beta 3 \\ 10 & asz \cdot \alpha 4 & bsz \cdot \beta 4 \\ 15 & asz \cdot \alpha 5 & bsz \cdot \beta 5 \\ 20 & asz \cdot \alpha 6 & bsz \cdot \beta 6 \\ 25 & asz \cdot \alpha 7 & bsz \cdot \beta 7 \\ 30 & asz \cdot \alpha 8 & bsz \cdot \beta 8 \\ 35 & asz \cdot \alpha 9 & bsz \cdot \beta 9 \\ 40 & asz \cdot \alpha 10 & bsz \cdot \beta 10 \\ 45 & asz \cdot \alpha 11 & bsz \cdot \beta 11 \\ 50 & asz \cdot \alpha 12 & bsz \cdot \beta 12 \\ 55 & asz \cdot \alpha 13 & bsz \cdot \beta 13 \\ 58 & asz \cdot \alpha 14 & bsz \cdot \beta 14 \\ 60 & asz \cdot \alpha 15 & bsz \cdot \beta 15 \end{matrix} \quad (6)$$

W macierzy 7 zapisano wartości współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ , od których zależą długości osi wielkich i małych elips. Wartości współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ , odgrywające rolę wag, wyznaczają się interakcyjnie w zależności od kształtu jaja, wykorzystując do tego celu programy Corel Draw i Mathcad. Po wstawieniu elementów macierzy 6 kolejno do równań 1, 2, 3 otrzymuje się macierze  $X1 \dots X15$  z zapisem współrzędnych  $x$  dla elips leżących na poprzecznych przekrojach jaja, macierze  $Y1 \dots Y15$  z zapisem współrzędnych  $y$  i macierze  $Z1 \dots Z15$  z zapisem współrzędnych  $z$ . Po połączeniu kolumn macierzy  $X1 \dots X15$  uzyskuje się macierz  $X$ , po połączeniu kolumn macierzy  $Y1 \dots Y15$  macierz  $Y$ , a po połączeniu kolumn macierzy  $Z1 \dots Z15$  macierz  $Z$ . Przygotowane w ten sposób macierze  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  służą do wizualizacji modelu bryły jaja zbudowanego z elips o długościach osi wyznaczonych za pomocą współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ .

$$\begin{matrix}
 \alpha_1 & \beta_1 \\
 \alpha_2 & \beta_2 \\
 \alpha_3 & \beta_3 \\
 \alpha_4 & \beta_4 \\
 \alpha_5 & \beta_5 \\
 \alpha_6 & \beta_6 \\
 \alpha_7 & \beta_7 \\
 \alpha_8 & \beta_8 \\
 \alpha_9 & \beta_9 \\
 \alpha_{10} & \beta_{10} \\
 \alpha_{11} & \beta_{11} \\
 \alpha_{12} & \beta_{12} \\
 \alpha_{13} & \beta_{13} \\
 \alpha_{14} & \beta_{14} \\
 \alpha_{15} & \beta_{15}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 0,1 & 0,1 \\
 0,35 & 0,35 \\
 0,544 & 0,547 \\
 0,751 & 0,767 \\
 0,875 & 0,886 \\
 0,95 & 0,953 \\
 0,982 & 0,98 \\
 1 & 1 \\
 0,981 & 0,976 \\
 0,928 & 0,93 \\
 0,85 & 0,842 \\
 0,73 & 0,728 \\
 0,555 & 0,54 \\
 0,38 & 0,38 \\
 0,15 & 0,15
 \end{matrix}
 \quad (7)$$

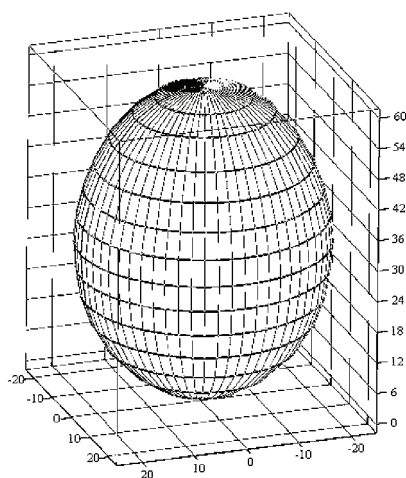
Na rzut  $XZ$  modelu bryły jaja naniesiono wyskalowany rzut obrazu jaja (rys. 2). Podobnie postąpiono z rzutami na płaszczyznę  $YZ$ . Gdy kontury modelu i obrazu jaja się pokrywały, uznano, że dobór współczynników wag jest właściwy.



Rys. 2. Rzuty  $XZ$ ,  $YZ$  modelu bryły jaja i rzuty jego wyskalowanych obrazów.

Fig. 2. A throw  $XZ$ ,  $YZ$  model solid eggs and throws his scaled images.

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 3. Model bryły jaja zbudowany z elips o długościach osi wyznaczonych za pomocą współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ .

Fig. 3. Eggs solid model built with ellipses axis lengths designated by  $\alpha$  and  $\beta$  coefficients.

Źródło: Opracowanie własne

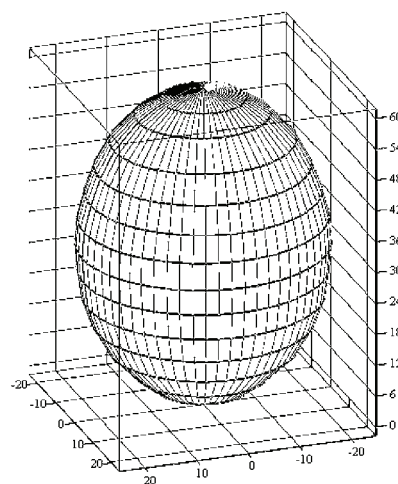
Z rysunku 2 wynika, że kontury rzutów modelu i obrazu jaja się pokrywają, zatem dobór współczynników wag jest prawidłowy.

Na rysunku 3 przedstawiono model bryły jaja zbudowany z elips o długościach osi wyznaczonych za pomocą współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ .

### MODEL BRYŁY JAJA ZBUDOWANY Z ELIPS O ZMIERZONYCH DŁUGOŚCIACH OSI

W macierzy 8 zapisano położenia poprzecznych przekrojów oraz zmierzone długości osi wielkich i osi małych elips przypisanych do poprzecznych przekrojów jaja.

$$\begin{matrix}
 C1 & A1 & B1 \\
 C2 & A2 & B2 \\
 C3 & A3 & B3 \\
 C4 & A4 & B4 \\
 C5 & A5 & B5 \\
 C6 & A6 & B6 \\
 C7 & A7 & B7 \\
 C8 & A8 & B8 \\
 C9 & A9 & B9 \\
 C10 & A10 & B10 \\
 C11 & A11 & B11 \\
 C12 & A12 & B12 \\
 C13 & A13 & B13 \\
 C14 & A14 & B14 \\
 C15 & A15 & B15
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 0 & 6 & 5,5 \\
 2 & 17,8 & 17,4 \\
 5 & 25,5 & 25,1 \\
 10 & 35,3 & 35,3 \\
 15 & 41,1 & 40,8 \\
 20 & 44,7 & 43,9 \\
 25 & 46,1 & 45 \\
 30 & 47 & 46 \\
 35 & 46,2 & 44,8 \\
 40 & 43,6 & 42,7 \\
 45 & 40 & 38,8 \\
 50 & 34,4 & 33,4 \\
 55 & 25,1 & 23,8 \\
 58 & 15,9 & 15,1 \\
 60 & 5 & 4,5
 \end{matrix}
 \quad (8)$$



Rys. 4. Model bryły jaja zbudowany z elips o długościach osi pochodzących z pomiarów.

Fig. 4. Eggs solid model built with the ellipses on axis lengths measured.

Źródło: Opracowanie własne

Po wstawieniu elementów macierzy 8 kolejno do równań 1, 2, 3 otrzymuje się macierze  $XA1...XA15$  z zapisem współrzędnych  $x_A$  dla elips leżących na przekrojach jaja, macierze  $YA1...YA15$  z zapisem współrzędnych  $y_A$  i macierze  $ZA1...ZA15$  z zapisem współrzędnych  $z_A$ . Po połączeniu kolumn

macierzy  $X_{A1} \dots X_{A15}$  otrzymuje się macierz  $X_A$ , po połączeniu kolumn macierzy  $Y_{A1} \dots Y_{A15}$  macierz  $Y_A$ , a po połączeniu kolumn macierzy  $Z_{A1} \dots Z_{A15}$  macierz  $Z_A$ . Przygotowane w ten sposób macierze  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$  służą do wizualizacji modelu bryły jaja zbudowanego z elips o długościach osi pochodzących z pomiarów.

$$\begin{bmatrix} \max(X_1) - \min(X_1) & \max(Y_1) - \min(Y_1) \\ \max(X_2) - \min(X_2) & \max(Y_2) - \min(Y_2) \\ \max(X_3) - \min(X_3) & \max(Y_3) - \min(Y_3) \\ \max(X_4) - \min(X_4) & \max(Y_4) - \min(Y_4) \\ \max(X_5) - \min(X_5) & \max(Y_5) - \min(Y_5) \\ \max(X_6) - \min(X_6) & \max(Y_6) - \min(Y_6) \\ \max(X_7) - \min(X_7) & \max(Y_7) - \min(Y_7) \\ \max(X_8) - \min(X_8) & \max(Y_8) - \min(Y_8) \\ \max(X_9) - \min(X_9) & \max(Y_9) - \min(Y_9) \\ \max(X_{10}) - \min(X_{10}) & \max(Y_{10}) - \min(Y_{10}) \\ \max(X_{11}) - \min(X_{11}) & \max(Y_{11}) - \min(Y_{11}) \\ \max(X_{12}) - \min(X_{12}) & \max(Y_{12}) - \min(Y_{12}) \\ \max(X_{13}) - \min(X_{13}) & \max(Y_{13}) - \min(Y_{13}) \\ \max(X_{14}) - \min(X_{14}) & \max(Y_{14}) - \min(Y_{14}) \\ \max(X_{15}) - \min(X_{15}) & \max(Y_{15}) - \min(Y_{15}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5,5 \\ 17,8 & 17,4 \\ 25,5 & 25,1 \\ 35,3 & 35,3 \\ 41,1 & 40,8 \\ 44,7 & 43,9 \\ 46,1 & 45 \\ 47 & 46 \\ 46,2 & 44,8 \\ 43,6 & 42,7 \\ 40 & 38,8 \\ 34,4 & 33,4 \\ 25,1 & 23,8 \\ 15,9 & 15,1 \\ 5 & 4,5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

W macierzy 9 zamieszczono wyniki obliczeń długości osi elips leżących na poszczególnych przekrojach modelu bryły jaja. Z porównania wyników długości osi elips pochodzących z pomiarów zapisanych w macierzy 8 z wynikami długości osi elips obliczonych na podstawie modelu bryły jaja zapisanych w macierzy 9 wynika, że model z dużą dokładnością odwzorowuje kształt bryły jaja.

## PODSUMOWANIE

Proponowane metody umożliwiają generowanie trójwymiarowych modeli brył jaj kurzych. Modele odwzorowują kształt brył jaj kurzych z wystarczającą dokładnością. Odwzorowaniem konturów poprzecznych przekrojów jaja kurzego może być elipsa. Kształt bryły jaja kurzego można zmieniać przez podanie wymiaru długości, szerokości i grubości jaja oraz dobór współczynników wag  $\alpha$  i  $\beta$  dla elips opisujących kontury poprzecznych przekrojów. Kształt bryły jaja można również odwzorować za pomocą modelu, w którym podstawą jest pomiar wielkich osi i małych osi elips aproksymujących kontury poprzecznych przekrojów jaja.

## LITERATURA

- [1] **ANDERS A., KALINIEWICZ Z., MARKOWSKI P. 2012.** *Zastosowanie skanera 3D do pomiarów cech geometrycznych produktów spożywczych na przykładzie pieczywa typu „kajzerka” i „minikajzerka”.* Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, 2, tom 22/41, 20-24.
- [2] **BUDRYN G., KRYSIAK W. 2013.** *Towaroznawstwo artykułów spożywczych. Ocena towaroznawcza jaj. Kolegium Towaroznawstwa. Instytut Chemicznej Technologii Żywności. Zakład Technologii Skrobi i Cukiernictwa. Łódź.*
- [3] **FRĄCZEK J., WRÓBEL M. 2009.** *Zastosowanie grafiki komputerowej w rekonstrukcji 3D nasion.* Inżynieria Rolnicza, 6(115), 87-94.
- [4] **GARCIA-ALEGRE M. C., ENCISO J., RIBEIRO A., GUINEA D. 1997.** *Towards an automatic visual inspection of eggshell defects,* in Proc. Int. Workshop on Robotics and Automated Machinery for Bio-Productions, Gandia, Spain, 51-66.
- [5] **GARCIA-ALEGRE M. C., RIBEIRO A., GUINEA D., CRISTOBAL G. 1998.** *Eggshell Defects Detection Based on Color Processing.* International Workshop on Robotics and Automated Machinery for Bio-Productions. Spain, 51-66.
- [6] **GARCIA-ALEGRE M. C., RIBEIRO A., GUINEA D., CRISTOBAL G. 2000.** *Color index analysis for automatic detection of eggshell defects,* in Proc. SPIE 3966, 380-387.
- [7] **GIELIS J. 2003.** *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural, and abstract shapes.* American Journal of Botany, 90(3), 333-338.
- [8] **GIELIS J., GERATS T. 2004.** *A botanical perspective on modeling plants and plant shapes in computer graphics.* International Conference on Computer, Communication and Control Technologies. Austin, Texas.
- [9] **Mały Rocznik Statystyczny Polski. 2013.** Główny Urząd Statystyczny. Warszawa, Rok LVI.
- [10] **MABILLE F., ABECASSIS J. 2003.** *Parametric modelling of wheat grain morphology: a new perspective.* Journal of Cereal Science, 37, 43-53.
- [11] **MIESZALSKI L. 2011.** *Metoda matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy za pomocą parametrycznej krzywej przestrzennej i czterowęzłowej siatki.* Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, 1, 41-45.
- [12] **PATEL V. C., MCCLENDON R. W. and GOODRUM J. W. 1998.** *Color Computer Vision and Artificial Neural Networks for the Detection of Defects in Poultry Eggs.* Artificial Intelligence Review, vol.12, 163-176.
- [13] **SMYKLA A. 2004.** *Budowa geometrycznych modeli numerycznych o skomplikowanych kształtach na podstawie skanowanych przekrojów.* Przegląd Mechaniczny. Rok wyd. LXIII, zeszyt 3, 21-25.
- [14] **WERES J. 2010.** *Informatyczny system pozyskiwania danych o geometrii produktów rolniczych na przykładzie ziarniaka kukurydzy.* Inżynieria Rolnicza. Nr 7(125), 229-238.