

dr inż. Piotr Stanisław FRĄCZAK

Zachodniopomorskie Centrum Edukacji Morskiej i Politechnicznej w Szczecinie
West Pomeranian Center of Maritime and Polytechnic Education in Szczecin

OBLICZANIE MOCY OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH W PROGRAMIE MATHCAD

Streszczenie

Wstęp i cel: W pracy zamieszczono opis analityczny mocy pozornej zespolonej obwodów trójfazowych trójprzewodowych i czteroprzewodowych przy symetrycznym zasilaniu. W niniejszej pracy ograniczono się do analizy mocy wydzielanej w obwodach trójfazowych trójprzewodowych przy symetrycznym i niesymetrycznym obciążeniu. Celem pracy jest przedstawienie obliczania mocy czynnej, biernej i pozornej w układach trójfazowych trójprzewodowych przy niesymetrycznym obciążeniu w programie numerycznym *MathCAD*.

Materiał i metody: Do opisu mocy pozornej zespolonej rozpatrywanych obwodów zastosowano napięcia i prądy fazowe i międzyfazowe. Obliczenia mocy czynnej, biernej i pozornej obwodu trójfazowego trójprzewodowego wykonano w programie numerycznym *MathCAD*.

Wyniki: W analizowanym obwodzie trójfazowym trójprzewodowym ujęto moc pozorną zespoloną za pomocą napięć międzyfazowych i prądów przewodowych. Ponadto wyznaczono analitycznie moc czynną obwodu trójfazowego trójprzewodowego zgodnie z metodą Arona za pomocą dwóch watomierzy.

Wnioski: Obliczona moc (czynna, bierna i pozorna) obwodu trójfazowego trójprzewodowego według metody Arona dla trzech różnych układów pomiarowych jest jednakowa.

Słowa kluczowe: Obwody trójfazowe, obliczanie mocy, program *MathCAD*.

(Otrzymano: 05.06.2019; Zrecenzowano: 15.06.2019; Zaakceptowano: 20.06.2019)

CALCULATION OF POWER OF THREE-PHASE CIRCUITS IN MATHCAD PROGRAM

Abstract

Introduction and aim: The paper contains an analytical description of the apparent power of three-phase three-wire and four-wire circuits with symmetrical power supply. This work is limited to the analysis of power emitted in three-phase three-wire circuits at symmetrical and asymmetrical load. The purpose of the work is to present the calculation of active, reactive and apparent power in three-phase three-wire systems at unbalanced load in the *MathCAD* numerical program.

Material and methods: Phase and phase-to-phase voltages and currents were used to describe the apparent complex power of the circuits under consideration. Calculations of active, reactive and apparent power of a three-phase three-wire circuit were made in the *MathCAD* numerical program.

Results: In the analyzed three-phase three-wire circuit, complex apparent power using phase-to-phase voltages and line currents was included. In addition, the active power of the three-phase three-wire circuit was analytically determined according to Aron method using two wattmeters.

Conclusion: The calculated power (active, reactive and apparent) of a three-phase three-wire circuit according to Aron method for three different measuring systems is the same.

Keywords: Three-phase circuits, power calculation, *MathCAD* program.

(Received: 05.06.2019; Reviewed: 15.06.2019; Accepted: 20.06.2019)

1. Wstęp

Do pomiaru mocy czynnej i biernej w układach trójfazowych przy symetrycznym zasilaniu można zastosować watomierze. Sposób włączania cewki prądowej i cewki napięciowej watomierza wynika ze wzorów opisujących moc czynną lub bierną.

W niniejszej pracy ograniczono się do analizy mocy wydzielanej w obwodach trójfazowych trójprzewodowych przy symetrycznym i niesymetrycznym obciążeniu. W przypadku pomiaru mocy czynnej w obwodach trójfazowych trójprzewodowych przy symetrycznym i niesymetrycznym obciążeniu, stosuje się metodę dwóch watomierzy [1], [4], [7]. Cewki prądowe watomierzy włączamy do dwóch faz, a końce cewek napięciowych do trzeciej pozostałej. Suma wskazań dwóch watomierzy równa się mocy czynnej pobieranej przez układ trójfazowy.

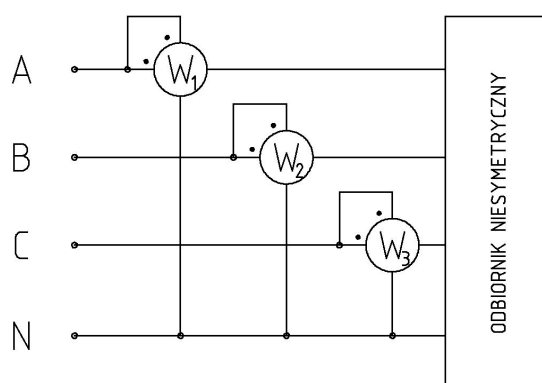
Natomiast do pomiaru mocy biernej w obwodach trójfazowych trójprzewodowych przy symetrycznym i niesymetrycznym obciążeniu stosujemy trzy watomierze, cewki prądowe watomierzy włączamy do trzech faz, a cewki napięciowe do odpowiednich napięć międzyfazowych. Moc bierna takiego układu stanowi sumę wskazań watomierzy podzielonej przez pierwiastek z trzech.

Celem pracy jest przedstawienie obliczania mocy czynnej, biernej i pozornej w układach trójfazowych trójprzewodowych przy niesymetrycznym obciążeniu w programie numerycznym *MathCAD* [2], [3], [5], [6].

2. Obliczanie mocy w obwodach trójfazowych

2.1. Opis analityczny mocy pozornej zespolonej obwodu trójfazowego niesymetrycznego czteroprzewodowego

Moc pozorną zespoloną obwodu trójfazowego niesymetrycznego czteroprzewodowego zamieszczonego na rysunku 1



Rys. 1. Schemat obwodu trójfazowego czteroprzewodowego przy symetrycznym zasilaniu i niesymetrycznym obciążeniu

Źródło: Opracowanie Autora

Fig. 1. Diagram of a three-phase four-wire circuit with symmetrical power supply and asymmetrical load

Source: Elaboration of the Author

ujmuje równanie:

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = \underline{U}_{AN} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BN} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CN} \cdot \underline{I}_C^* \quad (1)$$

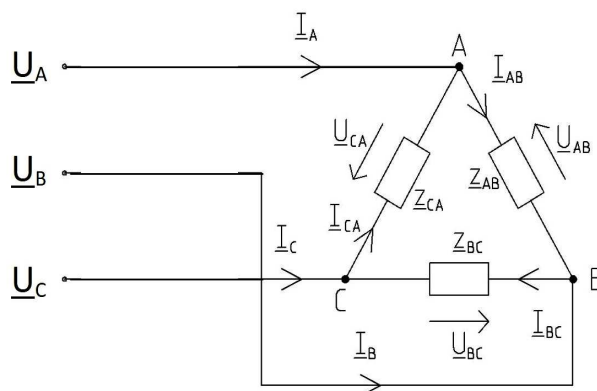
Moc czynna jest równa części rzeczywistej równania (1), czyli

$$P = U_{AN} \cdot I_A \cos \varphi_A + U_{BN} \cdot I_B \cos \varphi_B + U_{CN} \cdot I_C \cos \varphi_C \quad (2)$$

Na podstawie zapisu równania (2) stwierdzamy, że do pomiaru mocy czynnej w układzie trójfazowym czteroprzewodowym niesymetrycznym można zastosować trzy watomierze, przy czym każdy z nich mierzy moc odpowiednio w fazie A, B, C. Cewki prądowe watomierzy należy włączyć do przewodów fazowych, a cewki napięciowe do napięć fazowych. Metodę trzech watomierzy można więc zastosować pod warunkiem istnienia przewodu neutralnego N.

2.2. Opis analityczny mocy pozornej zespolonej w zapisie macierzowym obwodu trójfazowego niesymetrycznego trójprzewodowego

Opis mocy pozornej zespolonej obwodu trójfazowego trójprzewodowego przeprowadzono w oparciu o jego schemat zastępczy, który zamieszczono na rysunku 2. Rozpatrywany obwód zasilany jest trójfazowym symetrycznym układem



Rys. 2. Schemat obwodu trójfazowego trójprzewodowego przy symetrycznym zasilaniu i z odbiornikiem połączonym w niesymetryczny trójkąt

Źródło: Opracowanie Autora

Fig. 2. Diagram of a three-phase three-wire circuit with symmetrical power supply and with a receiver connected in an asymmetrical triangle

Source: Elaboration of the Author

napięć fazowych. Przyjmując napięcia fazy \underline{U}_A za podstawowe uzyskujemy następujące równanie napięć międzyfazowych w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \\ \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \\ \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

przy czym: $a = -\frac{1}{2} + \frac{j \cdot \sqrt{3}}{2}$ - operator obrotu o kąt $2 \cdot \pi/3$;

$a^2 = -\frac{1}{2} - \frac{j \cdot \sqrt{3}}{2}$ - operator obrotu o kąt $4 \cdot \pi/3$.

Uwzględniając zwrot strzałek napięć między fazami (Rys. 2), napięcia międzyfazowe \underline{U}_{BA} , \underline{U}_{CB} i \underline{U}_{AC} można ująć macierzowo:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{BA} \\ \underline{U}_{CB} \\ \underline{U}_{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{U}_{AB} \\ -\underline{U}_{BC} \\ -\underline{U}_{CA} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Zapisując impedancje międzyfazowe \underline{Z}_{BA} , \underline{Z}_{CB} i \underline{Z}_{AC} w postaci macierzy diagonalnej oraz wykorzystując wektor napięć międzyfazowych (4), tworzymy równanie macierzowe wiążące prądy międzyfazowe \underline{I}_{BA} , \underline{I}_{CB} i \underline{I}_{AC} z impedancjami międzyfazowymi oraz napięciami międzyfazowymi w postaci:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{CA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix} \quad (5)$$

stąd

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Na podstawie I prawa Kirchhoffa dla węzłów A , B i C (Rys. 2) tworzymy układ równań wiążących prądy fazowe z prądami międzyfazowymi w postaci równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Z kolei mnożąc macierz diagonalną impedancji, prądy międzyfazowe(6) w postaci macierzy diagonalnej oraz wektor prądów międzyfazowych zespolonych, otrzymujemy wektor mocy pozornej zespolonej gałęzi w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_{AB} \\ \underline{S}_{BC} \\ \underline{S}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{CA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{I}_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{I}_{CA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{AB}^* \\ \underline{I}_{BC}^* \\ \underline{I}_{CA}^* \end{bmatrix}. \quad (8)$$

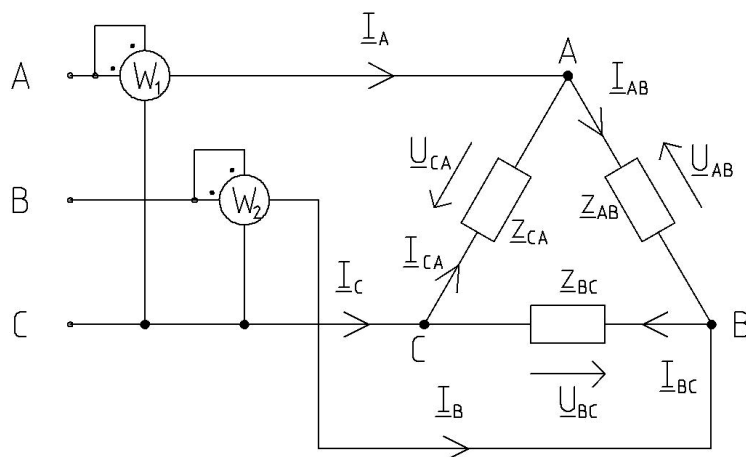
2.2.1. Wyznaczanie mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym w ujęciu układu pomiarowego Arona $\{(\underline{I}_A, \underline{U}_{AC}) \text{ i } (\underline{I}_B, \underline{U}_{BC})\}$

W celu obliczenia mocy pozornej zespolonej obwodu trójfazowego trójprzewodowego, którą ujmuje metoda dwóch watomierzy, równanie macierzowe (6) zapisano w postaci równania:

$$\underline{S} = \underline{S}_{AB} + \underline{S}_{BC} + \underline{S}_{CA} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_{AB}^* + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_{BC}^* + \underline{U}_{CA} \cdot \underline{I}_{CA}^*. \quad (9)$$

W obwodach trójfazowych trójprzewodowych symetrycznych i niesymetrycznych jest spełniona zależność

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0 \quad (10)$$



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym metodą Arona [$(\underline{I}_A, \underline{U}_{AC})$ i $(\underline{I}_B, \underline{U}_{BC})$]

Źródło: Opracowanie Autora

Fig. 3. Diagram of the power measurement system in a three-phase three-wire circuit by Aron method [$(\underline{I}_A, \underline{U}_{AC})$ and $(\underline{I}_B, \underline{U}_{BC})$]

Source: Elaboration of the Author

skąd

$$\underline{U}_{AB} = -(\underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}). \quad (11)$$

Podstawiając wartość \underline{U}_{AB} do równania (9) otrzymujemy wzór na moc w postaci :

$$\underline{S}I = -(\underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}) \cdot \underline{I}_{AB}^* + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_{BC}^* + \underline{U}_{CA} \cdot \underline{I}_{CA}^*. \quad (12)$$

Porządkując równanie (12) uzyskujemy:

$$\underline{S}I = \underline{U}_{CA}(\underline{I}_{CA}^* - \underline{I}_{AB}^*) + \underline{U}_{BC}(\underline{I}_{BC}^* - \underline{I}_{AB}^*) \quad (13)$$

Ponieważ jednak (I prawo Kirchhoffa dla węzła C, Rys. 3)

$$\underline{I}_{CA}^* = \underline{I}_{BC}^* + \underline{I}_C^* \quad (14)$$

oraz (I prawo Kirchhoffa dla węzła C, Rys. 3)

$$\underline{I}_{BC}^* = \underline{I}_{AB}^* + \underline{I}_B^* \quad (15)$$

więc

$$\underline{S}I = \underline{U}_{CA}(\underline{I}_{AB}^* - \underline{I}_A^* - \underline{I}_{AB}^*) + \underline{U}_{BC}(\underline{I}_{AB}^* + \underline{I}_B^* - \underline{I}_{AB}^*). \quad (16)$$

Po uporządkowaniu równania (16) oraz uwzględnieniu zwrotu napięć międzyfazowy uzyskano wzór na moc zespoloną:

$$\underline{S}I = \underline{U}_{AC} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^*. \quad (17)$$

2.2.2. Wyznaczanie mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym w ujęciu układu pomiarowego Arona $\{(\underline{I}_A, \underline{U}_{AB})$ oraz $(\underline{I}_C, \underline{U}_{CB})\}$

Celem pracy jest przedstawienie analizy obwodów rozgałęzionych:

Z równania (10) wyznaczamy

$$\underline{U}_{BC} = -(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{CA}), \quad (18)$$

a następnie otrzymaną zależność podstawiamy do równania (9) otrzymujemy wzór na moc w postaci:

$$\underline{S}2 = \underline{U}_{AB}(\underline{I}_{AB}^* - \underline{I}_{BC}^*) + \underline{U}_{CA}(\underline{I}_{CA}^* - \underline{I}_{BC}^*). \quad (19)$$

Ponieważ jednak (I prawo Kirchhoffa dla węzła B, Rys. 4)

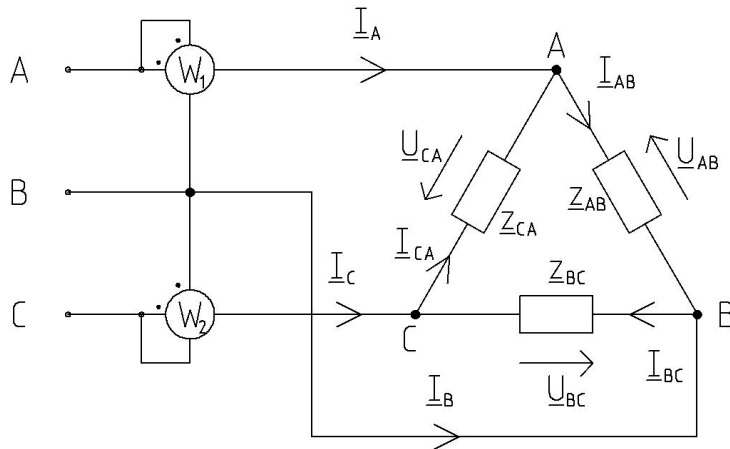
$$\underline{I}_{AB}^* = \underline{I}_{BC}^* - \underline{I}_B^* \quad (20)$$

oraz (I prawo Kirchhoffa dla węzła C, Rys. 4)

$$\underline{I}_{CA}^* = \underline{I}_{BC}^* + \underline{I}_C^* \quad (21)$$

więc

$$\underline{S}2 = \underline{U}_{AB}(-\underline{I}_B^* + \underline{I}_{BC}^* - \underline{I}_{BC}^*) + \underline{U}_{CA}(\underline{I}_{BC}^* + \underline{I}_C^* - \underline{I}_{BC}^*). \quad (22)$$



Rys. 4. Schemat układu pomiarowego mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym metodą Arona $[(\underline{I}_A, \underline{U}_{AB})$ i $(\underline{I}_C, \underline{U}_{CB})]$

Źródło: Opracowanie Autora

Fig. 4. Diagram of a power measurement system in a three-phase three-wire circuit using Aron method $[(\underline{I}_A, \underline{U}_{AB})$ and $(\underline{I}_C, \underline{U}_{CB})]$

Source: Elaboration of the Author

Po uporządkowaniu równania (22) oraz uwzględnieniu zwrotu napięć międzyfazowy uzyskano wzór na moc zespoloną:

$$\underline{S}2 = \underline{U}_{BA} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CA} \cdot \underline{I}_C^*. \quad (23)$$

2.3. Wyznaczanie mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym w ujęciu układu pomiarowego Arona $\{(\underline{I}_B, \underline{U}_{BA}) \text{ i } (\underline{I}_C, \underline{U}_{CA})\}$

Prezentacja twierdzeń o wzajemności oczkowe polegała na opisie analitycznym obwodu elektrycznego rozgałęzionego macierzowo metodą prądów oczkowych Maxwella (w zapisie liczb zespolonych) [1], [3], [8].

Z równania (10) wyznaczamy

$$\underline{U}_{CA} = -(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC}), \quad (24)$$

a następnie otrzymaną zależność podstawiamy do równania (9) otrzymujemy wzór na moc w postaci:

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{AB}(\underline{I}_{AB}^* - \underline{I}_{CA}^*) + \underline{U}_{BC}(\underline{I}_{BC}^* - \underline{I}_{CA}^*). \quad (25)$$

Ponieważ jednak (I prawo Kirchhoffa dla węzła A, Rys. 5)

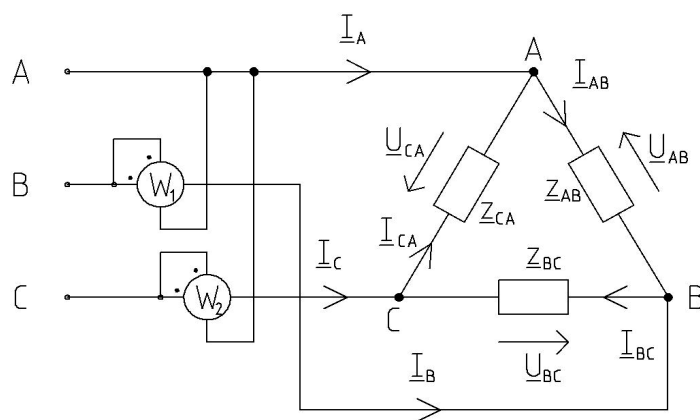
$$\underline{I}_{AB}^* = \underline{I}_{CA}^* + \underline{I}_A^* \quad (26)$$

oraz (I prawo Kirchhoffa dla węzła C, Rys. 5)

$$\underline{I}_{BC}^* = \underline{I}_{CA}^* - \underline{I}_C^* \quad (27)$$

więc

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{AB}(\underline{I}_{CA}^* + \underline{I}_A^* - \underline{I}_{CA}^*) + \underline{U}_{BC}(\underline{I}_{CA}^* - \underline{I}_C^* - \underline{I}_{CA}^*). \quad (28)$$



Rys. 5. Schemat układu pomiarowego mocy w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym metodą Arona $\{(\underline{I}_B, \underline{U}_{BA}) \text{ i } (\underline{I}_C, \underline{U}_{CA})\}$

Źródło: Opracowanie Autora

Fig. 5. Diagram of a power measurement system in a three-phase three-wire circuit using Aron method $\{(\underline{I}_B, \underline{U}_{BA}) \text{ and } (\underline{I}_C, \underline{U}_{CA})\}$

Source: Elaboration of the Author

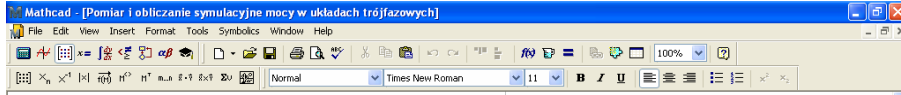
Po uporządkowaniu równania (28) oraz uwzględnieniu zwrotu napięć międzyfazowy uzyskano wzór na moc zespoloną:

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^* \quad (29)$$

3. Obliczenia symulacyjne mocy w obwodach trójfazowych trójprzewodowych w programie numerycznym *MathCAD*

Obliczenie symulacyjne mocy (czynna P , bierna Q , pozorna S) w obwodzie trójfazowym trójprzewodowym przeprowadzono zgodnie z metodą Arona dwóch watomierzy. Analizę obliczeniową mocy w rozpatrywanym obwodzie przeprowadzono dla trzech różnych układów połączeń mierników.

Algorytm w programie *MathCAD*



Dane:

$$j =: \sqrt{-1} \quad a =: \frac{-1}{2} + \frac{j \cdot \sqrt{3}}{2} \quad C =: 25.82 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad L =: 0.1 \text{ H} \quad f =: 50 \text{ Hz}$$

$$X_C =: \frac{1}{2\pi f \cdot C} \text{ } \Omega \quad X_L =: 2\pi f \cdot L \text{ } \Omega \quad U_A =: 30 \text{ V} \quad R_1 =: 310 \text{ } \Omega \quad R_2 =: 340 \text{ } \Omega$$

$$Z_{AB} =: R_1 + X_L \quad Z_{BC} =: R_1 + X_C \quad Z_{CA} =: R_2$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \\ \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \\ \underline{U}_A \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{BA} \\ \underline{U}_{CB} \\ \underline{U}_{AC} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} -\underline{U}_{AB} \\ -\underline{U}_{BC} \\ -\underline{U}_{CA} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} Z_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{CA} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix}$$

Obliczanie mocy (17) obwodu trójfazowego (schemat obwodu, Rys. 2)

$$\underline{S}_1 =: \underline{U}_{AC} \cdot [\text{Re}(\underline{I}_A) + (-j)\text{Im}(\underline{I}_A)] + \underline{U}_{BC} \cdot [\text{Re}(\underline{I}_B) + (-j)\text{Im}(\underline{I}_B)]$$

$$\underline{S}_1 = 24.083 - 2.117 \cdot j \text{ VA}$$

$$P_1 =: \text{Re}(\underline{S}_1) \rightarrow P_1 = 24.083 \text{ W}$$

$$Q_1 =: \text{Im}(\underline{S}_1) \rightarrow Q_1 = -2.117 \text{ var}$$

$$S_1 =: \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \rightarrow S_1 = 24.176 \text{ VA}$$

Obliczanie mocy (23) obwodu trójfazowego (schemat obwodu, Rys. 3)

$$\underline{S}_2 =: \underline{U}_{AB} \cdot [\operatorname{Re}(\underline{I}_A) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_A)] + \underline{U}_{CB} \cdot [\operatorname{Re}(\underline{I}_C) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_C)]$$

$$\underline{S}_2 = 24.083 - 2.117 \cdot j \text{ VA}$$

$$P_2 =: \operatorname{Re}(\underline{S}_2) \rightarrow P_2 = 24.083 \text{ W}$$

$$Q_2 =: \operatorname{Im}(\underline{S}_2) \rightarrow Q_2 = -2.117 \text{ var}$$

$$S_2 =: \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} \rightarrow S_2 = 24.176 \text{ VA}$$

Obliczanie mocy (29) obwodu trójfazowego (schemat obwodu, Rys. 4)

$$\underline{S}_3 =: \underline{U}_{BA} \cdot [\operatorname{Re}(\underline{I}_B) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_B)] + \underline{U}_{CA} \cdot [\operatorname{Re}(\underline{I}_C) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_C)]$$

$$\underline{S}_3 = 24.083 - 2.117 \cdot j \text{ VA}$$

$$P_3 =: \operatorname{Re}(\underline{S}_3) \rightarrow P_3 = 24.083 \text{ W}$$

$$Q_3 =: \operatorname{Im}(\underline{S}_3) \rightarrow Q_3 = -2.117 \text{ var}$$

$$S_3 =: \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} \rightarrow S_3 = 24.176 \text{ VA}$$

Obliczanie sprawdzające mocy obwodu 3-f (modyfikacja wzoru (8), [2])

$$\underline{S}_4 =: \begin{bmatrix} \underline{U}_{BA} \\ \underline{U}_{CB} \\ \underline{U}_{AC} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\underline{I}_{AB}) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_{AB}) \\ \operatorname{Re}(\underline{I}_{BC}) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_{BC}) \\ \operatorname{Re}(\underline{I}_{CA}) + (-j)\operatorname{Im}(\underline{I}_{CA}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_4 = 24.083 - 2.1171 \cdot j \text{ VA}$$

$$P_4 =: \operatorname{Re}(\underline{S}_4) \rightarrow P = 24.083 \text{ W}$$

$$Q_4 =: \operatorname{Im}(\underline{S}_4) \rightarrow Q = -2.117 \text{ var}$$

$$S_4 =: \sqrt{P_4^2 + Q_4^2} \rightarrow S_4 = 24.176 \text{ VA}$$



4. Wnioski

- Obliczona moc (czynna, bierna i pozorna) obwodu trójfazowego trójprzewodowego według metody Arona dla trzech różnych układów pomiarowych jest jednakowa.
- Prezentacja obliczeń moc (czynnej, biernej i pozornej) w obwodach trójfazowych w oparciu o metodę pomiarową Arona w zapisie liczb zespolonych w postaciach macierzowych w środowiskach programów numerycznych *MathCAD* jest doskonałą pomocą dydaktyczną w nauczaniu teorii obwodów elektrycznych.

Literatura

- [1] Bolkowski S.: *Teoria obwodów elektrycznych*. Warszawa, WNT 1995 wyd. 5, ISBN 83-204-2218-3.
- [2] Frączak P.: *Obliczenia numeryczne obwodów elektrycznych i układów cyfrowych*. Szczecin, Wyd. PPH „Zapol” Dmochowski, Sobczyk Sp.j. 2012, 173 s., ISBN 978-83-7518-432-7.
- [3] Jankowski P.: *Wybrane zagadnienia elektrotechniki w środowisku MathCAD*. Wyd. Akademii Morskiej w Gdyni, Gdynia 2010, ISBN 978-83-7421-149-9.
- [4] Lebson S.: *Podstawy Miernictwa elektrycznego*. WNT Warszawa 1972.
- [5] Lipiński W.: *Obliczenia numeryczne w teorii sygnałów i obwodów elektrycznych*. Szczecin, Wyd.PPH „Zapol” Dmochowski, Sobczyk Sp.j. 2010, 360 s., ISBN 978-83-7518-277-9.
- [6] Palczewski W.: *MathCAD 12,11, 2001i, 2000 w algorytmach*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa 2005, ISBN 83-87674-81-8.
- [7] Tumański. S.: *Technika pomiarowa*. WNT, Warszawa 2007, ISBN 978-83-204-3233-6.