



Opis konwekcyjny kinematyki sprężysto-plastycznych deformacji skończonych

WOJCIECH DORNOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
01-980 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, wojciech.dornowski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis konwekcyjny kinematyki sprężysto-plastycznych deformacji skończonych. Proponowane podejście jest bardzo użyteczne z punktu widzenia zastosowań numerycznych [4]. Podano reguły transformacyjne dla przestrzennych pól tensorowych obiektywnych ze względu na zmianę konfiguracji aktualnej opisaną odwzorowaniem dyfeomorficznym. Przy definiowaniu miar odkształceń niesprężystych wykorzystano pojęcie konfiguracji odciążonej. Zdefiniowany w tej konfiguracji tensor metryczny jest miarą deformacji plastycznej. Wykazano, że transformacje tego tensora do innych konfiguracji prowadzą do innych miar deformacji, lecz zawsze plastycznych. W ramach koncepcji obiektywności względem całkowitego ruchu ośrodka ciągłego wykazano tożsamość multiplikatywnego rozkładu gradientu deformacji sprężysto-plastycznej z addytywnymi rozkładami innych miar odkształcenia i prędkości odkształcenia sprężysto-plastycznego. Posługując się pojęciem funkcji energii swobodnej, zaproponowano pewne sformułowanie postulatu obiektywności materialnej dla struktury konstytutywnej z parametrami wewnętrznymi. Wykorzystując ten postulat, przedstawiono ogólną postać struktury konstytutywnej typu prędkościowego.

Słowa kluczowe: sprężysto-plastyczność, deformacje skończone

DOI: 10.5604/12345865.1197978

1. Wstęp

Wybór takiego czy innego układu współrzędnych nie wpływa na poziom ogólności rozważanego modelu matematycznego deformacji ciała odkształcalnego (niezależność opisu od wyboru układu współrzędnych). Wybór ten posiada jednak zasadnicze znaczenie z punktu widzenia konstrukcji algorytmów numerycznych, w których operuje się reprezentacjami liczbowymi wielkości tensorowych lub

wektorowych. Motywację praktycznej przydatności opisu konwekcyjnego w analizie numerycznej problemów początkowo-brzegowych przedstawiono w pracy [3].

Pojęcie układu współrzędnych konwekcyjnych nie jest nowe i było wykorzystywane w pracach dotyczących mechaniki ośrodków ciągłych (zob. np. [11, 12, 24]). Dotychczas jednak nie wskazano na bezpośredni związek opisu konwekcyjnego z koncepcją obiektywności względem całkowitego ruchu ośrodka ciągłego (translacja, obrót i odkształcenie). Próbę taką podjęto w niniejszej pracy.

W punkcie 2 artykułu przedstawiono podstawy kinematyki deformacji skończonych. Wykorzystano abstrakcyjne pojęcie różniczkowalnej. Umożliwiło to opis deformacji bez odwoływania się do otaczającej przestrzeni Euklidesowej. W konfiguracji początkowej i aktualnej wprowadzono lokalne układy współrzędnych, homeomorficzne z tymi samymi podzbiórmi przestrzeni liczbowej. Podejście takie prowadzi bezpośrednio do pojęcia konwekcyjnego układu współrzędnych. Podano reguły transformacyjne dla przestrzennych pól tensorowych obiektywnych ze względu na zmianę konfiguracji aktualnej opisaną odwzorowaniem dyfeomorficznym.

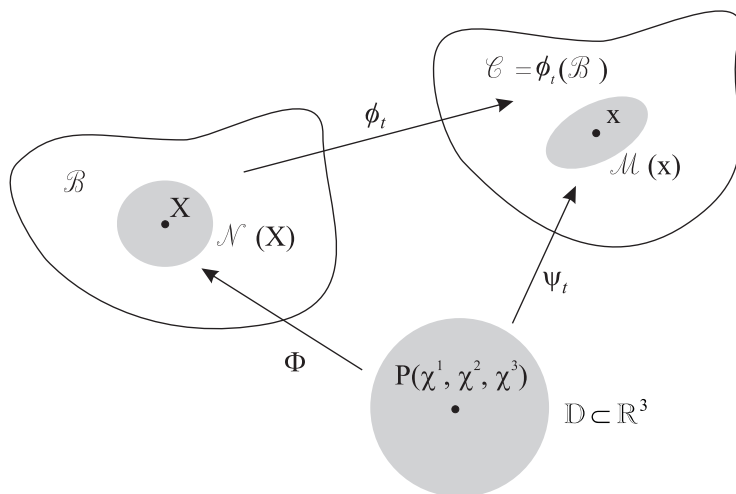
Opis kinematyki deformacji sprężysto-plastycznych zawiera punkt 3. W sprężystości odciążonej przestrzeni stycznej do różniczkowalnej reprezentującej konfigurację odciążoną, zdefiniowano tensor metryczny, który jest miarą deformacji czysto plastycznej. Wykazano, że transformacje tego tensora do konfiguracji początkowej i aktualnej prowadzą do definicji odpowiednich tensorów deformacji plastycznej Cauchy'ego-Greena. W ramach koncepcji obiektywności względem całkowitego ruchu ośrodka ciągłego wykazano tożsamość multiplikatywnego rozkładu gradientu deformacji sprężysto-plastycznej z addytywnymi rozkładami innych miar odkształcenia i prędkości odkształcenia sprężysto-plastycznego. Podano reguły transformacyjne dla tensorowych miar odkształcenia i prędkości odkształcenia.

W punkcie 4 pracy rozważono zasady zachowania. Posługując się pojęciem funkcji energii swobodnej zaproponowano pewne sformułowanie postulatu obiektywności materialnej dla struktury konstytutywnej z parametrami wewnętrznymi. W punkcie 5, wykorzystując ten postulat, przedstawiono ogólną postać struktury konstytutywnej typu prędkościowego z parametrami wewnętrznymi. Wnioski końcowe przedstawiono w zakończeniu.

2. Kinematyka deformacji skończonych w opisie konwekcyjnym

Rozważamy ciało materialne \mathcal{B} , które jest różniczkowalną. W otoczeniach $\mathcal{N}(X)$ punktów X różniczkowalnej \mathcal{B} (cząstek materialnych X ciała \mathcal{B}) wprowadzamy lokalne układy współrzędnych, dyfeomorficzne z podzbiórmi otwartymi \mathbb{D} przestrzeni liczb rzeczywistych \mathbb{R}^3 . Zatem dla każdego otoczenia $\mathcal{N}(X)$ istnieje odwzorowanie regularne $\Phi: \mathbb{D}(\mathbf{P}) \rightarrow \mathcal{N}(X)$ takie, że $X = \Phi(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ (rys. 2.1). Liczby χ^1, χ^2, χ^3 są współrzędnymi punktu X w układzie Φ . Wektorową

przestrzeń liniową $T_x\mathcal{B}$, przechodzącą przez $X \in \mathcal{B}$ i równoległą do wektorów bazowych $\mathbf{G}_i(X) = \partial_i \Phi$, $i = 1, 2, 3$, nazywamy przestrzenią styczną do rozmaitości \mathcal{B} w punkcie X .



Rys. 2.1. Geometryczna interpretacja konwekcyjnego układu współrzędnych (opis w tekście)

Ruch ciała materialnego opisujemy odwzorowaniem dyfeomorficznym $\phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ takim, że $x = \phi(X, t)$ dla każdej cząstki $X \in \mathcal{B}$ i $t \in \mathbb{R}$. Przez x oznaczamy punkty rozmaitości \mathcal{C} zajmowane przez cząstkę X w chwili t . Dla każdego otoczenia $\mathcal{M}(x)$ punktów $x \in \mathcal{C}$ przyjmujemy odwzorowanie regularne $\psi_t : D(\mathbf{P}) \rightarrow \mathcal{M}(x)$ takie, że $x = \psi_t(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$. Wówczas lokalne układy współrzędnych Φ i ψ_t są dyfeomorficzne z tymi samymi podzbiórami przestrzeni liczbowej \mathbb{R}^3 (rys. 2.1). Wprowadzony w ten sposób układ współrzędnych $\psi_t = \phi_t \circ \Phi$ w rozmaitości \mathcal{C} nazywamy układem współrzędnych konwekcyjnych. Wektorową przestrzeń liniową $T_x\mathcal{C}$, przechodzącą przez $x \in \mathcal{C}$ i równoległą do wektorów bazowych $\mathbf{g}_i(x, t) = \partial_i \psi_t$, $i = 1, 2, 3$, nazywamy przestrzenią styczną do rozmaitości \mathcal{C} w punkcie x .

Wykorzystując regułę różniczkowania funkcji złożonej $\psi_t = \phi_t \circ \Phi$, otrzymujemy

$$\mathbf{g}_i(x, t) = \partial_i \psi_t = \partial_\phi \phi_t \cdot \partial_i \Phi = \mathbf{F}(X, t) \cdot \mathbf{G}_i(X). \quad (2.1)$$

Liniowe odwzorowanie $\mathbf{F}(X, t) = \partial_\phi \phi_t : T_x\mathcal{B} \rightarrow T_x\mathcal{C}$ takie, że w układzie współrzędnych konwekcyjnych zachodzi związek (2.1), nazywać będziemy gradientem deformacji. Tensor $\mathbf{F}(X, t)$ może mieć także inne interpretacje [1].

Zatem jeżeli \mathbf{G}_i jest polem wektorów bazowych zadanych na \mathcal{B} , a ϕ jest odwzorowaniem regularnym, wówczas $\phi_* \mathbf{G}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i = \mathbf{g}_i$ określa pole wektorów bazowych na $\phi(\mathcal{B})$. Takie „przeniesienie” lub „transport” określa się również angielskim określeniem „push forward”, co dodatkowo precyzuje kierunek tego transportu, zgodny z kierunkiem działania odwzorowania ϕ . Podobnie, jeżeli \mathbf{g}_i jest polem wektorów bazowych zadanych na $\phi(\mathcal{B})$, wówczas pole wektorów bazowych na \mathcal{B} określa transformacja („pull back”) $\phi^* \mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i$. W dalszym ciągu okaże się, że jest to przykład bardzo szerokiej klasy naturalnych odwzorowań różnych obiektów geometrycznych (np. tensorów).

Iloczyn skalarny $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$, $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ tworzą elementy macierzy metrycznych lokalnych układów Φ i ψ_t , odpowiednio w konfiguracjach \mathcal{B} i \mathcal{C} . Wprowadzając bazy dualne do baz \mathbf{G}_i i \mathbf{g}_i , tj. bazy, których wektory spełniają zależności $\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i$ i $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$, definiujemy elementy macierzy odwrotnych do odpowiednich macierzy metrycznych, tj. $G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j$ i $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$. Ponieważ zachodzą jednoznaczne rozkłady $\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j$ i $\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$, to $\mathbf{G}^i(\mathbf{X}) \in T_x^* \mathcal{B}$ i $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \in T_x^* \mathcal{C}$.

Tensorzy metryczne układów Φ i ψ_t przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ij} (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) = G^{ij} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) = \delta_j^i (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j) = \delta_i^j (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j), \\ \mathbf{g} &= g_{ij} (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) = g^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) = \delta_j^i (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) = \delta_i^j (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Materialne elementy liniowe, odpowiednio początkowy i zdeformowany, są reprezentowane przez wektory:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}(\mathbf{X}) &= \mathbf{G}_i(\mathbf{X}) d\chi^i \in T_x \mathcal{B}, \\ d\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) d\chi^i = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{R}(\mathbf{X}) \in T_x \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Formy kwadratowe

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= d\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{r}, \\ (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

określają kwadraty długości elementów liniowych względem wyróżnionych konfiguracji. Tensory

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \phi^* \mathbf{g}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} = g_{ij} (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j), \\ \mathbf{c} &= \phi_* \mathbf{G}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1} = G_{ij} (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \end{aligned} \quad (2.5)$$

noszą nazwy lewego i prawego tensora deformacji Cauchy’ego-Greena. Wynikają one z transformacji odpowiednich tensorów metrycznych. Z (2.5) wynika, że słuszniej byłoby nazywać tensorem deformacji tylko materialny tensor Cauchy’ego-Greena \mathbf{C} .

Tensor przestrzenny \mathbf{c} wyraża jedynie metrykę konfiguracji niezdeformowanej w odniesieniu do zmiennego w czasie obszaru \mathcal{C} . Potwierdzenie powyższych wniosków uzyskamy, rozpatrując obiektywne prędkości zmian wielkości (2.5).

Tensorowe miary odkształcenia wyznaczamy z różnicy form kwadratowych (2.4):

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2 = \mathrm{d}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{G}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{R} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{c}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Dla konfiguracji początkowej otrzymujemy znany tensor odkształcenia Lagrange'a:

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{G} = (g_{ij} - G_{ij})(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j). \quad (2.7)$$

Tensor odkształcenia Eulera

$$2\mathbf{e} = \mathbf{g} - \mathbf{c} = (g_{ij} - G_{ij})(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \quad (2.8)$$

jest miarą odkształcenia w konfiguracji aktualnej \mathcal{C} . W opisie konwekcyjnym reprezentacje tensorów \mathbf{E} i \mathbf{e} są identyczne i wyrażają się różnicą składowych odpowiednich tensorów metrycznych.

Związki pomiędzy tensorami odkształcenia przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \phi^* \mathbf{e}, & \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{e} &= \phi_* \mathbf{E}, & \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tensorowe miary prędkości odkształcenia powinny być tak zdefiniowane, aby ewentualny brak zmian odkształcenia wyrażał się znikaniem pochodnej materialnej formy kwadratowej (2.4)₂,

$$[(\mathrm{d}s)^2]^\cdot = (\mathrm{d}\mathbf{r})^\cdot \cdot \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{g}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{r})^\cdot = \mathrm{d}\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}. \quad (2.10)$$

Pochodna materialna elementu liniowego w konfiguracji aktualnej \mathcal{C} przyjmuje postać

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})^\cdot = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{R} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{l} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Odwzorowanie $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i : T_{\mathbf{x}}\mathcal{C} \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}$ takie, że $\dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{l} \cdot \mathbf{g}_i$, nazywamy gradientem przestrzennego pola prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ruchu ϕ_t . Podstawiając (2.11) do (2.10), otrzymujemy

$$[(\mathrm{d}s)^2]^\cdot = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{g}} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}, \quad (2.12)$$

gdzie $\dot{\mathbf{g}} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{g} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{g}$ jest pochodną Liego tensora metrycznego konfiguracji aktualnej \mathcal{C} . Warunek $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{g} = 0$ implikuje $[(\mathrm{d}s)^2]^\cdot = 0$, zatem $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{g}$ stanowi tensorową miarę prędkości odkształcenia odniesioną do konfiguracji \mathcal{C} . W opisie

materialnym taką miarą jest pochodna materialna lewego tensora deformacji Cauchy'ego-Greena $\dot{\mathbf{C}} = \phi^*(\mathcal{L}_v \mathbf{g})$.

Pochodna Liego przestrzennego tensora Cauchy'ego-Greena $\mathcal{L}_v \mathbf{c} = \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{c}$ jest zawsze równa zeru, ponieważ $[(dS)^2]^\cdot = d\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathcal{L}_v \mathbf{c} \cdot d\mathbf{r} = 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Zatem tensor \mathbf{c} nie jest przestrzenną miarą deformacji. Zachodzą również zależności:

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{C}} = \dot{g}_{ij}(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j), \\ 2\mathbf{d} &= 2\mathcal{L}_v \mathbf{e} = \mathcal{L}_v \mathbf{g} = \dot{g}_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Rezultat (2.13)₁ potwierdza fakt, że pochodna materialna tensora odkształcenia Lagrange'a jest miarą prędkości odkształcenia dla konfiguracji początkowej \mathcal{B} . Dla konfiguracji aktualnej \mathcal{C} taką miarą jest tensor prędkości deformacji \mathbf{d} (2.13)₂. W opisie konwekcyjnym reprezentacje tensorów $\dot{\mathbf{E}}$ i \mathbf{d} są identyczne i wyrażają się pochodnymi materialnymi względem czasu kowariantnych składowych tensora metrycznego \mathbf{g} . Zależności pomiędzy tensorami $\dot{\mathbf{E}}$ i \mathbf{d} określają następujące reguły transformacyjne:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \phi^* \mathbf{d}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{d} &= \phi_* \dot{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Na podstawie gradientu deformacji $\mathbf{F} = g_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}^j)$ możemy zdefiniować tensorową miarę prędkości odkształcenia $\mathbf{K}(X, t) : T_X \mathcal{B} \rightarrow T_X \mathcal{C}$ związaną z bazami w konfiguracjach \mathcal{B} i \mathcal{C} (tensor rozdwojony), taką że $\dot{g}_{ij} = \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{g}_i \cdot (\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{g}_i \cdot 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{G}_j$, zatem

$$2\mathbf{K} = \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{F} = \dot{g}_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}^j). \quad (2.15)$$

Na podstawie (2.15) zauważamy, że tensor \mathbf{K} nie jest gradientem materialnego pola prędkości, nie jest również gradientem przestrzennego pola prędkości. Związki tensora \mathbf{K} z miarami (2.13) mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wykorzystywana przy konstruowaniu przestrzennych miar prędkości odkształcenia pochodna Liego jest związana z pojęciem obiektywności materialnej tych miar ze względu na odwzorowanie dyfeomorficzne (ruch ciała materialnego) [20]. W ogólności, pole tensorowe \mathbf{t} określone na rozmaitości \mathcal{C} jest obiektywne, jeżeli dla odwzorowania regularnego $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, rozmaitości \mathcal{C} w inną rozmaitość \mathcal{C}' , istnieje transformacja $\mathbf{t}' = \xi_* \mathbf{t}$. Pola tensorowe, obiektywne w powyższym

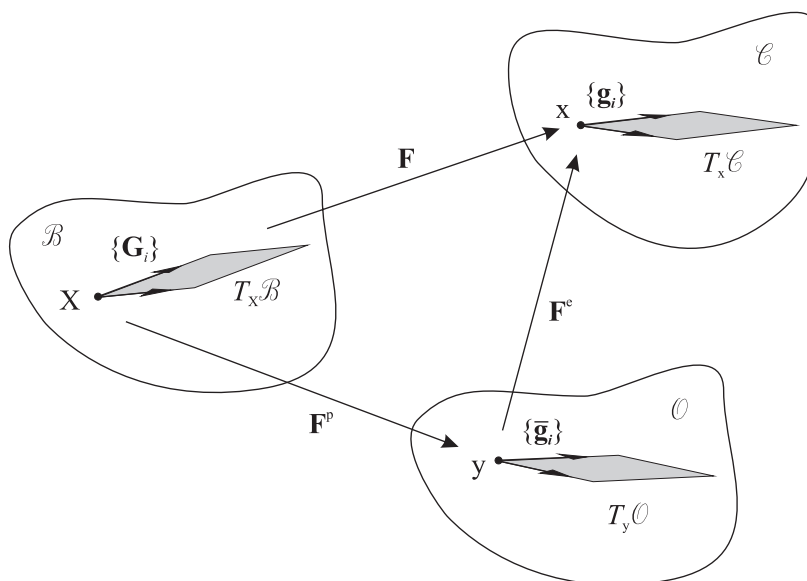
sensie, posiadają obiektywne pochodne Liego. Zatem dla odwzorowań regularnych (ruchów) $\phi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ i $\phi'_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}'$, gdzie $\phi'_t = \xi \circ \phi_t$, oraz dla obiektywnego pola tensorowego \mathbf{t} określonego na rozmaiłości \mathcal{C} , zachodzą następujące reguły transformacyjne:

$$\mathbf{t}' = \xi_* \mathbf{t}, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{v}'} \mathbf{t}' = \xi_* (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{t}). \quad (2.17)$$

Przez \mathbf{v} oznaczono pole prędkości ruchu ϕ_t , \mathbf{v}' jest polem prędkości ruchu ϕ'_t .

Wzory transformacyjne dla przestrzennego pola tensorowego, obiektywnego względem aktualnego ruchu $\phi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ciała odkształcalnego, otrzymamy, zakładając w (2.18) $\xi = \phi_t^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Wówczas dostaniemy $\mathbf{T} = \phi_t^* \mathbf{t}$, $\dot{\mathbf{T}} = \phi_t^* (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{t})$.

3. Sprężysto-plastyczne deformacje skończone



Rys. 3.1. Geometryczna interpretacja konfiguracji odciążonej

Założmy, że w dowolnej chwili ruchu ciało materialne jest poddawane deformacjom sprężysto-plastycznym. W efekcie myślowego odciążenia sprężystego tego ciała możemy rozważać trzecią rozmaiłość \mathcal{O} sparametryzowaną układem współrzędnych konwekcyjnych (χ^i) . Przestrzeń styczną $T_y \mathcal{O}$ do rozmaiłości \mathcal{O} w punkcie $y \in \mathcal{O}$ definiujemy jako przestrzeń liniową rozpiętą na wektorach bazowych $\bar{\mathbf{g}}_i(y)$ (rys. 3.1). Odciążenie sprężyste jest tutaj rozumiane jako odciążenie w zakresie odkształceń sprężystych. Rezultatem takiego odciążenia nie musi być stan beznapięniowy

— w otoczeniu cząstki materialnej mogą pozostawać naprężenia resztkowe wywołane anizotropią plastyczną. W takim przypadku zupełne odciążenie (usunięcie naprężeń resztkowych) wymaga dodatkowego odkształcenia plastycznego.

Odwzorowania liniowe

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}}\mathcal{B} &\rightarrow T_{\mathbf{y}}\mathcal{O}, & \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{G}_i(\mathbf{X}), \\ \mathbf{F}^e(\mathbf{y}, t) : T_{\mathbf{y}}\mathcal{O} &\rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}, & \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}^e(\mathbf{y}, t) \cdot \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{y}, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

określają części plastyczną i sprężystą gradientu deformacji. Podstawiając (3.1)₁ do (3.1)₂ i biorąc pod uwagę (2.1), otrzymujemy $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Teorię opartą na multiplikatywnym rozkładzie gradientu deformacji wykorzystywano w pracach [14, 18, 19, 28, 29]. Uogólnienie koncepcji opisu skończonych deformacji sprężysto-plastycznych, u podstaw której leży rozkład multiplikatywny, przedstawiono w [16]. Dla materiałów polikrystalicznych takich jak metale rozważana koncepcja posiada interpretację fizykalną opartą na mechanice ruchu dyslokacji [17].

Rozkład multiplikatywny $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$ nie wyczerpuje wszystkich możliwości sprężysto-plastycznych dekompozycji deformacji całkowitej. W pracy [8] wprowadzono addytywny rozkład tensora odkształcenia Lagrange'a $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$, gdzie \mathbf{E}^e i \mathbf{E}^p są częściami odpowiednio sprężystą i plastyczną. Rozkład ten wykorzystano w opisie podstaw termodynamiki ciał sprężysto-plastycznych [9, 22]. W pracach dotyczących metod numerycznej analizy dużych deformacji sprężysto-plastycznych [13, 15, 21, 23, 30] z reguły postulowano addytywny rozkład tensora prędkości deformacji $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$. W różnych kontekstach analizowano też związki pomiędzy odmiennymi sposobami dekompozycji deformacji sprężysto-plastycznej [10, 25].

W pracy [31], w ramach koncepcji obiektywności względem całkowitego ruchu ciała materialnego, wykazano, że addytywne rozkłady miar odkształcenia i prędkości odkształcenia mogą być wyprowadzone na podstawie rozkładu multiplikatywnego $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Własność tę wykażemy, posługując się opisem konwekcyjnym.

Kwadrat długości odciążonego elementu liniowego $d\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t) \in T_{\mathbf{y}}\mathcal{O}$ ma następującą postać:

$$(d\bar{s})^2 = d\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^p \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}^p \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.2)$$

gdzie $\bar{\mathbf{g}} = \bar{g}_{ij}(\bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j)$ jest tensorem metrycznym przestrzeni $T_{\mathbf{y}}\mathcal{O}$ w konfiguracji odciążonej sprężystości. Tensor $\bar{\mathbf{g}}$ jest więc miarą deformacji czysto plastycznej. W wyniku transformacji tego tensora do jakiegokolwiek innej konfiguracji otrzymywać będziemy inne miary deformacji plastycznej. Zatem, na podstawie (3.1), odpowiednie tensory Cauchy'ego-Greena deformacji plastycznej są określone przez transformacje $\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{p^T} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}^p = \bar{g}_{ij}(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j)$ i $\mathbf{c}^p = \mathbf{F}^{e^T} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}^{e^T} = \bar{g}_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j)$, w których gradienty \mathbf{F}^e i \mathbf{F}^p pełnią rolę operatorów transformujących. W niektórych pracach dotyczących problematyki sprężysto-plastycznych deformacji skończonych transformacja $\mathbf{F}^{e^T} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}^{e^T}$ jest błędnie interpretowana jako miara deformacji

sprężystej. Na przykład w [31] wyrażenie $\mathbf{F}^{e^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}^{e^{-1}} = \mathbf{b}^{e^{-1}} = \mathbf{c}^e$ definiuje tensor deformacji sprężystej Fingera, natomiast odkształcenie plastyczne określono z różnicy $2\mathbf{e}^p = \mathbf{c}^e - \mathbf{c}$, z której wynika niepoprawny wniosek, że $2\mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \mathcal{L}_v \mathbf{c}^e$.

Poprawne w ramach przyjętych założeń definicje odkształceń sprężystych i plastycznych przyjmują postać

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (d\bar{s})^2 &= d\mathbf{R} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{C}^p) \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{c}^p) \cdot d\mathbf{r}, \\ (d\bar{s})^2 - (dS)^2 &= d\mathbf{R} \cdot (\mathbf{C}^p - \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c}^p - \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dla konfiguracji początkowej otrzymujemy następujące tensorowe miary odkształcenia sprężystego i plastycznego:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{E}^e &= \mathbf{C} - \mathbf{C}^p = (g_{ij} - \bar{g}_{ij})(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j), \\ 2\mathbf{E}^p &= \mathbf{C}^p - \mathbf{G} = (\bar{g}_{ij} - G_{ij})(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tensorzy odkształcenia Eulera

$$\begin{aligned} 2\mathbf{e}^e &= \mathbf{g} - \mathbf{c}^p = (g_{ij} - \bar{g}_{ij})(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j), \\ 2\mathbf{e}^p &= \mathbf{c}^p - \mathbf{c} = (\bar{g}_{ij} - G_{ij})(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \end{aligned} \quad (3.5)$$

są miarami odkształcenia sprężystego i plastycznego w konfiguracji aktualnej. W przyjętym opisie konwekcyjnym reprezentacje przestrzennych miar odkształcenia są takie same jak reprezentacje odpowiednich miar odniesionych do konfiguracji początkowej.

Dla tensorów (3.4) oraz (3.5) zachodzą relacje addytywności w stosunku do odpowiednich tensorów odkształcenia całkowitego; $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$ i $\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$. Obowiązują także następujące reguły transformacyjne:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e &= \phi^* \mathbf{e}^e, \quad \mathbf{E}^e = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e}^e \cdot \mathbf{F}, & \mathbf{E}^p &= \phi^* \mathbf{e}^p, \quad \mathbf{E}^p = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e}^p \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{e}^e &= \phi_* \mathbf{E}^e, \quad \mathbf{e}^e = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{F}^{-1}, & \mathbf{e}^p &= \phi_* \mathbf{E}^p, \quad \mathbf{e}^p = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E}^p \cdot \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definicje prędkości zmian odkształceń sprężystych i plastycznych przyjmują postać:

$$\begin{aligned} [(ds)^2] \cdot - [(d\bar{s})^2] \cdot &= d\mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}^p) \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{L}_v \mathbf{g} - \mathcal{L}_v \mathbf{c}^p) \cdot d\mathbf{r}, \\ [(d\bar{s})^2] \cdot &= d\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{C}}^p \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathcal{L}_v \mathbf{c}^p \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wynikają z nich następujące tensorowe miary prędkości odkształcenia sprężystego i plastycznego, odniesione do konfiguracji \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{E}}^e &= \dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}^p = (\dot{\mathbf{g}}_{ij} - \dot{\bar{\mathbf{g}}}_{ij})(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j), \\ 2\dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\mathbf{C}}^p = \dot{\bar{\mathbf{g}}}_{ij}(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tensorzy

$$\begin{aligned} 2\mathbf{d}^e &= 2\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{e}^e = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{g} - \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{c}^p = (\dot{\mathbf{g}}_{ij} - \dot{\bar{\mathbf{g}}}_{ij})(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j), \\ 2\mathbf{d}^p &= 2\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{e}^p = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{c}^p = \dot{\bar{\mathbf{g}}}_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \end{aligned} \quad (3.9)$$

są miarami prędkości odkształcenia sprężystego i plastycznego w konfiguracji aktualnej \mathcal{C} .

Dla tensorów (3.8) oraz (3.9) również zachodzą relacje addytywności w stosunku do odpowiednich tensorów prędkości odkształcenia całkowitego, $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p$ i $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$. Podobnie gradient prędkości $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{l}^e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{l}^p(\mathbf{x}, t)$ ruchu φ_t rozkłada się na część sprężystą $\mathbf{l}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1}$ oraz część plastyczną $\mathbf{l}^p = \mathbf{F}^e \cdot (\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}) \cdot \mathbf{F}^{e-1}$. W wyrażeniu na \mathbf{l}^p tensorzy \mathbf{F}^e i \mathbf{F}^{e-1} są operatorami transformacji do konfiguracji aktualnej dla wyrażenia $(\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1})$.

Tensorowe miary prędkości odkształcenia sprężystego i plastycznego transformują się według wzorów

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^e &= \phi_* \mathbf{d}^e, & \dot{\mathbf{E}}^e &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d}^e \cdot \mathbf{F}, & \dot{\mathbf{E}}^p &= \phi_* \mathbf{d}^p, & \dot{\mathbf{E}}^p &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d}^p \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{d}^e &= \phi_* \dot{\mathbf{E}}^e, & \mathbf{d}^e &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e \cdot \mathbf{F}^{-1}, & \mathbf{d}^p &= \phi_* \dot{\mathbf{E}}^p, & \mathbf{d}^p &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^p \cdot \mathbf{F}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

które są zgodne z regułami transformacyjnymi (3.6) dla odpowiednich miar odkształcenia sprężystego i plastycznego. Zatem wszystkie zdefiniowane miary odkształcenia i prędkości odkształcenia spełniają zasadę obiektywności materialnej ze względu na aktualny ruch ośrodka ciągłego.

4. Ograniczenia termodynamiczne

Równania konstytutywne powinny spełniać szereg ograniczeń wynikających z postulowanych ogólnych zasad: współobecności, determinizmu, lokalności i obiektywności materialnej. Ponadto równania konstytutywne powinny być niesprzeczne z zasadami zachowania i drugą zasadą termodynamiki [32].

Rozważamy następujące zasady zachowania:

- *Zasada zachowania masy*

Zasadę tę możemy zapisać w postaci

$$J(X, t) = \rho_0(X) / \rho(x, t) \quad \text{dla } X \in \mathcal{B} \text{ i } x \in \mathcal{C}, \quad (4.1)$$

gdzie $\rho_0(X)$ i $\rho(x, t)$ są gęstościami masy, odpowiednio w konfiguracjach \mathcal{B} i \mathcal{C} . Wielkość $J(X, t)$ określa Jakobian odwzorowania $\phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.

- *Zasada zachowania pędu (pierwsze prawo ruchu Cauchy'ego)*

Dla konfiguracji aktualnej \mathcal{C} zasada zachowania pędu, przy pominięciu sił masowych, przyjmuje postać

$$\rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego.

Postać równania ruchu dla konfiguracji początkowej \mathcal{B} znajdujemy, wykorzystując tożsamość Pioli $\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, w której $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ jest pierwszym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa. Odpowiednio otrzymujemy

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{div} [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)]. \quad (4.3)$$

W powyższym równaniu przez $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$ oznaczono drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa.

- *Zasada zachowania momentu pędu (drugie prawo ruchu Cauchy'ego)*

Zasada ta wyraża się symetrią tensorów naprężenia $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ w \mathcal{C} i $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ w \mathcal{B} . W przypadku pierwszego tensora naprężenia Kirchhoffa (tensor niesymetryczny) otrzymujemy z niej, że $\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T$ w \mathcal{B} .

- *Zasada zachowania energii (pierwsza zasada termodynamiki)*

Lokalna postać tej zasady dla konfiguracji aktualnej \mathcal{C} , przy pominięciu źródeł ciepła wewnątrz ciała, jest następująca:

$$\rho e(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad (4.4)$$

gdzie $\rho e(\mathbf{x}, t)$ jest gęstością energii wewnętrznej, przez $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ oznaczono wektor strumienia ciepła przez powierzchnię.

Rozważana zasada w odniesieniu do konfiguracji początkowej \mathcal{B} przyjmuje postać

$$\rho_0 \dot{e}(\mathbf{X}, t) + \operatorname{div} \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) : \mathbf{K}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t). \quad (4.5)$$

Tensor $\mathbf{K}(\mathbf{X}, t)$ będący miarą prędkości odkształcenia jest określony wzorem (2.15). Wektor strumienia ciepła transformuje się według reguły $\mathbf{Q} = J \phi^* \mathbf{q}$, $\mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$, $\operatorname{div} \mathbf{Q} = J \operatorname{div} \mathbf{q}$, energia wewnętrzna transformuje się jak wielkość skalarna, tzn. $e(\mathbf{x}, t) = e(\mathbf{X}, t)$.

Z prawa zachowania energii otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} &= \tau^{ij} \dot{g}_{kl} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) : (\mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l) = \tau^{ij} \dot{g}_{ji}, \\ 2\mathbf{T} : \mathbf{K} &= \tau^{ij} \dot{g}_{ik} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j) : (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{G}^l) = \tau^{ij} \dot{g}_{ji}, \\ 2J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} &= 2\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \tau^{ij} \dot{g}_{kl} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) : (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l) = \tau^{ij} \dot{g}_{ji}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

z których wynikają równości $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T} : \mathbf{K} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}$, przez $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ oznaczono tensor naprężenia Kirchhoffa. W opisie konwekcyjnym kontrawariantne reprezentacje tensorów naprężenia \mathbf{S} , \mathbf{T} , $\boldsymbol{\tau}$ są identyczne, w (4.6) oznaczono je przez τ^{ij} . Tensory \mathbf{S} i $\dot{\mathbf{E}}$, \mathbf{T} i \mathbf{K} oraz $\boldsymbol{\tau}$ i \mathbf{d} są wielkościami sprzężonymi w sensie Hilla.

Wykorzystując definicję (2.15) tensora \mathbf{K} , w równaniu (4.6)₂ otrzymamy:

$$2\mathbf{T} : \mathbf{K} = \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{T} : (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F}). \quad (4.7)$$

Z uwagi na tożsamość $\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T$ wynikającą z zasady zachowania pędu drugi składnik wyrażenia (4.7) możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{T} : (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T) : \mathbf{L} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T) : \mathbf{L} = \mathbf{T} : (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (4.8)$$

Ostatecznie, na podstawie (4.7) i (4.8), otrzymujemy [1, 20, 26]:

$$\mathbf{T} : \mathbf{K} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (4.9)$$

- *Nierówność produkcji entropii (druga zasada termodynamiki)*

Jest to podstawowa zależność ogólna, która poza zasadami zachowania, określa klasę procesów dopuszczalnych w kontinuum materialnym. Dla konfiguracji aktualnej \mathcal{C} przyjmuje ona postać

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \rho \left[\eta(\mathbf{x}, t) \dot{\vartheta}(\mathbf{x}, t) + \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) \right] - \frac{1}{\vartheta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad } \vartheta(\mathbf{x}, t) \geq 0. \quad (4.10)$$

Funkcja termodynamiczna $\psi(\mathbf{x}, t) = e(\mathbf{x}, t) - \eta(\mathbf{x}, t) \vartheta(\mathbf{x}, t)$ nosi nazwę energii swobodnej Helmholtza, przez $\vartheta(\mathbf{x}, t)$ oznaczono pole temperatury, $\eta(\mathbf{x}, t)$ jest polem gęstości (masowej) entropii.

Reguła transformacyjna

$$\frac{J(\mathbf{X}, t)}{\vartheta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad } \vartheta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\vartheta(\mathbf{X}, t)} \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \text{grad } \vartheta(\mathbf{X}, t), \quad (4.11)$$

prowadzi do następującej postaci nierówności produkcji entropii dla konfiguracji początkowej \mathcal{B} :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) : \mathbf{K}(\mathbf{X}, t) - \rho_0 \left[\eta(\mathbf{X}, t) \dot{\vartheta}(\mathbf{X}, t) + \dot{\psi}(\mathbf{X}, t) \right] - \frac{1}{\vartheta(\mathbf{X}, t)} \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \text{grad } \vartheta(\mathbf{X}, t) \geq 0. \quad (4.12)$$

Funkcje temperatury, energii swobodnej i entropii transformują się według zależności:

$$\vartheta(\mathbf{x}, t) = \vartheta(\mathbf{X}, t), \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{X}, t), \quad \eta(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{X}, t). \quad (4.13)$$

W teorii termomechanicznej opisującej efekty dyssypatywne postuluje się istnienie funkcji energii swobodnej w postaci [7],

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \vartheta, \mathbf{M})(\mathbf{X}, t) \text{ w } \mathcal{B}, \quad (4.14)$$

gdzie $\mathbf{M}(X,t)$ jest wektorem parametrów wewnętrznych. Składowymi tego wektora mogą być wielkości skalarne, wektorowe bądź tensorowe. Uwzględniając, że dla funkcji $\hat{\psi}$ zachodzi zależność $\dot{\hat{\psi}}(X,t) = 2\partial_{\mathbf{F}}\hat{\psi} : \mathbf{K} + \partial_{\vartheta}\hat{\psi} \dot{\vartheta} + \partial_{\mathbf{M}}\hat{\psi} \cdot \dot{\mathbf{M}}$, po przekształceniach otrzymujemy następującą postać nierówności Clausiusa-Duhema:

$$\frac{1}{\rho_0}(\mathbf{T} - 2\rho_0\partial_{\mathbf{F}}\hat{\psi}) : \mathbf{K} - (\eta + \partial_{\vartheta}\hat{\psi})\dot{\vartheta} - \partial_{\mathbf{M}}\hat{\psi} \cdot \dot{\mathbf{M}} - \frac{1}{\rho_0}\mathbf{Q} \cdot \text{grad } \vartheta \geq 0. \quad (4.15)$$

Powyzsza nierownosc powinna byc spełniona dla dowolnych wartosci \mathbf{K} , $\dot{\vartheta}$, $\dot{\mathbf{M}}$. Wymaganie to prowadzi do następujących relacji konstytutywnych:

$$\mathbf{T} = 2\rho_0\partial_{\mathbf{F}}\hat{\psi}, \quad \eta = -\partial_{\vartheta}\hat{\psi}. \quad (4.16)$$

W tym przypadku funkcja konstytutywna — energia swobodna — jest potencjałem termodynamicznym dla pierwszego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa i entropii. Po uwzględnieniu wzorów (4.16) nierownosc Clausiusa-Duhema przybiera postać:

$$\vartheta\hat{i} - \frac{1}{\rho_0}\mathbf{Q} \cdot \text{grad } \vartheta \geq 0, \quad (4.17)$$

gdzie $\vartheta\hat{i}(X,t) = -\partial_{\mathbf{M}}\hat{\psi} \cdot \dot{\mathbf{M}}$ jest wielkością dyssypacji wewnętrznej w materiale. Nierownosc (4.17) nosi w literaturze nazwę nierówności dyssypatywnej i stanowi ograniczenie konstytutywne dla zależności $\hat{\psi}(X,t)$ od zmiennych wewnętrznych $\mathbf{M}(X,t)$, wynikające z drugiej zasady termodynamiki.

Biorąc pod uwagę, że $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}$ i wykorzystując (4.16)₁, otrzymujemy

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\mathbf{F}^{-1} \cdot (\partial_{\mathbf{C}}\hat{\psi} : \partial_{\mathbf{F}}\mathbf{C}) = 2\rho_0\partial_{\mathbf{C}}\hat{\psi}, \quad (4.18)$$

gdzie $\mathbf{C}(\mathbf{F})(X,t)$ jest lewym tensorem deformacji Cauchy-Greena (2.5)₁. Dysponujemy zatem zależnością pierwszego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa od funkcji energii swobodnej (4.16)₁ i podobną zależnością dla drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa (4.18).

Uwzględniając zaś zależności transformacyjne

$$\mathbf{C}(X,t) = \phi^*\mathbf{g}(x,t), \quad \mathbf{M}(X,t) = \phi^*\boldsymbol{\mu}(x,t), \quad \vartheta(X,t) = \vartheta(x,t), \quad (4.19)$$

otrzymujemy dla funkcji energii swobodnej $\hat{\psi}$ następujące równanie

$$\hat{\psi}(\mathbf{C}, \vartheta, \mathbf{M})(X,t) = \hat{\psi}(\phi^*\mathbf{g}, \vartheta, \phi^*\boldsymbol{\mu})(X,t) = \hat{\psi}(\mathbf{g}, \vartheta, \boldsymbol{\mu})(x,t). \quad (4.20)$$

Różniczkowanie funkcji $\hat{\psi}(\mathbf{g}, \vartheta, \boldsymbol{\mu})(x,t)$ względem tensora metrycznego \mathbf{g} prowadzi do rezultatu

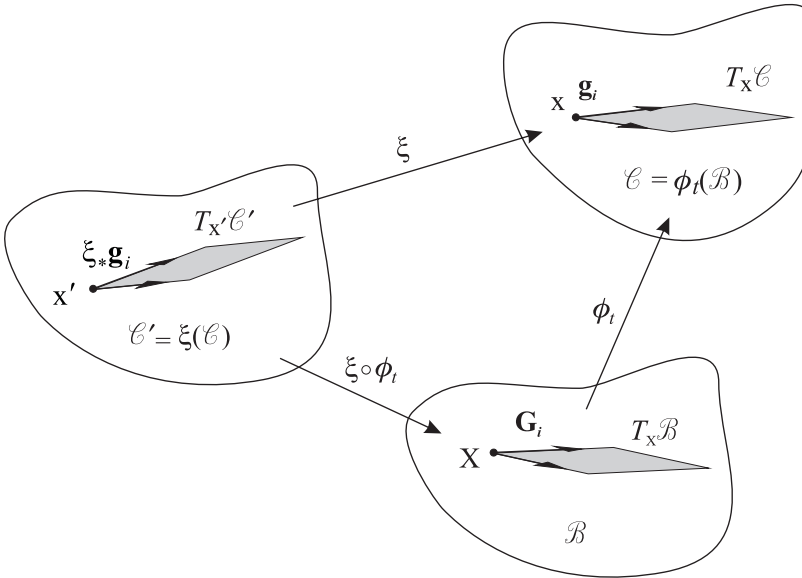
$$\partial_{\mathbf{g}}\hat{\psi}(x,t) = \partial_{\mathbf{C}}\hat{\psi}(X,t) : \partial_{\mathbf{g}}\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{C}}\hat{\psi}(X,t) \cdot \mathbf{F}^T = \phi_*\partial_{\mathbf{C}}\hat{\psi}(X,t). \quad (4.21)$$

Zatem, po uwzględnieniu (4.18) w (4.21), ostatecznie otrzymujemy [5]:

$$\tau = \phi_* \mathbf{S} = 2\rho_0 \phi_* \partial_{\mathcal{C}} \hat{\psi} = 2\rho_0 \partial_{\mathbf{g}} \hat{\psi}. \quad (4.22)$$

W ten sposób w opisie przestrzennym postulujemy istnienie funkcji energii swobodnej w postaci $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{g}, \vartheta, \mu)(x, t)$, gdzie $\mu(x, t)$ jest wektorem parametrów wewnętrznych określonych dla konfiguracji aktualnej \mathcal{C} . Pozostałe zależności konstytutywne wyrażają się wzorami

$$\eta = -\partial_{\vartheta} \hat{\psi}, \quad \vartheta \hat{i} - \frac{1}{\rho \vartheta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \vartheta \geq 0, \quad \vartheta \hat{i} = -\partial_{\mu} \hat{\psi} \cdot \mathcal{L}_v \mu. \quad (4.23)$$



Rys. 4.1. Graficzna interpretacja zmiany konfiguracji aktualnej na skutek nałożonego na nią dowolnego dyfeomorfizmu ξ_t

Posługując się pojęciem funkcji energii swobodnej, postulowaną zasadę obiektywności materialnej możemy zapisać następująco [20]:

Struktura konstytutywna jest obiektywna ze względu na nałożoną na konfigurację aktualną dowolną zmianę opisaną odwzorowaniem dyfeomorficznym $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ takim, że $x' = \xi(x)$ (rys. 4.1.), jeżeli

$$\hat{\psi}(\mathbf{g}, \vartheta, \mu)(x, t) = \hat{\psi}(\mathbf{g}', \vartheta, \mu')(x', t), \quad (4.24)$$

gdzie

$$\mathbf{g}'(x', t) = \xi_* \mathbf{g}(x, t), \quad \mu'(x', t) = \xi_* \mu(x, t), \quad \vartheta(x', t) = \vartheta(x, t). \quad (4.25)$$

Przyjmując $\xi = \phi_t^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, stwierdzamy, że:

Struktura konstytutywna jest obiektywna ze względu na aktualny ruch opisany odwzorowaniem dyfeomorficznym $\phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ takim, że $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$, jeżeli

$$\hat{\psi}(\mathbf{g}, \vartheta, \mu)(\mathbf{x}, t) = \hat{\psi}(\mathbf{C}, \vartheta, \mathbf{M})(\mathbf{X}, t), \quad (4.26)$$

gdzie

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \phi^* \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{X}, t) = \phi^* \mu(\mathbf{x}, t), \quad \vartheta(\mathbf{X}, t) = \vartheta(\mathbf{x}, t). \quad (4.27)$$

Przyjmując, że $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ jest odwzorowaniem regularnym, zachowującym wzajemność wyróżnionych w konfiguracji \mathcal{C} kierunków, otrzymujemy postulat obiektywności materialnej ze względu na nałożony na ciało odkształcalne obrót sztywny. W takim przypadku ξ , jest transformacją izometryczną [2, 27, 32].

5. Ogólna postać równań konstytutywnych typu prędkościowego

Biorąc pod uwagę dotychczasowe rozważania, możemy stwierdzić, że dla deformacji sprężysto-plastycznych podstawowe relacje konstytutywne mogą być formułowane w oparciu o konfigurację początkową lub aktualną. Sformułowania takie są wzajemnie równoważne, jeżeli wielkości w nich występujące transformują się według określonych reguł. W dalszych rozważaniach posłużono się opisem przestrzennym jako fizycznie najbardziej naturalnym. Podejście takie posiada również uzasadnienie wynikające z zastosowania równań konstytutywnych do opisu procesów plastycznego płynięcia realizowanych w stanie aktualnym.

Równania ewolucji dla parametrów wewnętrznych zapisujemy w postaci

$$\mathcal{L}_v \mu = \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{g}, \vartheta, \mu)(\mathbf{x}, t). \quad (5.1)$$

Wektor funkcji ewolucyjnych $\hat{\mathbf{m}}$ jest określany na podstawie analiz rozpatrywanych procesów fizycznych.

Wykonując operacje Liego na wyrażeniu (4.22) przy $\mu = \text{const}$, otrzymujemy następujące równanie ewolucji dla tensora naprężenia Kirchhoffa:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} \Big|_{\mu=\text{const}} = 2\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}^2} : \mathcal{L}_v \mathbf{g} \Big|_{\mu=\text{const}} + 2\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g} \partial \vartheta} \dot{\vartheta}. \quad (5.2)$$

Niezmiennosc parametrów wewnętrznych ($\mu = \text{const}$) przy różniczkowaniu (5.2) jest tożsama ze znikaniem części plastycznej gradientu pola prędkości ruchu ϕ_t ($\mathbf{I}^p = 0$). Zatem pochodne Liego występujące w (5.2) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} \Big|_{\mathbf{I}^p=0} &= \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{I}^p \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{I}^{pT} = \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}^p \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}^p + \boldsymbol{\omega}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^p, \\ \mathcal{L}_v \mathbf{g} \Big|_{\mathbf{I}^p=0} &= 2\mathcal{L}_v \mathbf{e}^e = 2\mathbf{d}^e. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Postać wyrażenia (5.3) wynika z zastosowania rozkładów $\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p$ i $\mathbf{l}^p = \mathbf{d}^p + \omega^p$, gdzie ω^p jest częścią plastyczną spinu materialnego. Podstawiając (5.3) do (5.2), otrzymujemy równanie konstytutywne dla tensora naprężenia Kirchhoffa w postaci [6]

$$\mathcal{L}_\nu \boldsymbol{\tau} = \mathcal{L}^e : \mathbf{d} - (\mathcal{L}^e + \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{g}) : \mathbf{d}^p - (\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{g}) : \omega^p - \mathcal{L}^{th} \dot{\vartheta}, \quad (5.4)$$

gdzie

$$\mathcal{L}^e = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}^2}, \quad \mathcal{L}^{th} = -2\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g} \partial \vartheta} \quad (5.5)$$

są tensorami odpowiednio modułów sprężystości (tensor czwartego rzędu) i rozszerzalności cieplnej (tensor drugiego rzędu).

Konsekwencją postulowanej zasady obiektywności materialnej jest dodatkowa wielkość $(\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{g}) : \mathbf{d}^p$ występująca w równaniu (5.4). Wielkość ta jest małą wyższego rzędu w stosunku do $\mathcal{L}^e : \mathbf{d}^p$, może mieć jednak znaczenie praktyczne, np. w analizie propagacji i interakcji fal naprężenia w ciałach niesprężystych obciążonych impulsem ciśnienia o dużej intensywności lub badaniach dotyczących lokalizacji deformacji plastycznych.

Dalsze uszczegółowienie równania ewolucji dla tensora naprężenia polega na określeniu praw rządzących deformacją plastyczną \mathbf{d}^p , spinem plastycznym ω^p i zmianami temperatury ϑ . Równanie ewolucji dla temperatury określamy z zasady zachowania energii.

Podstawiając $\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{\eta}\vartheta + \eta\dot{\vartheta}$ do równania zachowania energii (4.4) i biorąc pod uwagę relacje (4.23)₂ i (4.23)₃, otrzymujemy równanie produkcji entropii

$$\rho \vartheta \dot{\eta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \dot{\vartheta} \dot{\eta}. \quad (5.6)$$

Uwzględniając zaś relacje (4.22) (4.23)₁, otrzymujemy

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \vartheta} = 2\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g} \partial \vartheta}, \quad \dot{\eta} = -2 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g} \partial \vartheta} : \mathbf{d} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \vartheta^2} \dot{\vartheta} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \vartheta \partial \mu} \cdot \hat{\mathbf{m}}. \quad (5.7)$$

Po wykorzystaniu zależności (5.7) w (5.6) otrzymujemy następujące równanie ewolucji dla temperatury:

$$\rho c_p \dot{\vartheta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{\rho}{\rho_0} \vartheta \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \vartheta} : \mathbf{d} + \rho \left(\vartheta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \vartheta \partial \mu} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mu} \right) \cdot \hat{\mathbf{m}}, \quad (5.8)$$

gdzie $c_p = -\vartheta \partial^2 \hat{\psi} / \partial \vartheta^2$ jest ciepłem właściwym. Drugi składnik prawej strony równania (5.8) ma naturę niedyssypatywną. Trzeci zaś reprezentuje prędkość zmiany dyssypacji wewnętrznej w materiale. Wielkość składnika niedyssypatywnego jest wielkością małą wyższego rzędu w stosunku do wielkości składnika dyssypatywnego i może być w niektórych rozważaniach pomijana.

Przedstawione tutaj równania konstytutywne były wykorzystywane do analiz zjawisk lokalizacji i zniszczenia w procesach płynięcia termo-lepkoplastycznego przy dynamicznych obciążeniach cyklicznych [3, 4].

6. Zakończenie

W przedstawionym opisie konwekcyjnym transformacja wektorów i tensorów polega na transformacji ich odpowiednich stowarzyszeń bazowych. Oczywiście transformacja taka nie zmienia fizycznego sensu transformowanych wielkości. Dlatego też tensory deformacji plastycznej definiowane na tzw. konfiguracji odciążonej po przetransformowaniu do jakiegokolwiek innej konfiguracji pozostają nadal miarami deformacji plastycznej. Reguły transformacji tensorów w układzie współrzędnych konwekcyjnych spełniają zasadę obiektywności materialnej ze względu na całkowity ruch ośrodka ciągłego (odwzorowanie dyfeomorficzne).

W ramach koncepcji obiektywności względem całkowitego ruchu ośrodka ciągłego wykazano tożsamość multiplikatywnego rozkładu gradientu deformacji sprężysto-plastycznej z addytywnymi rozkładami innych miar odkształcenia i prędkości odkształcenia sprężysto-plastycznego. Posługując się pojęciem funkcji energii swobodnej, zaproponowano pewne sformułowanie postulatu obiektywności materialnej dla struktury konstytutywnej z parametrami wewnętrznymi. Wykorzystując ten postulat, przedstawiono ogólną postać struktury konstytutywnej typu prędkościowego.

Pracę wykonano w ramach PBS nr 934 nt. „Nowe ujęcie zasad projektowania specjalnych obiektów infrastruktury wojskowej”, 2016-2018.

Artykuł wpłynął do redakcji 26.11.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 20.01.2016 r.

LITERATURA

- [1] BERTRAM A., *Elasticity and Plasticity of Large Deformations — An Introduction*, 3rd ed., Springer, 2012.
- [2] CIARLET P.G., *Mathematical elasticity*, vol. 1. *Three-dimensional elasticity*, [in:] *Studies in mathematics and its applications*, vol. 20, North-Holland, Amsterdam-Tokyo, 1988.
- [3] DORNOWSKI W., *Numeryczna symulacja procesów plastycznego płynięcia przy dynamicznych obciążeniach cyklicznych*, WAT, wewn. 2598/99, 1999.
- [4] DORNOWSKI W., PERZYNA P., *Localization phenomena in thermo-viscoplastic flow processes under cyclic dynamic loadings*, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 7, 2000, 117-160.
- [5] DOYLE T.C., ERICKSEN J.L., *Nonlinear elasticity*, [in:] *Advances in Applied Mechanics*, vol. 4, Academic Press, New York, 1956.
- [6] DUSZEK M.K., PERZYNA P., *The localization of plastic deformation in thermoplastic solids*, *Int. J. Solids Structures*, 27, 1991, 1419-1443.

-
- [7] DUSZEK-PERZYNA M.K., PERZYNA P., *Analysis of anisotropy and plastic spin effects on localization phenomena*, Arch. Appl. Mech., 68, 1998, 352-374.
- [8] GREEN A.E., NAGHDI P.M., *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., 18, 1965, 251-281.
- [9] GREEN A.E., NAGHDI P.M., *A thermodynamic development of elastic-plastic continua*, [in:] H. Parkus and I. Sedov, eds., Proc. IUTAM Symp., Springer, Berlin, 1966.
- [10] GREEN A.E., NAGHDI P.M., *Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain*, Int. J. Solids Structures, 18, 1971.
- [11] GREEN A.E., ZERNA W., *Theoretical Elasticity*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [12] HILL R., *Aspects of invariance in Solid Mechanics*, Advances in Applied Mechanics, 18, 1978, 1-75.
- [13] HUGHES T.J.R., *Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity*, Workshop on Theoretical Foundations for Large-scale Computations of Nonlinear Material Behavior, North-western University, Evanston, IL, 1983.
- [14] JEMIOŁO S., GAJEWSKI M., *Hipersprężystoplastyczność*, Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, t. 4, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2014.
- [15] KEY S.W., STONE C.M., KRIEG R.D., *Dynamic relaxation applied to the quasi-static, large deformation, inelastic response of axisymmetric solids*, [in:] Wunderlich et al., eds., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer, Berlin, 1981.
- [16] KLEIBER M., *Kinematics of deformation process in materials subjected to finite elastoplastic strains*, Int. J. Engng. Sci., 13, 1975, 513-525.
- [17] KRÖNER E., TEODOSIU C., *Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity*, [in:] A. Sawczuk, ed., Problems of Plasticity, Noordhoff, Leyden, 1972.
- [18] LEE E.H., *Elastic-plastic deformation at finite strains*, J. Appl. Mech., 36, 1969, 1-6.
- [19] LEE E.H., LIU D.T., *Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis*, J. Appl. Phys., 38, 1967, 19-27.
- [20] MARSDEN J.E., HUGHES T.J.R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [21] MCMEEKING R.M., RICE J.R., *Finite element formulation for problems of large elastic-plastic deformation*, Int. J. Solids Structures, 11, 1975, 601-616.
- [22] NAGHDI P.M., TRAPP J.A., *Restrictions on constitutive equations for finitely deformed elastic-plastic materials*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 28 (1), 1975.
- [23] NAGTEGAAL J.C., DEJONG J.E., *Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis*, Int. J. Num. Meths. Engng., 17, 1981, 15-41.
- [24] NEEDLEMAN A., TVERGAARD V., *Finite element analysis of localization plasticity*, in Finite elements, vol. 5. Special problems in solid mechanics, Editors J.T. Oden and G.F. Carey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [25] NEMAT-NASSER S., *On finite deformation elasto-plasticity*, Int. J. Solids Structures, 18, 1982, 857-872.
- [26] OSTROWSKA-MACIEJEWSKA J., *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa, 1994.
- [27] SILHAVY M., *The mechanics and thermodynamics of continuous media*, Springer, Berlin-Tokyo, 1997.
- [28] SIMO J.C., *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition*, Part I. Continuum formulation, Comp. Methods Appl. Mech. Engin., vol. 66, 1988, 199-219.

- [29] SIMO J.C., *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition*, Part II. *Computational aspects*, Comp. Methods Appl. Mech. Engin., vol. 68, 1988, 1-31.
- [30] SIMO J.C., HUGHES T.J.R., *Computational inelasticity*, Springer-Verlag, Inc., New York, 1998.
- [31] SIMO J.C., ORTIZ M., *A unified Approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 49, 1985, 221-245.
- [32] TRUESDEL C., NOLL W., *The non-linear field theories of mechanics*, In Handbuch der Physik (Edited by S. Flügge), vol. 3/3, Springer, Berlin, 1965.

W. DORNOWSKI

The convective description of kinematics of finite elasto-plastic deformations

Abstract. The convective description of kinematics of finite elasto-plastic deformations is presented. From the numerical application point of view, such an approach is very useful [4]. It also leads to clear interpretation of the geometrical sense of tensor transformation. Transformation rules for the spatial tensor field objective at superposed spatial diffeomorphism are given. The local notion of the tangent space unloaded elastically is introduced. The metric tensor defined in this space is the purely plastic deformation measure. It is shown that transformation of this tensor to any other configuration leads to other deformation measures but ever plastic one. Within the limits of the concept of covariance it is shown that the additive decompositions, in which strains and their rates decompose additively into elastic and plastic parts, can be derived from the multiplicative decomposition of the deformation gradient. Using the free energy function, the formulation of material objectivity of the constitutive structure with a finite set of internal variables is proposed. Making use of this formulation, the general form of the rate type constitutive structure is presented.

Keywords: elasto-plasticity, large deformations

DOI: 10.5604/12345865.1197978

