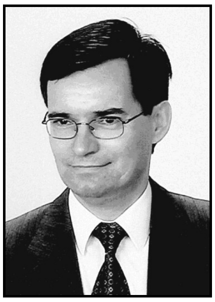
Paweł FOTOWICZ
GŁÓWNY URZĄD MIAR
ul. Elektoralna 2, 00-139 Warszawa

Historyczna droga kształtowania się teorii niepewności pomiaru

Dr inż. Paweł FOTOWICZ

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył w 1981 roku na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej. Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych, będąc autorem sześciu patentów. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się w zagadnieniami metrologii ogólnej i niepewności pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji w postaci referatów i artykułów w czasopismach krajowych i zagranicznych.

e-mail: uncert@gum.gov.pl



Streszczenie

Przedstawiono historyczną drogę kształtowania się teorii niepewności pomiaru na przestrzeni dwóch stuleci. Droga ta zaczyna się od wnioskowań Gaussa i Laplacea co do rozkładu błędu w postaci krzywej dzwonowej, wzbogacona przez rozwiązanie Gosseta, w postaci rozkładu Studenta dla skończonej liczby serii obserwacji i uogólnienie tego rozwiązania przez Welcha i Satterthwaitea. Rozwiązania te znalazły odbicie w teorii niepewności sformułowanej w pracy Dietricha, na które powołują się autorzy Przewodnika wyrażania niepewności pomiaru, opracowanego pod koniec XX wieku.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, historia metrologii.

Historical way of the measurement uncertainty theory

Abstract

The paper describes a historical way formulating the measurement uncertainty theory. The first achievements were: Gauss's law of error propagation in 1809 and Laplace's statement of the central limit theorem in 1810. This achievement leads to normal density function as the basis distribution for population of measurement data. The inference of normal distribution for measurand confirms the Airy's work in 1875 using the term "uncertainty", and formulates the law uncertainty propagation. The second step was a Gosset's distribution of a probable error for the mean in 1908, called as a Student distribution. The generalization of this solution was a paper by Welch and Satterthwaite concerning a distribution for the measurand defined by a linear measurement function. The distribution was a Student distribution with effective degree of freedom. The above approach was used by Dietrich to formulate the general theory of uncertainty. The basic assumption of this theory is an equal treating of random and systematic uncertainties in a probabilistic way. His work was a basic reference for the Guide to express the uncertainty in measurements, published in 1995.

Keywords: measurement uncertainty, history of metrology.

1. Wstęp

Teoria niepewności pomiaru kształtowała się przez ostatnie dwa stulecia. Przesłanki do tej teorii można odczytać z zapisów przedstawionych w Przewodniku wyrażania niepewności pomiaru, opublikowanego w ostatniej dekadzie XX wieku [1]. Jednak jej dojrzalszą postać można rozpoznać na kartach najnowszych opracowań dotyczących analizy danych pomiarowych [2 i 3]. Opiera się na założeniu o modelowaniu wyniku pomiaru zmienną losową o policzalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. W tych najnowszych opracowaniach mówi się wprost o przedstawianiu wyniku w formie rozkładu i jego parametrów, w postaci wartości oczekiwanej, odchylania standardowego i kwantyli jako umownych granic wielkości mierzonej. Lecz zanim doszło do takiego podejścia w traktowaniu wyniku pomiaru warto prześledzić najważniejsze etapy kształtowania się myśli związanej z opracowaniem danych pomiarowych. Doprowadziły one do ukształtowania się współczesnego wyrażania niepewności pomiaru.

2. Początki związane z wnioskowaniami Laplacea i Gaussa

Już pod koniec XVIII wieku Laplace formułuje trzy warunki dotyczące krzywej (rozkładu) błędu. Po pierwsze ma być symetryczna względem wartości prawdziwej, gdyż obserwacje jednakowo odchylają się od niej w kierunku wartości większych, jak i mniejszych. Po drugie musi zdążać do zera, oddalając się od wartości prawdziwej, gdyż prawdopodobieństwo, że wartość obserwacji może być nieskończenie różna od wartości prawdziwej jest równe zeru. Po trzecie obszar (pole powierzchni pod krzywą błędu) musi liczbowo być równy jeden, gdyż pewne jest zdarzenie, że każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą. Takie kryteria spełnia oczywiście krzywa dzwonowa (rozkładu normalnego), ale propozycję jej zastosowania do opisu rozkładu błędu pomiaru przedstawił dopiero Gauss w 1809 roku. Laplace początkowo uważał, że takie kryteria może spełnić wiele funkcji, m. in. logarytmiczne, np. $e(x) = (1/2a)\cdot\log(a/|x|)$, gdzie a wyznacza granicę przedziału błędu e - wnioskowanie z 1777 roku.

Gauss przyjmuje aksjomat, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznanej obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru danych, uzyskanego w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Postuluje, do opisu krzywej (rozkładu) błędu, przyjęcie funkcji:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \qquad (1)$$

gdzie h jest stałą związaną z precyzją pomiaru.

W 1810 roku Laplace formułuje tezę, że jeżeli błąd każdej obserwacji jest taki sam, to prawdopodobieństwo, iż błąd średniej n obserwacji będzie zawarty w granicach: $\pm rh/n$, jest równe:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{2k'}}\int \exp\left[-\frac{k}{2k'}r^2\right]\mathrm{d}r, \qquad (2)$$

gdzie h jest długością przedziału, wewnątrz którego zawarty jest błąd pojedynczej obserwacji. Prawdopodobieństwo błędu zawartego w granicach od x=-h/2 do x=h/2 autor oznacza $\phi(x/h)$ oraz definiuje, że:

$$k = \int \phi\left(\frac{x}{h}\right)\mathrm{d}x, \quad k' = \int \frac{x^2}{h^2}\phi\left(\frac{x}{h}\right)\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Tak oto pierwsza dekada XIX wieku kończy się doniosłymi stwierdzeniami, iż krzywą błędu pomiaru wykonywanego w warunkach powtarzalności jest krzywa dzwonowa, a rozkładowi normalnemu podlega również średnia takich wyników pomiaru. Można powiedzieć, że dane eksperymentalne, uzyskane w warunkach powtarzalności, tworzą populację o rozkładzie normalnym.

Obszerniejsze informacje na powyższy temat możemy znaleźć w pracy Stiglera [4], jednej z ciekawszych jakie dotyczą historycznych początków kształtowania się myśli metrologicznej, w dziedzinie opracowania danych pomiarowych.

3. Dzieło Airy

Słuszność przyjęcia rozkładu normalnego dla danych doświadczalnych potwierdza Airy w swoim dziele z 1875 roku [5]. Jest również prekursorem pojęcia niepewność (uncertainty). Postuluje rozumienie błędu pomiaru (error) w kontekście niepewności pomiaru, używając pojęć „uncertain error” lub „uncertainty”. Przez niepewność błędu uważa każdą jego wartość, łącznie z przypadkiem, gdy może on być równy zero. Innymi słowy błąd pomiaru dla Airy to zbór jego wartości powtarzających się w danym pomiarze z określoną częstością. Autor stwierdza, na kartach swojej pracy, że prawdopodobieństwo, iż błąd może znaleźć się w przedziale pomiędzy określonym x a $x+\delta x$ wynosi:

$$\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{c^2}}\cdot\delta x\,. \tag{4}$$

Jak nie trudno się domyśleć wzór powyższy zawiera równanie krzywej dzwonowej. W powyższym wzorze występuje parametr c, który autor nazywa modułem (modulus) i definiuje go jako:

$$c = \text{Error of Mean Square} \times 1{,}414214\,. \tag{5}$$

I tu nie trudno się domyśleć, że moduł Airy jest równy iloczynowi błędu średniego kwadratowego i pierwiastka z dwóch. Dodatkowo, w konkluzji, autor nazywa wzór (4) prawem częstości błędu (Law of Frequency of Error), które wyraża prawdopodobieństwo określonej wartości błędu zawartej w przedziale pomiędzy x i $x+\delta x$. Jednocześnie stwierdza, że moduł jest stały dla określonego pomiaru lecz inny dla różnych pomiarów. Z dzisiejszego punktu widzenia jest to oczywiste, gdyż dla każdej serii pomiarowej uzyskujemy określoną wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego, lecz możliwe są różne jego wartości dla każdej innej serii obserwacji.

Istotnym wnioskowaniem Airy jest również twierdzenie, że w przypadku łączenia błędów pomiaru wielkości X i Y ich wspólny moduł, dla wielkości zagregowanej Z, podlega prawu:

$$\text{sq. of mod. for } Z = \text{sq. of mod. for } X + \text{sq. of mod. for } Y\,, \tag{6}$$

co jest równoznaczne z zapisem współczesnego równia niepewności pomiaru (sumowania wariancji) w postaci:

$$u^2(Z) = u^2(X) + u^2(Y)\,. \tag{7}$$

Dzieło Airy uświadamia, iż mimo przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym dla populacji wyników pomiaru każda seria obserwacji może mieć inną wartość średniej i odchylnia standardowego eksperymentalnego (błędu średnio kwadratowego).

4. Rozkład Studenta

Nad problemem rozkładu dla małej liczby obserwacji w próbie losowej pracował Gosset, który publikował swoje rozważania pod pseudonimem Student. Wyniki swoich dociekań przedstawił w 1908 roku w czasopiśmie Biometrika [6]. Zakładał, że wyniki pomiaru wywodzą się z populacji o rozkładzie normalnym, a sam pomiar polega na losowaniu z tej populacji ograniczonej liczebnie serii obserwacji jako próby losowej. Rozważał serie obserwacji o liczebności od 4 do 10. Stworzył nową zmienną losową będącą ilorazem wartości średniej serii obserwacji i odchylenia standardowego eksperymentalnego tej średniej. O ile sama średnia, zgodnie z wnioskowaniem Laplacea, podlega rozkładowi normalnemu to kwadrat odchylenia standardowego już rozkładowi chi kwadrat. Podzielenie zatem tych dwóch zmiennych prze siebie tworzy nowy rozkład. Jest to rozkład wartości średniej standaryzowany jego odchyleniem standardowym eksperymentalnym. Został nazwany rozkładem Studenta. Rozkład ten w swoim charakterze podobny jest do rozkładu normalnego i do niego zbieżny wraz z rosnącą liczbą obserwacji w próbie losowej, lecz o rosnącej rozpiętości (szerokości) wraz z malejącą liczbą obserwacji w próbie.

W publikacji [6] Gosset definiuje zmienną losową $z= x/s$, gdzie x to średnia próby losowej (the mean of the sample), a s to odchylenie standardowe tej próby (the standard deviation of the sample). Współcześnie do zdefiniowania rozkładu Studenta używa się zmiennej losowej t o postaci [1]:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s(\bar{x})}\,. \tag{8}$$

W powyższym wzorze zmienna $\bar{x}$ centrowana jest wartością oczekiwaną μ populacji o rozkładzie normalnym (z której losowana jest próba o liczności n) i standaryzowana odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej $s(\bar{x})$.

Można dodać, że praca Gosseta powstała dzięki merytorycznemu wsparciu ze strony Pearsona, twórcy statystyki matematycznej, któremu wdzięczne słowa uznania wyraża autor w ostatnich zdaniach publikacji. Jako ciekawostkę można też podać, iż do użycia pseudonimu przy podpisywaniu pracy [6] Gosset został zmuszony decyzją zarządu firmy Guinness, w której był zatrudniony. Zarząd tej firmy bowiem rekomendował dwie nazwy dla autora „Pupil” lub „Student”. Gosset wybrał tę drugą, gdyż zapewne czuł się studentem doskonaląc swoje umiejętności matematyczne w szkole Pearsona. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule [7].

5. Uogólnienie Welcha i Satterthwaitea

Ogólniejsze zastosowanie rozkładu Studenta, niż tylko w odniesieniu do pojedynczej zmiennej losowej, zaproponowali w swoich publikacjach Welch [8] i Satterthwaite [9]. Obaj, niezależnie, rozważali problem rozkładu dla zmiennej losowej będącej sumą wielu zmiennych losowych, z których każda opisywana jest jej własnym rozkładem Studenta o określonej liczbie stopni swobody. Wykorzystali fakt, iż wariancja V wariancji eksperymentalnej s^2 (kwadrat odchylenia standardowego eksperymentalnego) jest proporcjonalna do ilorazu:

$$V(s^2)\propto\frac{\sigma^4}{\nu}\,, \tag{9}$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym populacji o rozkładzie normalnym, a ν liczbą stopni swobody. Korzystając z prawa propagacji niepewności w postaci:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)\,, \tag{10}$$

można łatwo wykazać, zastępując σ złożoną niepewnością standardową $u_c(y)$, że:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}\,. \tag{11}$$

Stąd już prosta droga do wzoru zalecanego przez Przewodnik [1] do wyznaczania wypadkowej liczby stopni swobody:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}\,. \tag{12}$$

Zatem ze zmienną losową, będącą sumą zmiennych losowych, z których każda opisana jest rozkładem Studenta o określonej liczbie stopni swobody ν_i można, w przybliżeniu, związać również rozkład Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody ν_{eff}, obliczanej na podstawie wzoru (12). Satterthwaite w publikacji [9] stwierdza, że przybliżenie rozkładem Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody generuje kilkuprocentowy błąd obliczeniowy. Przybliżenie powyższe w swojej pracy, formułującej teorię niepewności pomiaru, przywołuje Dietrich [10].

6. Teoria niepewności Dietricha

Praca Dietricha jest jednym z podstawowych dzieł źródłowych, na które powołują się autorzy Przewodnika [1]. Autor książki [10] w rozdziale poświęconym ogólnej teorii niepewności przedstawia następujące założenia:
- niepewność wyniku pomiaru wywołana jest sumą oddziaływań przypadkowego i systematycznych na wielkość mierzoną, z których każde można opisać przy użyciu rozkładu prawdopodobieństwa,
- sumowanie oddziaływań odbywa się na drodze operacji splotu matematycznego rozkładów przypisanych tym oddziaływaniom,
- oddziaływaniu przypadkowemu przypisuje się rozkład Studenta,
- oddziaływaniu systematycznemu przypisuje się rozkład prostokątny,
- w analizie niepewności uwzględnia się jedno oddziaływanie przypadkowe i $m \geq 1$ oddziaływań systematycznych.

Problemem pozostaje zagadnienie obliczenia splotu wielu składowych o przyjętych rozkładach prawdopodobieństwa. Autor stwierdza, że czynność jest zbyt czasochłonna i proponuje zastosowanie rozwiązania przybliżonego w postaci wzoru na niepewność rozszerzoną:

$$U = \sqrt{t^2 \frac{s^2}{n} + k^2 \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i^2}{3}}\,, \tag{13}$$

gdzie: s – odchylenie standardowe eksperymentalne, t – kwantyl rozkładu Studenta o liczbie stopni swobody $\nu = n-1$, n – liczba obserwacji, k – kwantyl rozkładu prostokątnego, a_i – szerokość połówkowa rozkładu prostokątnego związana i-tym oddziaływaniem systematycznym. Zależność (13), jak stwierdza autor, nie pozwala na dokładne wyznaczenie niepewności obliczanej na podstawie splotu rozkładu Studenta z wieloma rozkładami prostokątnymi. Zaleca w związku z tym przybliżone rozwiązanie wynikające z zastosowania wzoru Welcha-Satterthwaitea (12). Wzór ten pozwala na obliczanie wypadkowej liczby stopni swobody, a po przekształceniach można go przedstawić w następującej postaci:

$$\nu_{\text{eff}} = \left[1 + \frac{n}{s^2} \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i^2}{3}\right]^2 (n-1)\,. \tag{14}$$

Na podstawie obliczonej wypadkowej liczby swobody wyznacza się kwantyl t_{eff} rozkładu Studenta. Zgodnie z zaleceniami Przewodnika [1] jeżeli wartość wypadkowej liczby stopni swobody nie jest liczbą całkowitą, to jako ν_{eff} należy przyjąć liczbę całkowitą najbliższą wartości obliczonej i od niej mniejszą. Wzór na niepewność rozszerzoną wówczas ma postać:

$$U = t_{\text{eff}} \sqrt{\frac{s^2}{n} + \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i^2}{3}}\,. \tag{15}$$

7. Krajowe nawiązanie do teorii niepewności

W literaturze krajowej prekursorem zbliżonego podejścia do przedstawionej teorii niepewności pomiaru jest profesor Trzetrzewiński. Na kartach swojego opracowania [11] postuluje probabilistyczne traktowanie błędu (uchybu) przypadkowego i systematycznego. Do opisu błędu przypadkowego używa funkcji Gaussa, nazywając ją normalną funkcją rozdzielczą. Przy małej liczbie obserwacji proponuje zastosowanie zmiennej losowej t-Studenta, jako ostrożniejszej oceny błędu przypadkowego. Do opisu błędu (uchybu) systematycznego proponuje zastosowanie rozkładu równomiernego, w myśl zasady, że każda jego wartość z określonego przedziału jest jednakowo prawdopodobna. Podobnie jak Przewodnik [1] do oceny rozdzielczości, nazywanej uchybem czułości, proponuje też jednostajny rozkład prawdopodobieństwa. Generalnie zaleca stosowanie tego rozkładu przy ocenie uchybów na podstawie ich wartości granicznych.

8. Podsumowanie

Współcześnie wyrażana teoria niepewności pomiaru czerpie bogato z dorobku historycznego w dziedzinie opracowania danych pomiarowych. Jej podstawą jest przyjęcie założenia o normalności rozkładu dla danych wywodzących się z pomiaru wykonywanego w warunkach powtarzalności. Dlatego można zastosować rozkład Studenta przy ocenie wyniku wywodzącego się z ograniczonej liczebnie serii obserwacji. To podejście dotyczy metody typu A oceny niepewności pomiaru. Jednakże metoda ta nie jest ostateczną i wymaga również przy analizie danych zastosowania oceny metodą typu B, opartej na wiedzy wcześniejszej o samym pomiarze. Sama teoria niepewności pozwala na łączenie tych informacji poprzez odpowiedni model pomiaru. Ponieważ dla obu ocen tworzone są rozkłady prawdopodobieństwa, łączenie tych informacji odbywa się na drodze propagacji tych rozkładów [2]. W ten sposób powstaje rozkład wynikowy opisujący wielkość mierzoną. Parametry tego rozkładu wyrażają wynik pomiaru.

Można pokusić się o stwierdzenie, że teoria niepewności pomiaru to historycznie ukształtowana teoria probabilistycznego opracowania informacji płynącej bezpośrednio z danych pomiarowych, jak i wiedzy o pomiarze.

9. Literatura

[1] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. International Organization for Standardization, 1995.

[2] Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. BIPM JCGM 101:2008.

[3] Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents. BIPM JCGM 104:2009.

[4] Stigler S. M.: The history of statistics. The measurement of uncertainty before 1900. The Belknap Press of Harvard University Press. Ninth printing, 2003.

[5] Airy G. B.: On the algebraic and numerical theory of errors of observations and the combination of observations. London, Macmillan and co. 1875 (second edition).

[6] Student: The probable error of a mean. Biometrika, vol. 6 (1908), s. 1-25.

[7] Box J. F.: Guinness, Gosset, Fisher, and small samples. Statistical Science, vol. 2 (1987), s. 45-52.

[8] Welch B. L.: The generalization of Student's problem when several different population variances are involved. Biometrika, vol. 34 (1947), s. 28-35.

[9] Satterthwaite F. E.: An approximate distribution of estimates of variance components. Biometrics Bulletin, vol. 2 (1946), s. 110-114.

[10] Dietrich C. F.: Uncertainty, calibration and probability. The statistics of scientific and industrial measurement. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology. Second edition 1991.

[11] Trzetrzewiński S.: Dokładność pomiarów elektrycznych. Materiały na sesję naukową organizowaną przez Politechnikę Wrocławską, 1952, s. 15-37.

otrzymano / received: 27.02.2013
przyjęto do druku / accepted: 01.04.2013 *artykuł recenzowany / revised paper*