

Article citation info:

Lozia Z. Is the representation of transient states of tyres a matter of practical importance in the simulations of vehicle motion? The Archives of Automotive Engineering – Archiwum Motoryzacji. 2017; 77(3): 63-84, <http://dx.doi.org/10.14669/AM.VOL77.ART5>

Czy opis stanów nieustalonych ogumienia w symulacji ruchu pojazdów ma znaczenie praktyczne?

Zbigniew Lozia¹
Politechnika Warszawska

Streszczenie

Niewiele jest prac, w których uwzględnia się opis stanów nieustalonych ogumienia w badaniach symulacyjnych ruchu całego pojazdu. Większość osób budujących modele dynamiki samochodów pomija ten opis, uznając, że dotyczy zjawisk mało istotnych z jakościowego i ilościowego punktu widzenia, zwłaszcza wtedy, gdy pomijane są drgania samowzbudne kół ogumionych.

Celem niniejszej publikacji jest przedstawienie symulacji ruchu samochodu w sytuacji, która jest spotykana w trakcie treningów kierowców w Ośrodku Doskonalenia Techniki Jazdy. Autor udowadnia, że uwzględnienie opisu stanów nieustalonych siły bocznej i momentu stabilizującego ogumienia w bardzo istotny sposób wpływa na wyniki przeprowadzonych obliczeń. Wynika to z postaci wymuszenia, którego stałe czasowe są porównywalne z czasem nabiegania ogumienia badanego pojazdu. Autor przedstawia wyniki ilościowo w formie tabeli oraz jakościowo w postaci przebiegów czasowych wybranych wielkości. Wskazują one na istotne różnice między efektami zaburzenia ruchu prostoliniowego samochodu osobowego, dla przypadku nieuwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, odniesionymi do wyników otrzymanych dla przypadku uwzględniania stanów nieustalonych ogumienia. Największe różnice modułów w trakcie pierwszej sekundy od wystąpienia zaburzenia ruchu kół osi tylnej, dotyczą kąta odchylenia (kąta kierunkowego), przemieszczenia poprzecznego środka masy pojazdu oraz momentu na kole kierownicy. Są one na tyle istotne (od 19% do 26%), że zmieniają jakościowo i ilościowo ocenę zachowania pojazdu. Wskazują, zatem, na duży wpływ opisu stanów nieustalonych sił bocznych i momentów stabilizujących kół jezdnych na wyniki symulowanego testu.

Słowa kluczowe: koło ogumione, boczne znoszenie, stan nieustalony, relaksacja, symulacja

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, e-mail: lozia@wt.pw.edu.pl.

1. Wprowadzenie

Stany nieustalone współpracy koła ogumionego z nawierzchnią drogi są w rzeczywistych pojazdach elementem ich własności kinematycznych i dynamicznych. Występują zawsze wtedy, gdy następuje szybka zmiana kąta bocznego znoszenia, poślizgu obwodowego, reakcji normalnej drogi lub kąta pochylenia koła. Wpływ stanów nieustalonych współpracy koła ogumionego z nawierzchnią drogi był opisywany w pracach [6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Stany te są one istotnym elementem w analizie drgań samowzbudnych kół samolotów [27], w kierowanych kołach samochodów [6] oraz przede wszystkim motocykli [18, 24, 25, 28].

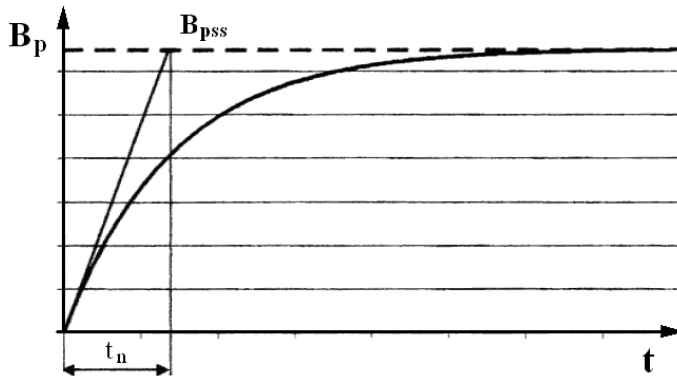
Większość osób budujących modele symulacyjne ruchu, dynamiki pojazdów samochodowych, pomija opis tych zjawisk, uznając je za mało istotne z jakościowego i ilościowego punktu widzenia, zwłaszcza wtedy, gdy pomijane są zjawiska drgań samowzbudnych kół ogumionych. Do wyjątków należą prace, w których uwzględnia się opis stanów nieustalonych ogumienia [7, 13, 15, 18, 21, 22] w badaniach ruchu całego pojazdu. Zaprezentowane wyniki wskazują przede wszystkim na znaczenie jakościowe tych zjawisk, przy mniej istotnej roli znaczenia ilościowego (np. [7]).

Celem niniejszej publikacji jest przedstawienie symulacji ruchu samochodu w sytuacji odpowiadającej warunkom rzeczywistym, w których rola stanów nieustalonych bocznego znoszenia kół jezdnych ma znaczenie zarówno jakościowe, jak i ilościowe.

2. Stany nieustalone współpracy koła ogumionego z nawierzchnią drogi

Szybkie zmiany kąta skrętu koła jezdnego, momentu hamowania (działanie ABS, ASR - TCS) oraz nierówności nawierzchni drogi (wpływających na wartość reakcji normalnej nawierzchni), są przyczyną zmian następujących wielkości opisujących stan współpracy koła z podłożem: kąta bocznego znoszenia, poślizgu obwodowego, reakcji normalnej drogi, kąta pochylenia koła. Tak powstały “stan nieustalony współpracy koła ogumionego z drogą” charakteryzuje się, innymi niż w stanach ustalonych, wartościami siły bocznej i momentu stabilizującego. Następuje zmniejszenie ich modułów oraz opóźnienie czasowe między “wymuszeniem” (np. kątem bocznego znoszenia) a “odpowiedzią” (siłą boczną, momentem stabilizującym). Ściślej rzecz ujmując, opona musi przebyć pewien dystans (zwany “długością nabiegania” lub “długością relaksacji”), aby osiągnąć stan obciążenia (ogólnie rozumiany, nie chodzi tu jedynie o obciążenie pionowe), odpowiadający stanowi ustalonemu. Rys. 1 przedstawia zmianę siły bocznej B_p koła ogumionego na skokową zmianę kąta bocznego znoszenia δ . Środek koła porusza się z prędkością v . B_{pss} to wartości siły bocznej w stanie ustalonym, odpowiadająca kątowi bocznego znoszenia δ . Parametr t_n (zwany czasem nabiegania) to czas, po którym styczna w punkcie o odciętej $t=0$ do funkcji $B_p(t)$ osiągnie wartość B_{pss} . Iloczyn czasu nabiegania t_n [s] i prędkości v [m/s] to wspomniana “długość nabiegania” lub “długość relaksacji” l_n [m]

$$l_n = t_n \cdot v \quad (1)$$



Rys. 1. Reakcja koła ogumionego na skokową zmianę kąta bocznego znoszenia δ , w postaci zmian siły bocznej B_p w czasie. B_{pss} to siła boczna w stanie ustalonym. t oznacza czas. t_n to czas relaksacji (nabiegania)

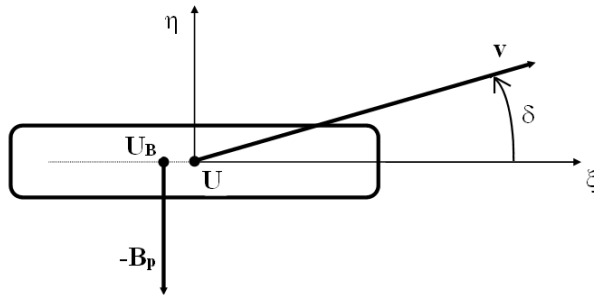
Dla sinusoidalnie zmieniającego się kąta bocznego znoszenia, poślizgu obwodowego, reakcji normalnej drogi lub kąta pochylenia koła, istotna jest amplituda oraz okres tych zmian, a raczej długość fali, co pozwala porównywać parametry wymuszenia (okres, długość fali) z długością nabiegania opony. Na podstawie badań opon [17, 18, 24, 27, 28] stwierdzono, że stany nieustalone opon powinny być uwzględniane, gdy długość relaksacji (nabiegania) opony jest dłuższa od $0,1 \div 0,25$ ($10 \div 25\%$) długości najkrótszej długości fali wymuszenia (konkretna wartość zależy od parametru współpracy koła z drogą). Dotyczy to przede wszystkim wymuszeń o charakterze okresowym, na przykład pochodzących od nierówności nawierzchni drogi lub związanych z drganiami kół kierowanych.

W niniejszej pracy zaprezentowany będzie opis ruchu samochodu, przy uwzględnieniu stanów nieustalonych bocznego znoszenia kół jezdnych, co wywołuje nieustalony stan sił bocznych i momentów stabilizujących ogumienia.

3. Opis nieustalonych wartości siły bocznej i momentu stabilizującego ogumienia

Rys. 2 przedstawia wielkości opisujące współpracę koła ogumionego z poziomą powierzchnią drogi dla przypadku czystego poślizgu bocznego – bocznego znoszenia ogumienia. Punkt U jest rzutem środka koła na powierzchnię drogi. W punkcie U_B jest przyłożona wypadkowa siła boczna opony B_p . Iloczyn siły B_p oraz odległości punktów U_B i U jest momentem stabilizującym opony. $U\xi\eta$ to układ lokalny związany z kołem. Oś $U\xi$ leży w płaszczyźnie koła i w płaszczyźnie drogi. v to rzut prędkości środka koła na powierzchnię drogi równy, dla rozważanego przypadku ruchu, prędkości środka koła i prędkości samochodu. δ to kąt bocznego znoszenia. Na rysunku

wskazano dodatnie zwroty (znaki) wymienionych wielkości.



Rys. 2. Przypadek czystego poślizgu bocznego koła ogumionego (opis oznaczeń w tekście)

Dla przedstawionego schematu oznaczeń wykorzystano równanie różniczkowe zmian siły bocznej według uproszczonej hipotezy v. Schlippe, Dietricha ([27], zaczerpnięto z [17]). Ma ono postać:

$$\dot{B}_p + \frac{k_p}{c_p} \cdot v \cdot B_p = -k_p \cdot v \cdot \delta \quad (2)$$

gdzie k_p to sztywność poprzeczna opony, [N/m]; c_p to współczynnik odporności na boczne znoszenie (“kinematyczna sztywność boczna”), [N/rad].

Hipoteza ta została sformułowana w 1942 r. dla opon lotniczych. W latach dziewięćdziesiątych do opisu stanu nieustalonego siły bocznej wykorzystywane jest także równanie różniczkowe pierwszego rzędu (np. tzw. IPG-Tire [21, 22]) ale o postaci

$$t_n \cdot \dot{B}_p + B_p = B_{pss} \quad (3)$$

gdzie B_{pss} to wartość siły bocznej w stanie ustalonym dla danego stanu kinematycznego współpracy koła z drogą, [N]; t_n to “czas relaksacji” lub “czas nabiegania” opony, [s].

Autorzy prac [21, 22] nie powołują się na pracę [27] lecz łatwo jest wykazać, że równania (3) i (2) odpowiadają sobie dla liniowego zakresu modelu siły bocznej opony. Jeżeli równanie (2) podzielimy obustronnie przez wyrażenie $v \cdot k_p / c_p$ to otrzymamy

$$\frac{c_p}{k_p \cdot v} \cdot \dot{B}_p + B_p = -c_p \cdot \delta \quad (4)$$

Wyrażenie
$$\frac{c_p}{k_p} = l_n \quad (5)$$

jest w pracach [17, 27] nazywane “długością nabiegania” lub “długością relaksacji” opony (ang. “relaxation length”). Jest to ta sama wielkość o której wspomiano przy opisie zależności (1). Jest to droga jaką musi przebyć opona aby osiągnąć ustaloną wartość siły bocznej. Na przykład dla opony 165 R13 D124 $c_p \approx 34000$ N/rad, $k_p \approx 250000$ N/m, $l_n \approx 0,136$ m.

Podzielenie “długości nabiegania” opony l_n przez prędkość v określa “czas nabiegania” opony t_n

$$t_n = \frac{l_n}{v} = \frac{c_p}{k_p \cdot v} \quad (6)$$

Wielkość ta występuje także w pierwszym wyrażeniu równania (3).

Zauważmy, że dla liniowego zakresu modelu siły bocznej opony wyrażenie stojące po prawej stronie równania (4) określa dodatnią (zgodną ze zwrotem osi $U\eta$) wartość siły bocznej B_p w stanie ustalonym B_{pss} . Zwrot ten (znak dodatni siły B_p) odpowiada ujemnej wartości kąta δ .

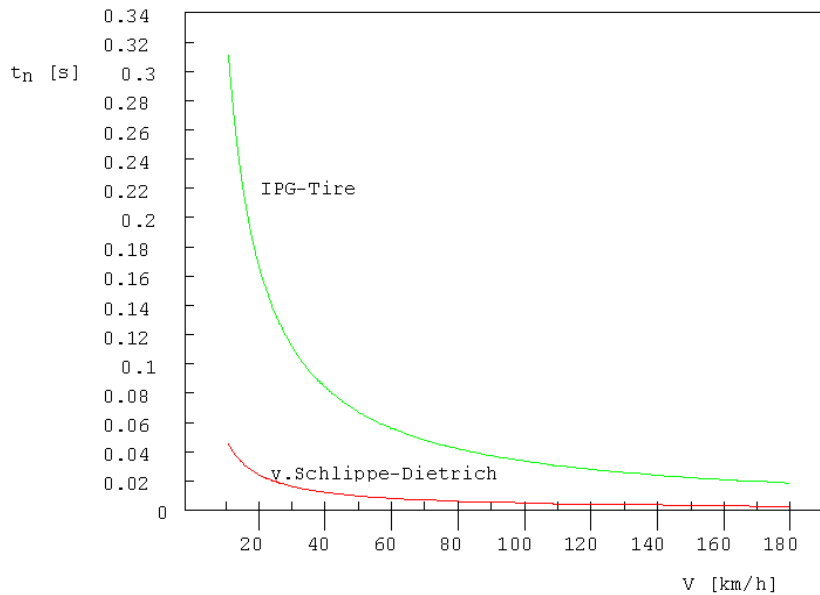
$$B_{pss} = -c_p \cdot \delta \quad (7)$$

Jak widać z powyższego, równanie (3) w pełni odpowiada równaniu (2) (patrz także zależności (4)-(7)). Jest to zatem uproszczone równanie v. Schlippe, Dietricha. Autorzy prac [21, 22] stosują je dla opon samochodowych. Wskazują, że dla tego typu obiektów “długość nabiegania” opony można przybliżyć połową długości obwodu koła

$$l_n = \pi \cdot r \quad (8)$$

gdzie r to promień koła, [m].

Dla opony 165 R13 D124 tak określona wartość wynosi $l_n \approx 0,933$ m, czyli jest około 7 razy dłuższa niż obliczona na podstawie oryginalnej postaci teorii v. Schlippe, Dietricha. Inny jest jednak obiekt analizy. Autorzy prac [21, 22] piszą także o zauważonej zależności l_n od reakcji normalnej drogi N . Wraz ze zmniejszaniem się N maleje “długość nabiegania” opony l_n . Rys. 3 przedstawia wartości “czasu relaksacji” (“czasu nabiegania”) t_n w funkcji prędkości pojazdu $V=3,6 \cdot v$ [km/h], dla dwóch postaci opisu stanu nieustalonego siły bocznej: według uproszczonej hipotezy v. Schlippe, Dietricha [7, 17, 27] oraz według IPG-Tire [7, 21, 22].



Rys. 3. “Czas relaksacji” (“czas nabiegania”) w funkcji prędkości ruchu pojazdu, dla dwóch oszacowań “długości nabiegania”: według uproszczonej hipotezy v. Schlippe, Dietricha [7, 17, 27]) oraz według IPG-Tire [7, 21, 22]. Opona 165 R13 D124

Zależność (4), po uwzględnieniu (5) i (7), przybiera postać

$$\dot{B}_p + \frac{v}{l_n} \cdot B_p = \frac{v}{l_n} \cdot B_{pss} \quad (9)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (9), dla stałej prędkości v i długości nabiegania l_n , ma postać analityczną, wygodną w obliczeniach numerycznych dla przyjętego kroku przyrostu czasu Δt

$$B_p(t) = B_{pss} - [B_{pss} - B_p(t-\Delta t)] \cdot \exp(-v \cdot \Delta t / l_n) \quad (10)$$

W jednym kroku symulacji, stałość prędkości v i długości nabiegania l_n jest do przyjęcia, bez znaczącego wpływu na dokładność obliczeń siły $B_p(t)$.

Dla uwzględnienia (zauważonego w cytowanych publikacjach, np. [19, 25, 26, 11,12, 15]) wpływu obciążenia koła (reakcji normalnej drogi) na aktualną wartość długości nabiegania l_n [m], od 1998 r. autor przyjmuje [6, 7] w swych programach proporcję

$$\frac{l_n}{l_{nn}} = \frac{r_{sw} - r_d}{r_{sw} - r_{dn}} \quad (11)$$

$$l_{nn} = \pi \cdot r_{dn} \quad (12)$$

gdzie r_{dn} [m] to „nominalna” wartość promienia dynamicznego opony, odpowiadająca nominalnemu obciążeniu pionowemu, zaś l_{nn} [m] to nominalna wartość długości nabiegania opony; r_{sw} [m] to promień swobodny opony a r_d [m] to aktualna wartość promienia dynamicznego opony, odpowiadająca aktualnemu obciążeniu pionowemu (reakcji normalnej drogi).

Przyjmując zauważaną w praktyce zależność

$$r_{dn} \approx 0,92 \cdot r_{sw} \quad (13)$$

otrzymujemy po przekształceniach

$$l_n \approx 11,5 \cdot \pi \cdot (r_{sw} - r_d) = 36,128 \cdot (r_{sw} - r_d) \quad (14)$$

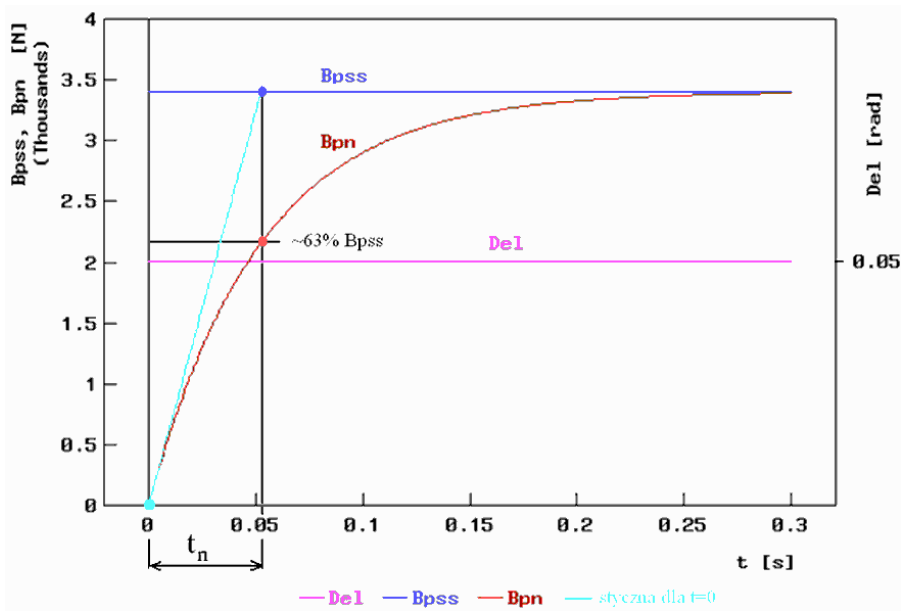
Rys. 4 przedstawia wynik zastosowania modelu IPG-Tire dla opony Michelin 195/65R15. Jest to rozwiązanie równania różniczkowego (9) - zmiany siły bocznej w stanie nieustalonym B_{pn} jako efekt skokowej zmiany kąta bocznego znoszenia o wartości $\delta = \Delta\epsilon = 0,05$ rad. Wykorzystano postać analityczną jednokrokową (10), dla kroku przyrostu czasu $\Delta t = 0,001$ s. Prędkość środka koła wynosiła $V = 50$ km/h = 13,89 m/s = v . Reakcja normalna drogi $Z = 4800$ N, $c_p = 68000$ N/rad, promień swobodny opony $r_{sw} = 0,316$ m, promień dynamiczny $r_d = 0,296$ m. Czas nabiegania t_n ma interpretację fizyczną jako czas, po którym styczna do wykresu $B_p(t)$ według zależności (10) (tu oznaczanego jako $B_{pn}(t)$) osiąga wartość B_{pss} , czyli wartość siły bocznej w stanie ustalonym. Siła B_{pn} jest wtedy równa około 63% B_{pss} .

Rys. 5 przedstawia przebieg czasowy siły bocznej w stanie nieustalonym B_{pn} jako efekt trzech skokowych zmian kąta bocznego znoszenia o wartości $\delta = \Delta\epsilon = \pm 0,05$ rad dla opony Michelin 195/65R15. Opis parametrów testu jest analogiczny jak w przypadku rys. 4. Widoczne jest wyraźne opóźnienie siły bocznej B_{pn} w stosunku do kąta bocznego znoszenia $\delta = \Delta\epsilon$. Po zaniku kąta bocznego znoszenia (dla $t > 0,45$ s) siła boczna B_{pn} ma widoczną wartość niezerową przez ponad 0,3 s. Opisane zjawisko nie zachodzi w przypadku siły bocznej B_{pss} , której opis nie uwzględnia stanu nieustalonego.

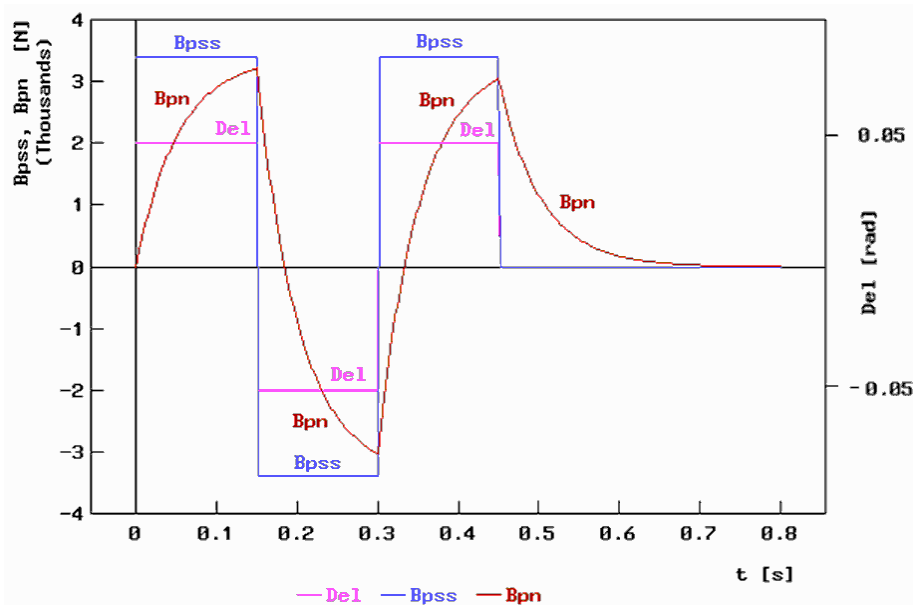
Rezultatem stanu nieustalonego siły bocznej jest także nieustalona wartość momentu stabilizującego. Jest efektem nierównomiernego rozkładu siły bocznej w strefie kontaktu. Wypadkowa siła boczna jest przesunięta do tyłu o odcinek UU_B względem środka śladu U (rys. 2).

Nawiązując do wniosku przedstawionego w punkcie 2, należy stwierdzić, że przy ograniczeniu rozważań jedynie do stanów nieustalonych siły bocznej i momentu stabilizującego, wywołanych szybką zmianą kąta bocznego znoszenia, ciągle istotne

są relacje parametrów zmian wymuszenia i “długości nabiegania” opony. Autorzy pracy [28] piszą, że jeżeli długość fali zmian kąta bocznego znoszenia δ jest tego samego rzędu lub krótsza od “długości nabiegania” opony l_n , to wtedy stany nieustalone mają duży wpływ na siłę boczną. Dla długości fal zmian δ większych $8\div 10$ razy od l_n można przyjmować quasistatyczne charakterystyki ogumienia.



Rys. 4. Model IPG-Tire. Przebieg czasowy siły bocznej w stanie nieustalonym B_{pn} jako efekt skokowej zmiany kąta bocznego znoszenia o wartości $Del=0,05$ rad. B_{pss} to wartość siły bocznej w stanie ustalonym. Reakcja normalna drogi $Z=4800$ N. Prędkość środka koła $V=50$ km/h= $13,89$ m/s = v , krok przyrostu czasu $\Delta t=0,001$ s, długość nabiegania $l_n=0,723$ m, czas nabiegania $t_n=l_n/v=0,052$ s. Opona Michelin 195/65R15



Rys. 5. Model IPG-Tire. Przebieg czasowy siły bocznej w stanie nieustalonym B_{pn} jako efekt trzech skokowych zmian kąta boczego znośnienia o wartości $Del = \pm 0,05$ rad. B_{pss} to wartość siły bocznej w stanie ustalonym. Reakcja normalna drogi $Z = 4800$ N. Prędkość środka koła $V = 50$ km/h = $13,89$ m/s = v , krok przyrostu czasu $\Delta t = 0,001$ s, długość nabiegania $l_n = 0,723$ m, czas nabiegania $t_n = l_n/v = 0,052$ s. Opona Michelin 195/65R15

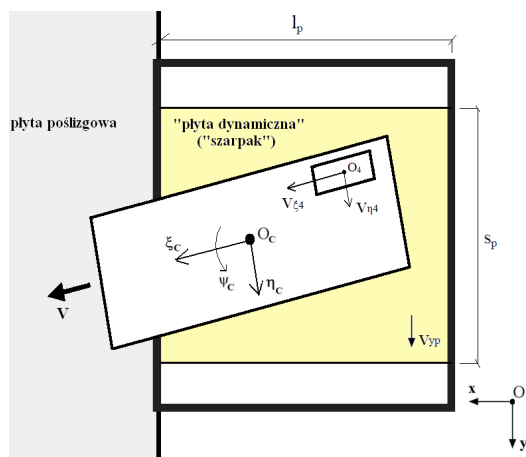
4. Symulowany test ruchu pojazdu, w którym ujawnia się istotne znaczenie stanów nieustalonych siły bocznej i momentu stabilizującego ogumienia

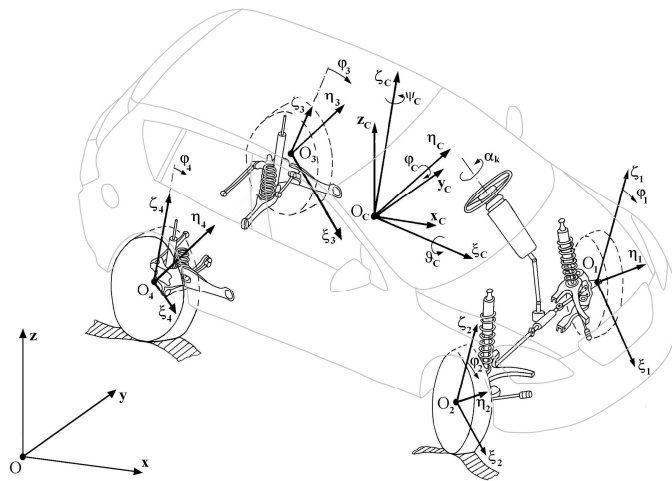
Wykorzystano doświadczenie autora w symulacji testów wykonywanych w ośrodkach doskonalenia techniki jazdy (ODTJ), w trakcie zaburzania ruchu pojazdu przed wjazdem na płytę poślizgową – płytę o obniżonej przyczepności [9, 10]. Przed wjazdem na tę płytę zaburza się ruch samochodu za pomocą „płyty dynamicznej” (rys. 6). Stanowi ona obowiązkowe wyposażenie wspomnianych ośrodków, co określono w Rozporządzeniu Ministra Transportu, Budownictwa i Gospodarki Morskiej z dnia 16 stycznia 2013r. w sprawie doskonalenia techniki jazdy [20]. Realizacja praktyczna polega najczęściej na wywołaniu ruchu poprzecznego płyty (w stosunku do toru ruchu pojazdu) w chwili, gdy koła przednie zjeżdżają z „płyty dynamicznej” a poruszają się po niej jeszcze koła tylne. Zaburzenie wywołane ruchem płyty zmusza kierowcę do wykonania manewrów obronnych.



Rys. 6. „Płyta poślizgowa prostokątna” (obszar o jasnym kolorze) wraz z „płytą dynamiczną” (czarny czworokąt) produkcji krajowej – firmy UNIMETAL ze Złotowa [29]

Rys. 7 przedstawia rzut zarysu samochodu na tle „płyty dynamicznej” [9, 10] oraz model fizyczny samochodu osobowego wraz z przyjętymi układami współrzędnych [8, 9]. Część ruchoma płyty ma długość l_p [m] i szerokość s_p [m]. Rysunki te wykorzystano je jako podstawę modyfikacji modelu i programu symulacyjnego ruchu pojazdu na torze, na którym prowadzone są testy badanych kierowców [8, 9, 10].





Rys. 7. Rzut zarysu samochodu na tle „płyty dynamicznej” (zaznaczono dodatnie zwroty obrazowanych wielkości) [9, 10] oraz model fizyczny samochodu osobowego (dwuosioowego z niezależnym zawieszeniem przednim i tylnym) wraz z przyjętymi układami współrzędnych [8, 9]

Model dwuosioowego samochodu osobowego przedstawiony na rys. 7 składa się z dziewięciu elementów masowych: bryły nadwozia (traktowanej jako bryła sztywna), czterech punktów materialnych O_1 , O_2 , O_3 i O_4 , w których skupiono tzw. „masy nieresorowane” pojazdu (w tym koła jezdne w ruchu postępowym) i czterech wirujących kół jezdnych (wyłącznie ruch obrotowy) [6, 8].

Przyjęto następujące układy współrzędnych [4, 5, 6, 8, 9, 10, 16]:

- $O_c x_c y_c z_c$ - układ inercjalny, związany z drogą; osie O_x i O_y są poziome, pionowa oś O_z jest skierowana do góry;
- $O_c x_c y_c z_c$ - układ nieinercjalny o osiach równoległych odpowiednio do osi O_x , O_y i O_z oraz początku w środku masy bryły nadwozia O_c ;
- układy sztywno związane z bryłami sztywnymi modelu: bryłą nadwozia ($O_c \xi_c \eta_c \zeta_c$) i czterema kołami jezdными ($O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $O_2 \xi_2 \eta_2 \zeta_2$, $O_3 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$, $O_4 \xi_4 \eta_4 \zeta_4$);
- układy pomocnicze, ułatwiające określenie macierzy transformacyjnych.

Do opisu ruchu postępowego bryły i punktów materialnych modelu wykorzystywane jest położenie środków mas wymienionych brył (O_c , O_1 , O_2 , O_3 , O_4). Osie $O_i \xi_i$, $O_i \eta_i$, $O_i \zeta_i$ ($i = C, 1, 2, 3, 4$) są traktowane jako główne centralne osie bezwładności odpowiednich brył sztywnych. Ruch kulisty bryły nadwozia względem bieguna O_c opisano, wykorzystując „kąty samolotowe”, zwane też „quasi-eulerowskimi” [4, 5, 6, 8, 9, 10, 16]. Osie kolejnych obrotów są traktowane jako główne centralne osie bezwładności bryły nadwozia.

Wprowadzono rzeczywistą charakterystykę kątów skrętu kół jako funkcję kąta obrotu kierownicy α_k dla układu nieobciążonego. Uwzględniono podatność układu

kierowniczego. Dodatkowo kąty skrętu kół są funkcjami momentów stabilizujących oraz podatności skrętnej kolumny kierowniczej wraz z przekładnią oraz podatności lewej i prawej strony układu zwrotniczego [6, 8, 9, 10]. W opisie sił kontaktowych wykorzystano model HSRI-UMTRI [2, 3] uzupełniony o opis momentu stabilizującego oraz model stanów nieustalonych ogumienia IPG-Tire [21, 22]. Siły powstające w kontakcie koło-droga są także efektem modelowania własności sprężystych koła ogumionego [6, 8, 9, 10].

Równania ruchu wyprowadzono wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju (np. [4, 5]). Wcześniej przyjęto 14 następujących współrzędnych uogólnionych:

$q_1=x_{OC}$, $q_2=y_{OC}$, $q_3=z_{OC}$ - współrzędne określające położenie środka O_C masy bryły nadwozia w inercjalnym układzie odniesienia $Oxyz$;

$q_4=\psi_C$, $q_5=\varphi_C$, $q_6=\vartheta_C$ - współrzędne opisujące ruch kulisty bryły nadwozia względem jej środka masy O_C ; są to kąty quasi-eulerowskie (samolotowe) - kąt odchylenia, przechyłu wzdłużnego i boczno;

$q_7=\zeta_{CO1}$, $q_8=\zeta_{CO2}$, $q_9=\zeta_{CO3}$, $q_{10}=\zeta_{CO4}$ - współrzędne opisujące ruch punktów O_1 , O_2 , O_3 , O_4 względem bryły nadwozia w kierunku $O_C\zeta_C$ układu $O_C\zeta_C\eta_C\zeta_C$; do tych punktów zredukowane są "masy nieresorowane" zawieszania;

$q_{11}=\varphi_1$, $q_{12}=\varphi_2$, $q_{13}=\varphi_3$, $q_{14}=\varphi_4$ - kąty obrotu kół jezdnych (odpowiednio: przedniego lewego i prawego, tylnego lewego i prawego).

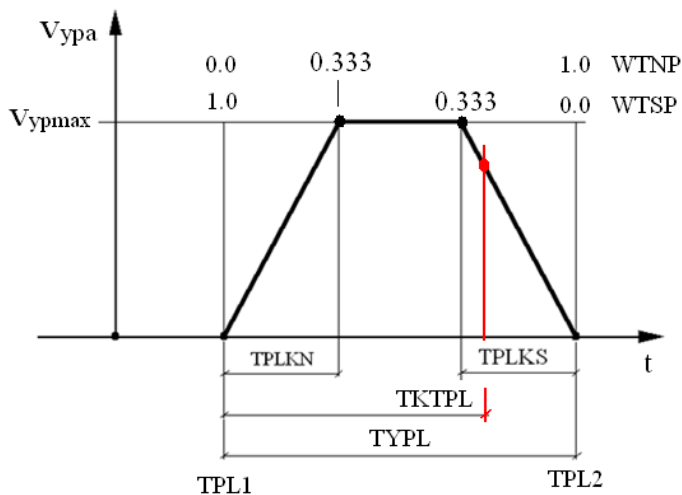
Bardziej szczegółowy opis rodzinny modeli ruchu i dynamiki pojazdów dwuosiowych oraz opis współpracy koła ogumionego z nawierzchnią drogi można znaleźć w pozycjach literaturowych [6, 7, 8, 9, 10] autora niniejszej pracy.

Dane pojazdu odpowiadają samochodowi Kia Cee'd w stanie gotowości do jazdy, obciążonemu kierowcą i instruktorem jazdy. Pojazd ma napęd zblokowany przedni. Masa całkowita wynosiła 1570 kg, rozstaw osi $l=2,655$ m, odległość środka masy od osi przedniej $l_1=0,976$ m, od osi tylnej $l_2=1,679$ m, statyczna wysokość środka masy resorowanej $z_{OC}=0,516$ m, statyczna wysokość środka masy pojazdu 0,501 m. Samochód porusza się z prędkością $V=50\text{km/h}=13,89\text{ m/s}=v$.

Dane „płyty dynamicznej” (rys. 6) odpowiadają prototypowemu, zmodernizowanemu w 2016 roku stanowisku polskiego producenta UNIMETAL [29]. Długość płyty $l_p=3,0$ m, szerokość $s_p=2,7$ m, ekstremalne przemieszczenie poprzeczne płyty $s_{yp}=0,3$ m. Maksymalna prędkość przesuwu płyty wynosiła $v_{yp\max}=1,5$ m/s a maksymalne przyspieszenie płyty $[d(v_{yp})/dt]_{\max}=15\text{ m/s}^2$. Płyta pokryta jest materiałem o maksymalnej wartości współczynnika przyczepności równego 0,8. Autor interpretuje ją jako wartość współczynnika przyczepności dla prędkości poślizgu bliskiej zeru. Dla płyty poślizgowej przyjęto maksymalną wartość współczynnika przyczepności równą 0,5. Założono, że nawierzchnie drogi i płyty stanowiska testowego są poziome, równe.

Rys. 8 przedstawia przyjętą postać chwilowej (aktualnej) prędkości płyty dynamicznej v_{ypa} [m/s] jako funkcji czasu t . TPL1 [s] to chwila, w której płyta rusza z miejsca. TPL2 [s] to chwila, w której płyta zatrzymuje się. TYPL [s] to całkowity

czas, w którym płyta przemieszcza się poprzecznie. TPLKN [s] to czas, w którym prędkość poprzeczna płyty wzrasta od zera do wartości stałej v_{ypmax} [m/s]. TPLKS [s] to czas, w którym prędkość poprzeczna płyty spada od wartości stałej v_{ypmax} [m/s] do zera. TKTPL [s] to czas przebywania kół tylnych na płycie dynamicznej, dla ruchu prostoliniowego wzdłuż płaszczyzny symetrii płyty.



Rys. 8. Przyjęta postać aktualnej prędkości płyty dynamicznej v_{ypa} jako funkcji czasu t , dla stałych wartości parametru $WTNP=TPLKN/TYPL$ i $WTSP=TPLKS/TYPL$ oraz stałej wartości czasu $TYPL$. TKTPL to czas przebywania kół tylnych na płycie dynamicznej

Przedstawione parametry ruchu płyty mogą być obliczone w podany poniżej sposób (patrz też rys. 8). Czas przebywania kół tylnych na płycie dynamicznej, dla ruchu prostoliniowego wzdłuż płaszczyzny symetrii płyty

$$TKTPL=l_p/v=3,0\text{ m}/13,89\text{ m/s}=0,216\text{ s} \quad (15)$$

Czas narastania i spadku prędkości poprzecznej płyty dynamicznej

$$TPLKN=TPLKS=v_{ypmax}/[d(v_{yp})/dt]_{max}=1,5\text{ m/s}/15\text{ m/s}^2=0,1\text{ s} \quad (16)$$

Całkowity czas poprzecznego przemieszczania się płyty dynamicznej

$$TYPL=s_{yp}/v_{ypmax}+0,5\cdot(TPLKN+TPLKS)=0,3\text{ m}/1,5\text{ m/s}+0,5\cdot(0,1\text{ s}+0,1\text{ s})=0,3\text{ s} \quad (17)$$

Wartości bezwymiarowych współczynników określających przedziały narastania i spadku prędkości poprzecznej płyty v_{ypa} [m/s]:

$$WTNP=TPLKN/TYPL=0,1\text{ s}/0,3\text{ s}=0,333 \quad (18)$$

$$WTSP=TPLKS/TYPL=0,1 \text{ s}/0,3 \text{ s}=0,333 \quad (19)$$

5. Wyniki symulacji w postaci przebiegów czasowych wybranych wielkości

Kierowca odczuwa zaburzenie ruchu pojazdu przede wszystkim poprzez następujące wielkości:

- przyspieszenie poprzeczne pojazdu $a_{\eta h}$ (na rysunkach: $a_{\eta h}$) i prędkość kątową odchylenia $d\psi_C/dt$ (na rysunkach: ψ_C); określają one siłę bezwładności działającą na ciało kierowcy, odbieraną układem równowagi ucha wewnętrznego i receptorami czuciowymi kończyn i tułowia;
- przemieszczenie poprzeczne środka masy pojazdu y_{OC} (na rysunkach: y_{OC}) i kąt odchylenia ψ_C (kąt kierunkowy; na rysunkach: ψ_C) odbierane wzrokiem;
- moment na kole kierownicy EMK odbierany przez ręce (ściślej: receptory czuciowe kończyn górnych).

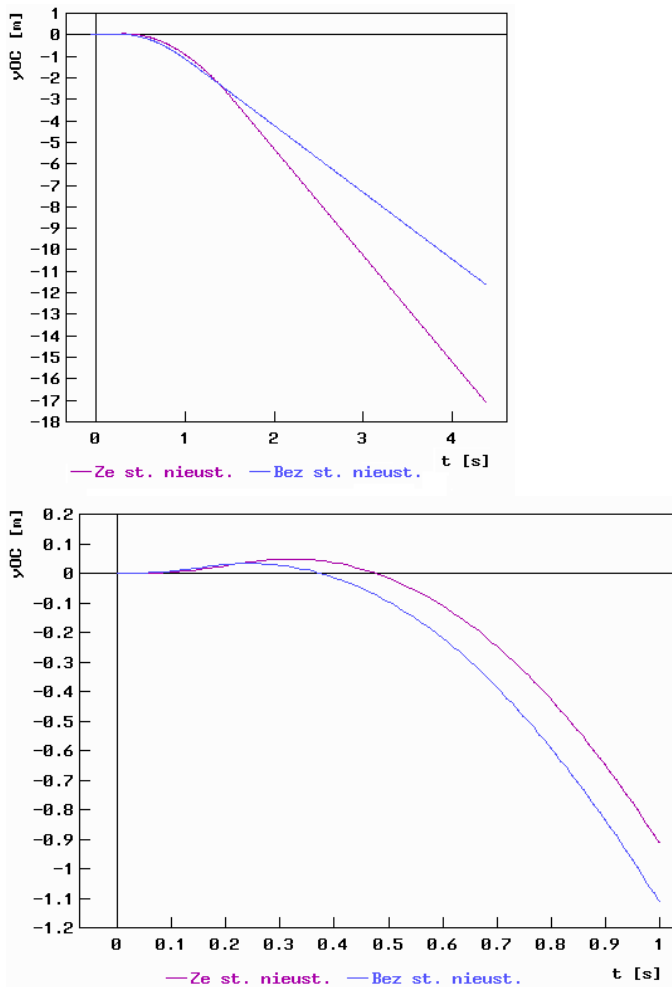
To przebiegi czasowe i ekstrema tych wielkości mają decydujący wpływ na reakcje kierującego pojazdem. Ponadto, z punktu widzenia dynamiki pojazdów, istotne są przebiegi czasowe kątów bocznego znoszenia $\delta(i)$ (na rysunkach: $\Delta(i)$) i sił bocznych (na rysunkach: $B_p(i)$) na i -tym kole jezdnym. Jako czas $t=0$ przyjęto początek przemieszczania się płyty dynamicznej.

W ocenie wyników symulacji uwzględniano przede wszystkim wartości analizowanych wielkości w trakcie pierwszej sekundy od wystąpienia zaburzenia. Przyjęto bowiem, że w typowym czasie reakcji kierowcy równym 1s [1] nie może on wykonać żadnych czynności (działań na elementach sterowania pojazdem), które mogłyby zmienić stan ruchu pojazdu. Dopiero w kolejnych sekundach jego reakcje wpływają na ruch pojazdu (czego nie przedstawiają wykonane testy symulacyjne), co jest podstawą oceny kierującego w przeprowadzanych badaniach, szkoleniach.

Rys. 9 przedstawia przemieszczenie poprzeczne środka masy pojazdu y_{OC} w funkcji czasu, otrzymane dla przypadku modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. Widoczne są duże różnice jakościowe i ilościowe otrzymanych wyników. Przesunięcie poprzeczne pojazdu na koniec testu różni się o ponad 5 m.

a)

b)



Rys. 9. Przeszczenie poprzeczne őrodka masy pojazdu w funkcji czasu. Dwuosioowy samochod osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$. a) Pełny zakres symulowanych przebiegów. b) Fragment jednosekundowy

Na rys. 10 zaprezentowano porównanie wyników dla kąta odchylenia pojazdu. Uwzględnienie stanów nieustalonych ogumienia prowadzi do bardzo dużych różnic położenia kąowego pojazdu już od pierwszej sekundy po wystąpieniu zaburzenia ruchu.

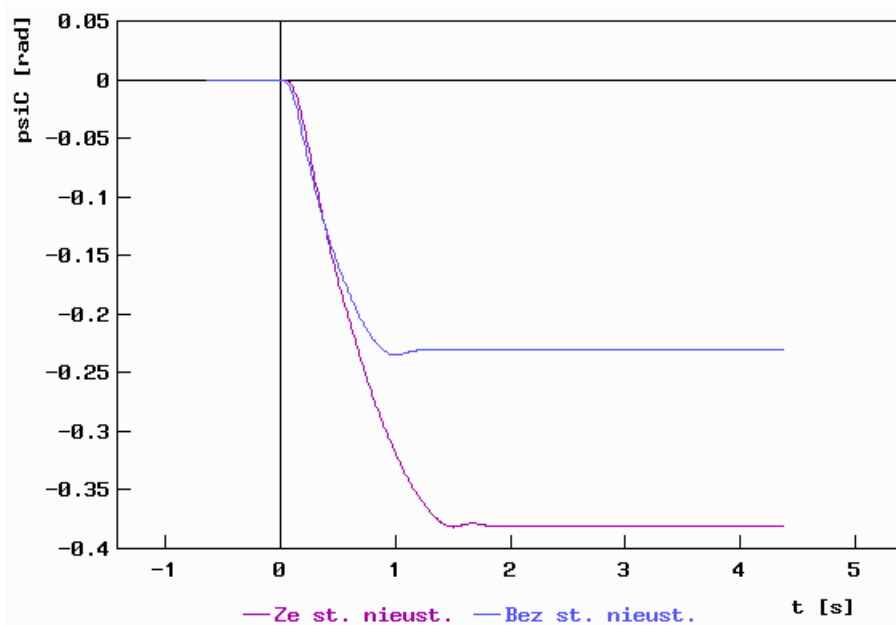
Na rys. 11 przedstawiono prędkość kątową odchylenia pojazdu w funkcji czasu. Zaprezentowane tu wykresy są konsekwencją wyników widocznych na poprzednim

rysunku, jako że obrazują pochodną kąta odchylenia. Tu opisywane różnice są także istotne.

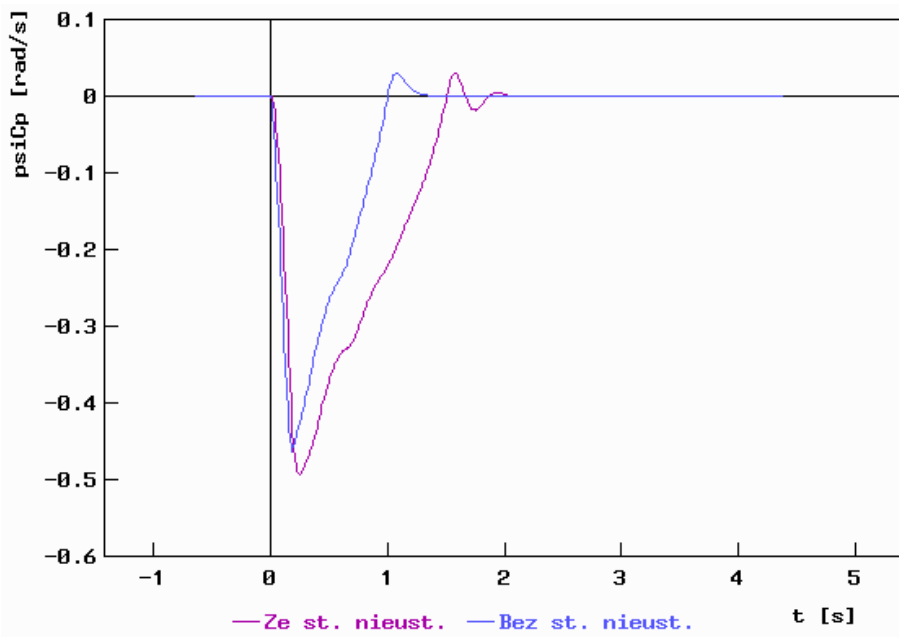
Na rys. 12 zaprezentowano przyspieszenie poprzeczne środka masy w układzie spoziomowanym w funkcji czasu. Wartości ekstremalne są zbliżone. Zwraca uwagę przesunięcie w czasie oraz długi okres niezerowych wartości przyspieszenia dla modelu uwzględniającego stany nieustalone ogumienia.

Rys. 13 przedstawia siły boczne kół osi przedniej jako funkcje czasu, a rys. 14 analogiczne wyniki dla kół osi tylnej. Widoczne są znaczące różnice wyników dla modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. Uwzględnienie ich prowadzi do przebiegów o znacznie dłuższych okresach niezerowych wartości sił bocznych. Są one także głównym powodem postaci wyników na rys. 12.

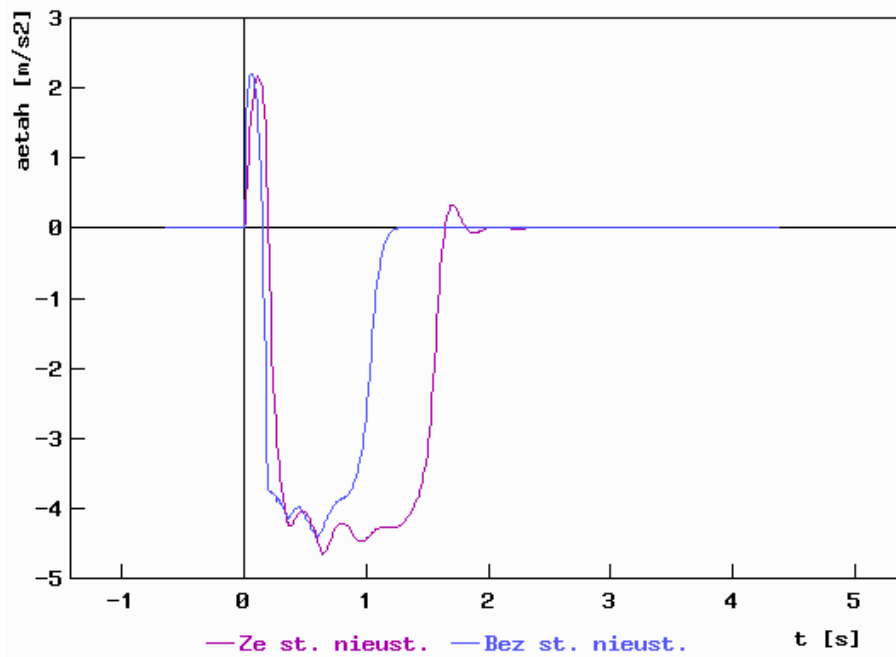
Na rys. 15 i 16 przedstawiono fragmenty jednosekundowe, dla przedziału czasu $\langle 0, 1s \rangle$, przebiegów czasowych sił bocznych kół osi przedniej i tylnej, zaprezentowanych na rys 13 i 14. Powstały w ten sposób efekt rozciągnięcia tych wykresów pozwala wyraźnie dostrzec znaczące opóźnienie w czasie sił generowanych z uwzględnieniem opisu stanów nieustalonych ogumienia, w stosunku do model nie uwzględniających tego opisu.



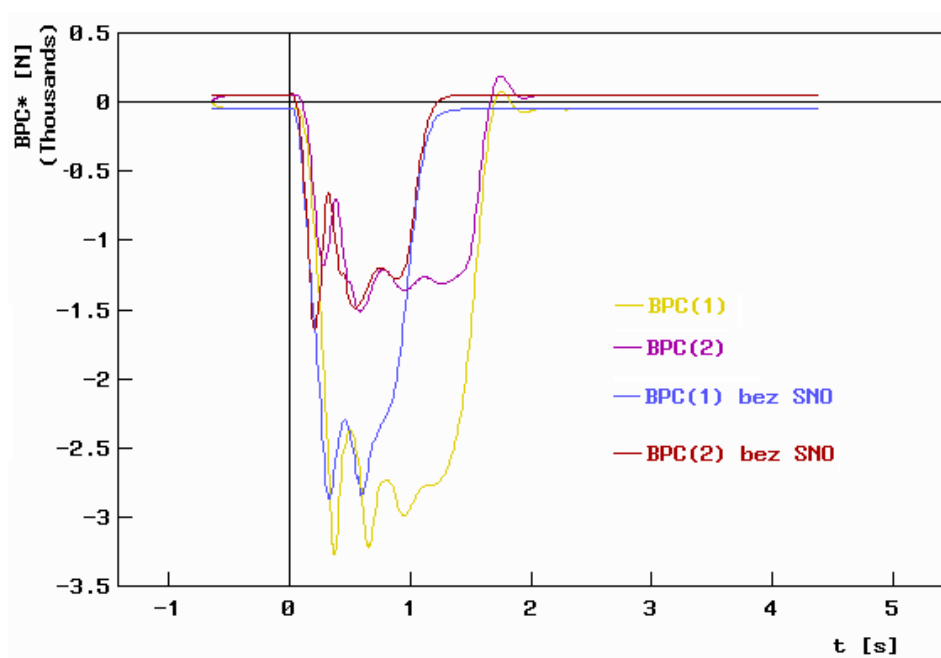
Rys. 10. Kąt odchylenia pojazdu w funkcji czasu. Dwuosioowy samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$



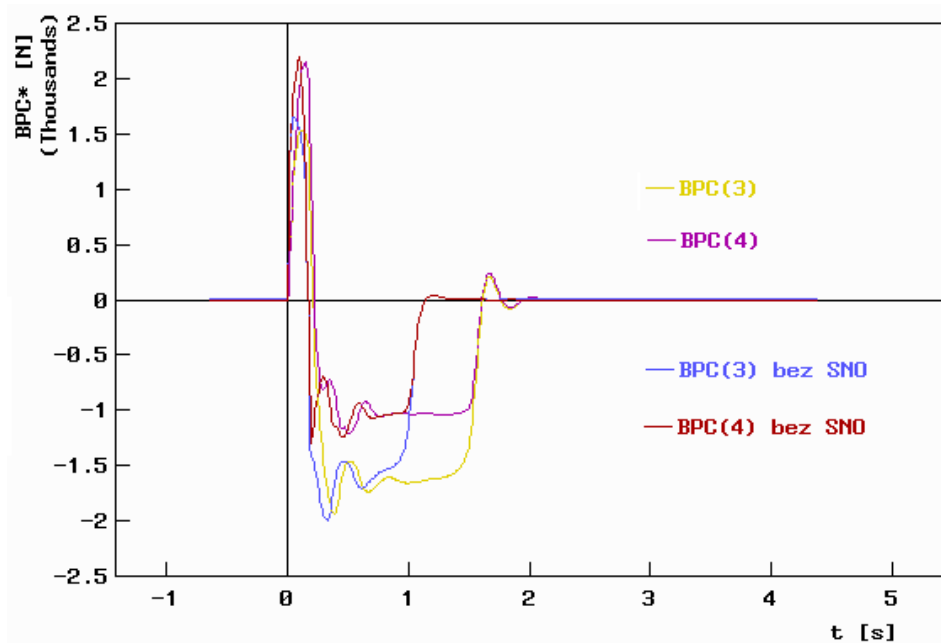
Rys. 11. Prędkość kątowna odchylenia pojazdu w funkcji czasu. Dwuosioowy samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$



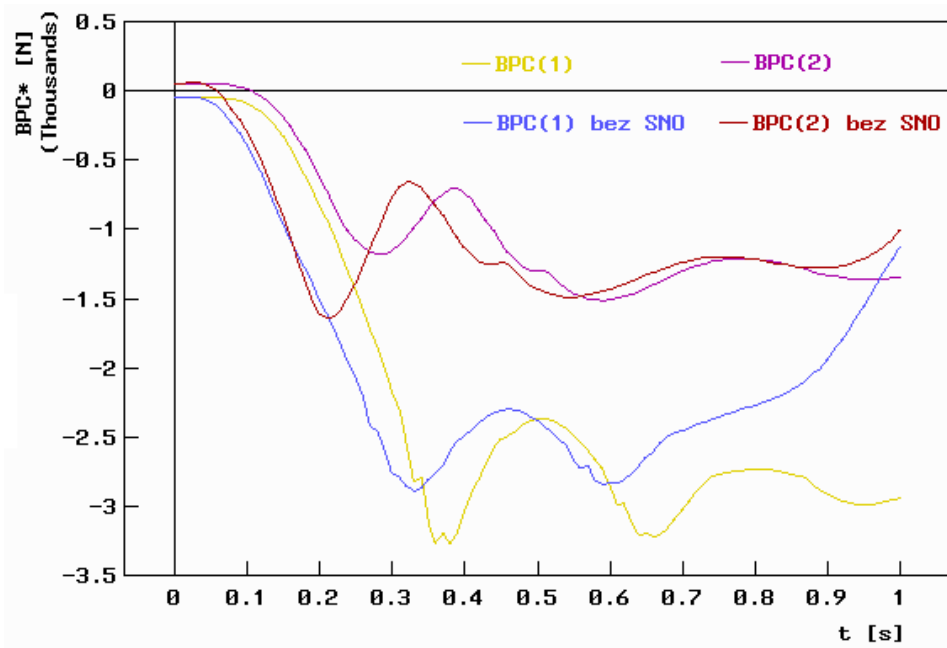
Rys. 12. Przyspieszenie poprzeczne środka masy w układzie spoziomowanym w funkcji czasu. Dwuosioowy samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$



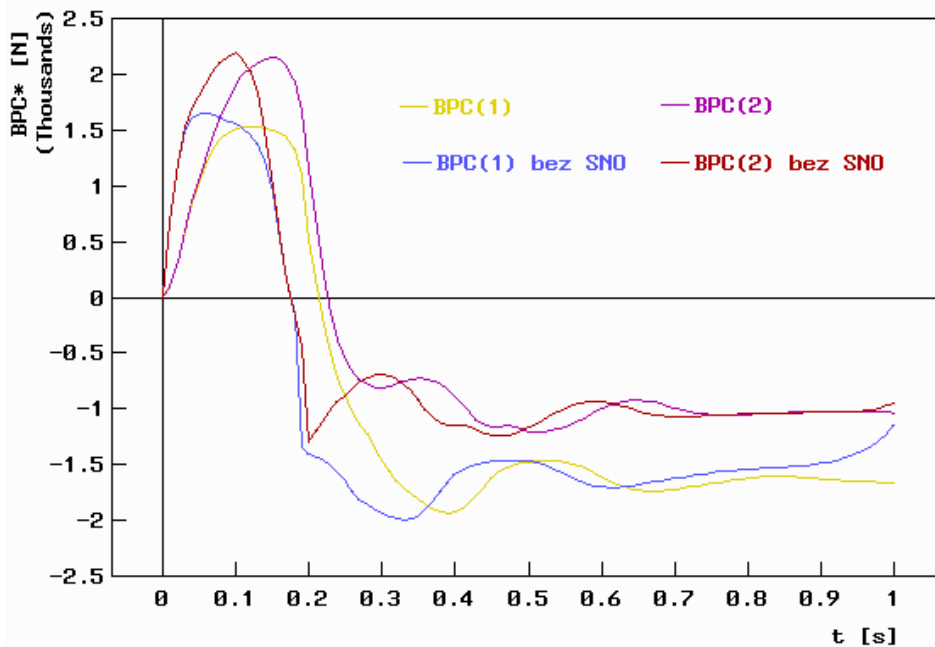
Rys. 13. Siły boczne kół osi przedniej jako funkcje czasu. (1) - koło lewe przednie, (2) - koło prawe przednie. Dwuosioowy samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu („bez SNO”) stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$



Rys. 14. Siły boczne kół osi tylnej jako funkcje czasu. (3) - koło lewe tylne, (4) - koło prawe tylne..
 Dwuosioowy samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu („bez SNO”) stanów nieustalonych ogumienia. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$



Rys. 15. Fragment rys. 13 dla przedziału czasu $<0, 1s>$. Siły boczne kół osi przedniej jako funkcje czasu. (1) - koło lewe przednie, (2) - koło prawe przednie. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu („bez SNO”) stanów nieustalonych ogumienia. $V=50km/h=13,89m/s$



Rys. 16. Fragment rys. 14 dla przedziału czasu $\langle 0, 1s \rangle$. Siły boczne kół osi tylnej jako funkcje czasu.
 (3) - koło lewe tylne, (4) - koło prawe tylne. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. Wyniki dla modelu z i bez opisu („bez SNO”) stanów nieustalonych ogumienia.
 $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$

6. Podsumowanie wyników obliczeń symulacyjnych

Poniżej zostanie zaprezentowane podsumowanie i interpretacja wyników symulacji przedstawionych powyżej w postaci graficznej oraz poniżej w formie tabelarycznej.

Jak już wspomniano, kierowca odczuwa zaburzenie ruchu pojazdu przede wszystkim poprzez zmiany przyspieszenia poprzecznego pojazdu i prędkości kątowej odchylenia, przemieszczenia poprzecznego środka masy pojazdu i kąta odchylenia (kąta kierunkowego) oraz momentu na kole kierownicy. To przebiegi czasowe i ekstrema tych wielkości mają decydujący wpływ na reakcje kierującego pojazdem.

W ocenie ilościowej wyników symulacji uwzględniano moduły wartości ekstremalnych analizowanych wielkości w trakcie pierwszej sekundy od wystąpienia zaburzenia. Przyjęto bowiem, że w typowym czasie reakcji kierowcy równym 1s [1] nie może on wykonać żadnych czynności. Tabela 1 przedstawia zestawienie wyników

symulacji ruchu dwuosowego samochodu osobowego dla przypadku nieuwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, odniesione do wyników otrzymanych dla przypadku uwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, zgodnie z modelem IPG-Tire.

Tabela 1. Zestawienie wyników symulacji ruchu dwuosowego samochodu osobowego dla przypadku nieuwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, odniesione do wyników otrzymanych dla przypadku uwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, zgodnie z modelem IPG-Tire. Samochód osobowy. Zaburzenie ruchu kół osi tylnej. $V=50\text{km/h}=13,89\text{m/s}$.

Kryterium oceny dla okresu z przedziału $<0,1>$ od uruchomienia płyty dynamicznej	Model stanów nieustalonych ogumienia: IPG-Tire	Model stanów nieustalonych ogumienia: nie działa	Zmiana modułu podanej wielkości w stosunku do otrzymanej dla przypadku działającego modelu stanów nieustalonych
Ekstremum przemieszczenia poprzecznego środka masy pojazdu y_{OC} [m]	-0,911	-1,112	+22,1 %
Ekstremum kąta odchylenia bryły nadwozia Ψ_{iC} [rad]	-0,31778	-0,23501	-26,0 %
Ekstremum prędkości kątowej odchylenia bryły nadwozia Ψ_{iCp} [rad/s]	-0,49263	-0,46367	-5,9 %
Ekstremum przyspieszenia poprzecznego środka masy pojazdu a_{etah} [m/s^2]	-4,65	-4,41	-5,2 %
Ekstremum momentu na kole kierownicy EMK [Nm]	10,13	12,10	+19,4 %

Wyniki przedstawione ilościowo w tabeli 1 oraz jakościowo w postaci przebiegów czasowych wybranych wielkości (rys. 9-16) wskazują na istotne różnice między efektami zaburzenia ruchu prostoliniowego samochodu osobowego, dla przypadku nieuwzględniania stanów nieustalonych ogumienia, odniesione do wyników otrzymanych dla przypadku uwzględniania stanów nieustalonych ogumienia. Największe różnice modułów wspomnianych wyżej wielkości, w trakcie pierwszej sekundy od wystąpienia zaburzenia ruchu kół osi tylnej, dotyczą kąta odchylenia ψ_c (kąta kierunkowego), przemieszczenia poprzecznego środka masy pojazdu y_{OC} oraz momentu na kole kierownicy EMK. Są one na tyle istotne (od 19 do 26%), że

zmieniają jakościowo i ilościowo ocenę zachowania pojazdu. Wskazują, zatem, na duży wpływ opisu stanów nieustalonych sił bocznych kół jezdnych na wyniki symulowanego testu.

Potwierdzeniem powyższego wniosku są przebiegi czasowe wybranych wielkości charakteryzujących symulowany manewr w trakcie pierwszej sekundy, ale także w ciągu całych 5 sekund symulacji (rys. 9-16).

Znaczne różnice wyników występują w przypadku przemieszczenia poprzecznego środka masy pojazdu y_{OC} (patrz rys. 9 oraz tab. 1). Są one największe w chwili końca manewru i przekraczają 5 m. Największe różnice ilościowe dotyczą kąta odchylenia bryły nadwozia Ψ_{iC} (patrz rys. 10 i tab. 1). Dotyczą przedziału czasu od około 1 s do końca testu. Mają duży wpływ na odbiór zachowania pojazdu przez prowadzącego go kierowcę. Dla kolejnych prezentowanych wielkości różnice ekstremów modułów, w trakcie pierwszej sekundy po wystąpieniu zaburzenia ruchu kół osi tylnej, nie są już duże, ale widoczne są duże różnice jakościowe prezentowanych wielkości. Rys. 11 przedstawia przebieg czasowy prędkości kątowej odchylenia pojazdu, a rys. 12 przyspieszenia poprzecznego środka masy w układzie spoziomowanym. Dla modelu uwzględniającego stany nieustalone siły bocznej ogumienia widoczne jest opóźnienie czasowe obu wielkości. Mają one także niezerowe wartości przez znacznie dłuższy czas niż w przypadku modelu pomijającego stany nieustalone ogumienia. Różnice zaobserwowane na rys. 11 i 12 wynikają z odmiennych przebiegów czasowych kątów bocznego znoszenia oraz odpowiadających im sił bocznych (patrz rys. 13-16) dla modelu uwzględniającego stany nieustalone siły bocznej ogumienia w stosunku do modelu pomijającego opis tego zjawiska. Tu także widoczne jest wspomniane wcześniej opóźnienie czasowe dla wyników otrzymanych z uwzględnieniem stanów nieustalonych siły bocznej ogumienia. Ponadto mają one niezerowe wartości przez znacznie dłuższy czas. Wskazany jest porównanie jakościowe tych wyników z zaprezentowanymi na rys. 4 i 5. Na rys 15 i 16 przedstawiono fragmenty przebiegów czasowych sił bocznych (tych z rys. 13 i 14) w czasie pierwszej sekundy po wystąpieniu zaburzenia ruchu kół osi tylnej pojazdu. Ze względu na inną skalę czasu, opisywane wcześniej przesunięcia czasowe są bardziej widoczne. Można nawet zgrubnie oszacować, że wynoszą one około 0,1 s.

Sumując, należy stwierdzić, że dla symulowanego testu zaburzenia ruchu samochodu w sytuacji, która jest spotykana w trakcie treningów kierowców w Ośrodku Doskonalenia Techniki Jazdy, uwzględnienie opisu stanów nieustalonych ogumienia w bardzo istotny sposób wpływa na wyniki przeprowadzonych obliczeń. Wynika to z postaci wymuszenia, którego stałe czasowe są porównywalne z czasem nabiegania ogumienia badanego pojazdu.

Informacja

Artykuł powstał w ramach współpracy między Wydziałem Transportu Politechniki Warszawskiej a firmą UNIMETAL Sp. z o.o. ze Złotowa.

Wykorzystywany w obliczeniach model symulacyjny ruchu samochodu

osobowego powstał jako efekt projektu Nr O ROB 0011 01/ID/11/1 *Symulator kierowania pojazdami uprzywilejowanymi podczas działań typowych i ekstremalnych*, dotyczącego budowy symulatora kierowania pojazdami uprzywilejowanymi przez firmę ETC-PZL AI z Warszawy.

Literatura

- [1] Arczyński S. *Mechanika ruchu samochodu (Mechanics of motion of a motor vehicle)*. WNT. Warszawa 1993.
- [2] Dugoff H, Fancher P S, Segel L. *An Analysis of Tire Traction Properties and their Influence on Vehicle Dynamic Performance*. SAE Paper 700377.
- [3] Fancher P S JR, Bareket Z. *Including Roadway and Tread Factors in Semi-empirical Model of Truck Tyres*. Supplement to VSD. 1993 (21): 92-107.
- [4] Gutowski R. *Mechanika analityczna (Analytic mechanics)*. PWN. Warszawa 1971.
- [5] Kamiński E, Pokorski J. *Teoria samochodu. Dynamika zawiesznień i układów napędowych pojazdów samochodowych (Automobile theory. Dynamics of suspension systems and powertrains of motor vehicles)*. WKŁ. Warszawa 1983.
- [6] Lozia Z. *Analiza ruchu samochodu dwuosowego na tle modelowania jego dynamiki. Monografia (Analysis of biaxial car motion based upon dynamic models. A monograph)*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej – Transport. Warszawa 1998; 41.
- [7] Lozia Z. *Ocena roli stanów nieustalonych ogumienia w badaniach dynamiki poprzecznej samochodu (Evaluation of the role of transient states of tyres in the research on lateral dynamics of the motor vehicle)*. Proceedings of the 7th International Symposium of the Institute of Motor Vehicles of the Military University of Technology “Improvement on Construction and Methods of Operation of Motor Vehicles”, Part II. Warszawa-Rynia 8-10 Dec. 1999: 358-366.
- [8] Lozia Z. *Modele symulacyjne ruchu i dynamiki dwóch pojazdów uprzywilejowanych (Vehicle dynamics simulation models of two emergency vehicles)*. Czasopismo Techniczne. Mechanika / Technical Transactions. Mechanics. 2012 (109); 3-M: 19-34.
- [9] Lozia Z. *Modelling and simulation of a disturbance to the motion of a motor vehicle entering a skid pad as used for tests at Driver Improvement Centres (Modelowanie i symulacja zakłócenia ruchu samochodu w trakcie wjazdu na płytę poślizgową stosowaną w ośrodkach doskonalenia techniki jazdy)*. The Archives of Automotive Engineering – Archiwum Motoryzacji. 2015 (69); 3: 87-103 (in English) / 173-188 (in Polish).
- [10] Lozia Z. *Simulation testing of two ways of disturbing the motion of a motor vehicle entering a skid pad as used for tests at Driver Improvement Centres (Symulacyjna ocena dwóch sposobów zakłócania ruchu samochodu w trakcie wjazdu na płytę poślizgową stosowaną w ośrodkach doskonalenia techniki jazdy)*. The Archives of Automotive Engineering – Archiwum Motoryzacji. 2016 (72); 2: 111-125. Available from: <http://dx.doi.org/10.14669/AM.VOL72.ART.6>
- [11] Luty W. *Analiza właściwości ogumienia samochodu ciężarowego w nieustalonym stanie znoszenia bocznego (Analysis of the properties of motor truck tyres in transient sideslip)*

- state). Zeszyty Instytutu Pojazdów Politechniki Warszawskiej. 2000; 3 (38).
- [12] Luty W. Analiza nabiegania ogumienia nowych konstrukcji podczas toczenia ze znoszeniem bocznym w quasi-statycznych warunkach ruchu. (Analysis of the relaxation of tyres of new construction when rolling with sideslip in quasi-static conditions of motion). In: Analiza wpływu ogumienia nowych konstrukcji na bezpieczeństwo samochodu w ruchu krzywoliniowym (Analysis of the influence of tyres of new construction on the motor vehicle safety in curvilinear motion). Military University of Technology. Warszawa 2009; ISBN978-83-61486-21-3; 19-26.
- [13] Luty W. Nieustalone stany znoszenia bocznego ogumienia kół jezdnych w symulacji ruchu krzywoliniowego pojazdu (Tire transient properties in simulation of vehicle lateral dynamics in curvilinear motion). Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej – Transport. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. 2013; 98: 357-367.
- [14] Luty W. Badania eksperymentalne ogumienia w nieustalonych warunkach znoszenia bocznego (Experimental research on tyres in transient sideslip conditions). The Archives of Automotive Engineering – Archiwum Motoryzacji. 2014 (66); 4; 23-32 (in English) / 133-141 (in Polish).
- [15] Luty W. Influence of the tire relaxation on the simulation results of the vehicle lateral dynamics in aspect of the vehicle driving safety. Journal of Kones Powertrain and Transport. 2015 (22); 1.
- [16] Maryniak J. Dynamiczna teoria obiektów ruchomych (Dynamic theory of movable objects). Politechnika Warszawska. Prace Naukowe. Mechanika (Warsaw University of Technology. Scientific Works. Mechanics). WPW. 1976; 32.
- [17] Mitschke M. Teoria samochodu. Dynamika samochodu (Automobile theory. Dynamics of motor vehicles). WKŁ Warszawa 1977: 85-88.
- [18] Pacejka H B. Tire and vehicle dynamics. SAE 2002. SAE ISBN 0768011264.
- [19] Rill G. First order tire dynamics. 3rd European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering C.A. Mota Soares et.al. (ed.) Lisbon, Portugal, 5-8 June 2006.
- [20] Rozporządzenie Ministra Transportu, Budownictwa i Gospodarki Morskiej z dnia 16 stycznia 2013 r. w sprawie doskonalenia techniki jazdy (Regulation of the Polish Minister of Transport, Construction and Maritime Economy of 16 January 2013 on the improving of driving techniques). Dz. U. of 18 Jan. 2013, item 91.
- [21] Schieschke R. The importance of tire dynamics in vehicle simulation. Paper presented at The Tire Society. 9th Annual Meeting and Conference on Tire Science and Technology. Akron, Ohio, USA. March 20-21, 1990.
- [22] Schieschke R, Hiemenz R. The relevance of tire dynamics in vehicle simulation. XXIII FISITA Congress, Torino, Italy. May 7-11, 1990.
- [23] Segel L. Force and moment response of pneumatic tires to lateral motion inputs. Transactions ASME. J. of Engineering for Industry. 1966; 88B.
- [24] Segel L, Wilson R. Requirements for describing the mechanics of tires used on single-track vehicles. Vehicle System Dynamics. 1975 (4); 2-3.
- [25] Uil R T. Non-lagging effect of motorcycle tyres. An experimental study with the Flat

- Plank Tyre Tester. Eindhoven University of Technology. Department of Mechanical Engineering. Dynamics and Control Technology Group. Report No. DCT 2006.046. Eindhoven, June 2006.
- [26] Vantsevich V, Gray J P. Relaxation length review and time constant analysis for agile tire dynamics control. Proceedings of the ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. IDETC/CIE 2015, August 2-5, 2015, Boston, Massachusetts, USA. Conference Paper DOI: 10.1115/DETC2015-46798.
- [27] Von Schlippe B, Dietrich R. Zur Mechanik des Luftreifens Zentrale für Wissenschaftliches. Berichtswesen der Luftfahrtforschung. Berlin 1942.
- [28] Takahashi T, Pacejka H B. Cornering on uneven roads. Supplement to Vehicle System Dynamics., 1988 (17).
- [29] <http://www.unimetal.pl/pl/diagnostyka/oferta/andere-gerate/plyta-dynamiczna/> (cited: 09 May 2015).