MINUT 2023 (5), s. 237–245
ISSN 2719-3063

Katarzyna SAWICZ

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa

Streszczenie. Artykuł ma na celu przedstawienie jednej z metod rozwiązywania układów równań liniowych. Jest przeznaczony głównie dla studentów pierwszego roku studiów licencjackich i inżynierskich na kierunkach technicznych. W artykule przedstawiono algorytm, za pomocą którego można rozwiązać pewne układy równań liniowych. Nazywa się on metodą eliminacji Gaussa. W artykule podano przykłady układów równań liniowych rozwiązanych za pomocą tego algorytmu. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania.

Słowa kluczowe: układ równań liniowych, eliminacja Gaussa, operacje elementarne na wierszach, macierz.

1. Wstęp

Układy równań liniowych wykorzystywane są w modelowaniu różnych zjawisk. Wiele ciekawych przykładów zastosowania układów liniowych m.in. w ekonomii, zarządzaniu, chemii, obwodach elektrycznych, demografii, gospodarce leśnej, algorytmach pozycjonowania stron w sieci można znaleźć w [2]. W artykule przedstawimy kolejną metodę rozwiązywania układów równań, zwana jest ona metodą eliminacji Gaussa. Artykuł ten jest niejako kontynuacją artykułu [9], w którym została przedstawiona metoda rozwiązywania układów równań za pomocą wzorów Cramera. Wymagała ona umiejętności obliczania wyznaczników. Niestety dla większej liczby równań i niewiadomych często metoda ta jest nieefektywna. Ponadto, gdy wyznacznik macierzy głównej był równy zero, to nie można stosować wzorów Cramera. Również nie stosujemy wzorów Cramera, gdy liczba niewiadomych jest różna od liczby równań. Natomiast metodę eliminacji Gaussa można stosować nawet przy większej ilości niewiadomych lub gdy wyznacznik macierzy głównej jest równy zero oraz w przypadku, gdy liczba niewiadomych jest różna od liczby równań. Na początku artykułu przedstawimy algorytm rozwiązywania układów równań liniowych, zwany metodą eliminacji Gaussa. W rozdziale trzecim podamy przykłady układów równań, które rozwiążemy za pomocą metody eliminacji Gaussa. Na końcu artykułu Czytelnik znajdzie zadania do samodzielnego rozwiązania oraz odpowiedzi do tych zadań.

Autor korespondencyjny: K. Sawicz (Katarzyna.Sawicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 20.09.2023 r.

2. Istota metody eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa może być wykorzystana m.in. do obliczania wyznaczników, do wyznaczania macierzy odwrotnej lub do obliczania rzędu macierzy. Dlaczego ta metoda działa oraz metodologia eliminacji w bardzo dobry sposób została przedstawiona w [1]. Podstawowe wiadomości na temat układów równań liniowych można znaleźć m.in. w [3], [4], [6]. Metoda eliminacji Gaussa jest uniwersalna. Za pomocą tej metody możemy rozwiązać układ równań liniowych, w którym niekoniecznie liczba niewiadomych jest równa liczbie równań. Dodatkowo dla układów Cramera, w których mamy większą ilość niewiadomych i równań, metoda ta zazwyczaj jest znacznie szybsza od metody Cramera.

W artykule skupimy się na układach równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$, natomiast x_1,x_2,x_3,...,x_n są niewiadomymi, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$.

Powyższy układ równań liniowych możemy zapisać w postaci macierzowej $AX = B$. Wiadomo, że rozwiązanie układu równań nie zmieni się, jeśli:

- zamienimy miejscami dwa równania,
- pomnożymy stronami wybrane równanie przez stałą różną od zera,
- dodamy do wybranego równania inne równanie pomnożone przez stałą.

Dla wygody i oszczędności czasu podane wyżej operacje warto wykonywać na macierzy rozszerzonej tego układu, czyli macierzy postaci:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

W metodzie eliminacji Gaussa przekształcamy macierz rozszerzoną do macierzy schodkowej, wykonując na jej wierszach następujące operacje elementarne:

- zamianę między sobą dwóch wierszy ($w_i \leftrightarrow w_j$);
- pomnożenie pewnego wiersza przez liczbę różną od zera ($c \cdot w_i$);
- dodanie do elementów wybranego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę ($w_i + c \cdot w_j$).

Wykonujemy tylko powyższe operacje na wierszach tak, aby na końcu uzyskać macierz w postaci schodkowej. Mając już macierz schodkową, wracamy do układu równań i rozwiązujemy układ równań zaczynając od ostatniego równania.

Czasami macierz rozszerzona ma taką postać, że łatwo zauważyć, jakie operacje wykonać. Jeśli jednak nie widzimy tego, można postępować według następującego schematu.

1. Sprawdzamy, czy $a_{11} \neq 0$.
   - Jeśli tak, to przechodzimy do kroku 2.
   - Jeśli $a_{11} = 0$, to zamieniamy pierwszy wiersz z innym wierszem, którego pierwszy element jest różny od zera.
   - Czasem warto zamienić dwa wiersze tak, aby pierwszy element był równy 1 (dla algorytmu nie ma to znaczenia, ale może ułatwić nam rachunki).
2. Za pomocą pierwszego wiersza zerujemy pierwsze wyrazy wiersza drugiego, trzeciego itd. (jeśli oczywiście nie ma tam już zer). Operację tę wykonujemy w ten sposób, że do wiersza drugiego, trzeciego itd. dodajemy pierwszy wiersz pomnożony przez odpowiednie liczby.
3. Patrzymy teraz na drugi wiersz. Jego pierwszy element jest już zerem. Chcemy, żeby drugi element był różny od 0. Postępujemy jak w kroku 1, przy czym pamiętamy, że nie zmieniamy już wiersza pierwszego.
4. Za pomocą drugiego wiersza zerujemy drugie wyrazy wiersza trzeciego, czwartego itd. (jeśli oczywiście nie ma tam już zer). Operację tę wykonujemy w ten sposób, że do wiersza trzeciego, czwartego itd. dodajemy drugi wiersz pomnożony przez odpowiednie liczby. Pamiętamy, aby nie zmieniać wierszy pierwszego i drugiego.
5. Następnie za pomocą wiersza trzeciego (po ewentualnej operacji elementarnej) zerujemy wszystkie elementy z trzeciej kolumny leżące pod główną przekątną. Nie zmieniamy pierwszych trzech wierszy.
6. Postępujemy tak, aż dojdziemy do ostatniego wiersza. W tym momencie mamy już postać schodkową.
7. Jeżeli na jakimś etapie wszystkie interesujące nas elementy są zerami, to patrzymy na następną kolumnę i postępujemy analogicznie. Dążymy do tego, aby:
   - na początku każdego wiersza (z wyjątkiem, być może, pierwszego) były tylko zera,
   - w każdym kolejnym wierszu na początku było o co najmniej jedno zero więcej niż w poprzednim wierszu.

Bardzo ważne

W metodzie eliminacji Gaussa:

1) **wykonujemy tylko wymienione operacje na wierszach**,

2) operacje wykonujemy **na całych wierszach macierzy rozszerzonej**.

3. Przykłady

W tym rozdziale podamy kilka przykładów rozwiązywania układu równań metodą eliminacji Gaussa. Zaczniemy od prostego przykładu.

Przykład 1. Rozwiążemy poniższy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ y + 2z = 1 \\ -3z = 9. \end{cases}$$

Widzimy, że nasz układ równań jest już w postaci schodkowej, a jego macierz rozszerzona jest macierzą trójkątną:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right].$$

Z ostatniego równania wyliczamy z:

$$-3z = 9 \Rightarrow z = -3.$$

Z drugiego wyliczymy y:

$$y + 2z = 1 \Rightarrow y = 7.$$

Z pierwszego równania wyliczamy x:

$$2x - y + z = -2 \Rightarrow x = 4.$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $x = 4$, $y = 7$, $z = -3$.

Przykład 2. Rozwiążemy następujący układ równań za pomocą algorytmu Gaussa:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + 5y + 3z = -1 \\ -x + 3y + 4z = -5. \end{cases}$$

Zaczynamy od przekształcenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ +w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -7w_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & 22 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ :(-22) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Po wprowadzeniu z powrotem niewiadomych i znaków równości otrzymujemy:

$$\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ y+3z=-3 \\ z=-1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2\cdot(-1)=-1 \\ y+3\cdot(-1)=-3 \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1. \end{cases}$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $x=1$, $y=0$, $z=-1$.

Przykład 3. Rozwiążemy teraz kolejny układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x-2y+z-t=-4 \\ 2x-y-z+t=1 \\ x+y+2z-t=5 \\ x+y-z+t=4. \end{cases}$$

Zaczynamy od przekształcenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -w_2 \\ -w_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 \leftrightarrow w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ :3 \\ \\ -4w_3 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Po wprowadzeniu z powrotem niewiadomych i znaków równości otrzymujemy:

$$\begin{cases} x-2y+z-t=-4 \\ y-z+t=3 \\ z-t=-1 \\ t=4. \end{cases}$$

Z trzeciego równania mamy $z-4=-1$, czyli $z=3$. Z drugiego równania mamy $y-3+4=3$, czyli $y=2$. Z pierwszego równania mamy $x-2\cdot 2+3-4=-4$, czyli $x=1$.

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

Przykład 4. Rozwiążemy za pomocą metody eliminacji Gaussa kolejny układ równań:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-4 \\ 2x_1+x_2+x_4=-9 \\ -x_1+2x_2+5x_3-2x_4=-5 \\ x_1-x_2-3x_3+3x_4=6. \end{cases}$$

Zaczynamy od przekształcenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ +w_1 \\ -w_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +3w_2 \\ -2w_2 \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ +2w_3 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

W otrzymanej macierzy otrzymaliśmy wiersz zerowy, który odpowiada równaniu tożsamościowemu:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0,$$

więc możemy go wykreślić. Mamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right].$$

Teraz w każdym wierszu sprawdzamy pierwszy niezerowy element — odpowiada on zmiennej związanej. Zatem w naszym układzie zmienne związane to x_1, x_2, x_4. Zmienne wolne to te, które nie są związane, zatem w naszym przykładzie zmienna wolna to x_3 i ją parametryzujemy,

$$x_3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teraz wracamy do układu równań i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ -4x_4 = -12. \end{cases}$$

Z trzeciego równania wyliczymy $x_4 = 3$. Z drugiego wyliczymy x_2, więc $x_2 = -2\alpha - 2$. Natomiast z pierwszego wyliczymy $x_1 = 2\alpha + 2 - \alpha - 3 - 4$, zatem $x_1 = -5 + \alpha$.

Odp. Podany układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, są nimi liczby postaci: $x_1 = -5 + \alpha$, $x_2 = -2 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 3$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Przykład 5. Rozwiążemy za pomocą metody eliminacji Gaussa kolejny układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Zaczynamy od przekształcenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ -3w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +2w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ostatni wiersz zerowy znowu wykreślamy i mamy macierz rozszerzoną postaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Teraz w każdym wierszu sprawdzamy pierwszy niezerowy element — odpowiada on zmiennej związanej. Zatem w naszym układzie zmienne związane to x_1, x_3. Zmienne wolne to te, które nie są związane, czyli w naszym przykładzie zmiennymi wolnymi są x_2 oraz x_4 i je parametryzujemy:

$$x_2 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$x_4 = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Teraz wracamy do układu równań i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyliczymy $x_3 = -4 + 2\beta$. Z pierwszego równania wyliczymy x_1:

$$x_1 = -1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4,$$

podstawiając za $x_2 = \alpha$, oraz za $x_4 = \beta$ otrzymujemy:

$$x_1 = -1 - 2\alpha - 3(-4 + 2\beta) + \beta,$$

zatem $x_1 = 11 - 2\alpha - 5\beta$.

Odp. Rozwiązanie układu równań ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = 11 - 2\alpha - 5\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -4 + 2\beta \\ x_4 = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Przykład 6. Rozwiążemy następujący układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 7x + 5y + 2z + 5t = 1 \\ 4x - y - z + 2t = 2. \end{cases}$$

Zaczynamy od przekształcenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -7w_1 \\ -4w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & -48 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & -26 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right].$$

Zauważmy, że ostatni wiersz macierzy rozszerzonej odpowiada sprzecznemu równaniu $0 = 22$, więc analizowany układ równań jest układem sprzecznym.

Odp. Podany układ równań nie ma rozwiązań.

Widzimy, że metoda eliminacji Gaussa jest bardziej uniwersalna niż metoda rozwiązywania układów równań za pomocą wzorów Cramera. Możemy ją stosować do układów równań z różną liczbą zmiennych oraz niewiadomych, do układów równań w których wyznacznik macierzy głównej jest równy zero. Ponadto metoda ta przy większej ilości zmiennych jest bardziej efektywna, niż metoda rozwiązywania układów równań za pomocą wzorów Cramera.

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiąż podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 1 \\ -x + 8y + 3z = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 4x - y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 15 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 14 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$

Odpowiedzi

a) $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1$

b) układ sprzeczny, nie ma rozwiązań

c) $x = -\alpha, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

d) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 =, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1$

Więcej zadań można znaleźć np. w [5]– [8].

Literatura

1. K. Adrianowicz, I. Nowak, *Dlaczego eliminacja Gaussa działa i dlaczego jest tak pomocna?*, MINUT 2023(5), pp. 149–164.
2. K. Adrianowicz, I. Nowak, *Po co nam ta matematyka? Cz. 1, Zastosowanie algebry liniowej nie tylko dla studentów pierwszych lat studiów technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2016.

3. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej, cz. 1*, Wydawnictwo Naukowo–Techniczne, Warszawa 2002.
4. A. Białynicki-Birula,*Algebra*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1971.
5. M. Biedrońska, *Zbiór zadań z odpowiedziami i rozwiązaniami*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
6. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
7. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2001.
8. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises, part 2*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020.
9. K. Sawicz, *Rozwiązywanie układów równań za pomocą wzorów Cramera*, MINUT 2023 (5), s. 227–236.