

# Ocena niepewności prostokątnych składowych impedancji wyznaczanych pośrednio z pomiarów składowych biegunowych i vice versa

Zygmunt Lech Warsza

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

**Streszczenie:** W artykule omówiono oszacowanie niepewności składowych prostokątnych impedancji wyznaczonych pośrednio z bezpośrednich pomiarów jego polarnych składowych i odwrotnie. Przedstawiono wzory i funkcje znormalizowanych niepewności bezwzględnych i względnych pary składowych impedancji wyznaczonej pośrednio z pomiarów pozostałej pary. Uwzględniono również ich współczynnik korelacji w funkcji kąta fazowego impedancji i niepewności mierzonej pary. Otrzymane zależności zostały szczegółowo przeanalizowane i omówione.

**Słowa kluczowe:** niepewność, pomiary pośrednie, składowe impedancji, macierz kowariancji

## 1. Wprowadzenie

Pierwszym podręcznym urządzeniem do pomiarów napięć przemiennych AC w szerokim zakresie amplitud i przesunięć fazowych we wszystkich czterech ćwiartkach, wyznaczanych względem napięcia odniesienia i bez obciążania badanego układu, był kompensator o współrzędnych biegunowych z maszynowym przesuwnikiem fazy opracowany w firmie Simens w 1918 r. przez dr. Włodzimierza Krukowskiego, późniejszego profesora Politechniki Lwowskiej [1, 2]. Obecnie do takich badań służą cyfrowe układy elektroniczne z prostownikami fazoczułymi, zwane też voltomierzami wektorowymi. Niekiedy są wyposażone w nastawianie częstotliwości, amplitudy i fazy odniesienia. W tej stosowanej od lat technice pomiarowej pojawiły się nowe zagadnienia wynikłe z rozpowszechniania się randomizowanej oceny dokładności pomiarów za pomocą niepewności. Zastąpiła ona stosowaną wcześniej ocenę przez błędy graniczne. W przypadkach, gdy np. z bezpośrednich pomiarów składowych biegunowych wielkości elektrycznych wyznaczamy pośrednio składowe prostokątne lub na odwrót, w wyniku otrzymuje się wartości ze sobą powiązane. Również powiązane są ich niepewności. Do ich wyznaczania trzeba więc stosować macierzowe równanie propagacji niepewności, tj. wyznaczyć macierz kowariancji wielkości

wyjściowych. Metoda ta jest opisana ogólnie w Suplemencie 2 do Przewodnika wyznaczania niepewności GUM [3]. W tej pracy jako przykład metodę tę zastosowano do wyznaczania niepewności prostokątnych składowych impedancji na podstawie pomiarów jej składowych biegunowych i vice versa. W literaturze nie znaleziono jak szacować niepewności przy pośrednim badaniu tych składowych.

## 2. Niepewności prostokątnych składowych impedancji wyznaczanych z pomiarów jej składowych biegunowych

Mierzone bezpośrednio składowe biegunowe impedancji traktuje się jako wielkości wejściowe traktuje się je jako wielkości wyjściowe, a składowe prostokątne jako wielkości wyjściowe, które otrzymuje się pośrednio ze znanych wzorów. Wartości tych składowych są ze sobą skojarzone, gdyż zależą od obu składowych biegunowych. Należy dokonać też oceny niepewności wielkości wyjściowych. Zależności między niepewnościami wejściowymi i wyjściowymi opisuje się macierzowym równaniem propagacji variancji [3–5]. Proces ten prześledzi się dla impedancji  $Z$  (rys. 1). Jej moduł  $|Z|$  i kąt fazowy  $\varphi$  otrzymano z pomiarów tej impedancji w układzie z szeregowym opornikiem wzorcowym. Oszacowane w pomiarach niepewności składowych biegunowych potraktuje się dla uproszczenia jako nieskorelowane.

Zależności między parametrami impedancji

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_{LC}^2}, \quad X_{LC} = |Z| \sin \varphi, \quad R = |Z| \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{LC}}{R}$$

Zależność ogólna dla wieloparametrowych pomiarów pośrednich

$$Y = F(X)$$

### Autor korespondujący:

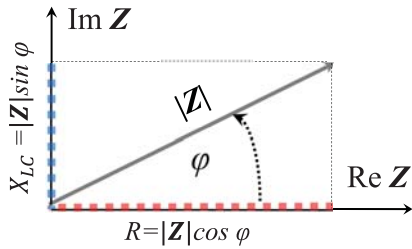
Zygmunt Lech Warsza, zlw1936@gmail.com

### Artykuł recenzowany

nadesłany 28.08.2018 r., przyjęty do druku 31.09.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0



Rys. 1. Składowe biegunowe i prostokątne impedancji Z  
Fig. 1. Polar and rectangular components of the impedance Z

Wektory wielkości wejściowych i wyjściowych

$$\mathbf{X} = [|\mathbf{Z}|, \varphi]^T, \mathbf{Y} = [R, X_{LC}]^T$$

Zależność pomiędzy macierzami kowariancji niepewności bezwzględnych wejściowych  $\mathbf{U}_X$  i wyjściowych  $\mathbf{U}_Y$  jest następująca [5, 6]:

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_X \cdot \mathbf{S}^T$$

gdzie: macierz niepewności nieskorelowanych wielkości wejściowych

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}^2 \end{bmatrix},$$

macierz czułości

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial |\mathbf{Z}|} & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial X_{LC}}{\partial |\mathbf{Z}|} & \frac{\partial X_{LC}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -|\mathbf{Z}| \sin \varphi \\ \sin \varphi & |\mathbf{Z}| \cos \varphi \end{bmatrix},$$

macierz niepewności wielkości wyjściowych

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_Y &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -|\mathbf{Z}| \sin \varphi \\ \sin \varphi & |\mathbf{Z}| \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -|\mathbf{Z}| \sin \varphi & |\mathbf{Z}| \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -|\mathbf{Z}| \sin \varphi \\ \sin \varphi & |\mathbf{Z}| \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \cos \varphi & \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \sin \varphi \\ -|\mathbf{Z}| \sigma_{\varphi}^2 \sin \varphi & |\mathbf{Z}| \sigma_{\varphi}^2 \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \cos^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi (\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 - |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 - |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2) & \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \sin^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Związek wariancji niepewności bezwzględnych i względnych:

$$\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 = \delta_{|\mathbf{Z}|}^2 |\mathbf{Z}|^2$$

Niepewności, bezwzględna i względna składowej rzeczywistej:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \cos^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi \left( \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi \right) = \\ &= \frac{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\delta_R^2 = \frac{\sigma_R^2}{R^2} = \frac{|\mathbf{Z}|^2}{R^2} \frac{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 + \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \delta_{|\mathbf{Z}|}^2 + \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi.$$

Stąd:

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}} = \sqrt{\frac{1 + |\mathbf{Z}|^2 \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2} \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\delta_R}{\delta_{|\mathbf{Z}|}} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2} \tan^2 \varphi}.$$

Niepewności składowej urojonej:

$$\begin{aligned} \sigma_{X_{LC}}^2 &= \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \sin^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi \left( \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \right) = \\ &= \frac{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2}{1 + \tan^2 \varphi} = \sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \frac{\tan^2 \varphi + \frac{|\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2}}{1 + \tan^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\delta_{X_{LC}}^2 = \frac{\sigma_{X_{LC}}^2}{X_{LC}^2} = \frac{|\mathbf{Z}|^2}{X_{LC}^2} \frac{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + \sigma_{\varphi}^2}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi} \frac{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + \sigma_{\varphi}^2}{1 + \tan^2 \varphi} =$$

$$= \frac{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + \sigma_{\varphi}^2}{\tan^2 \varphi} = \delta_{|\mathbf{Z}|}^2 + \sigma_{\varphi}^2 \cot^2 \varphi$$

$$\frac{\sigma_{X_{LC}}}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}} = \sqrt{\frac{\tan^2 \varphi + \frac{|\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2}}{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\delta_{X_{LC}}}{\delta_{|\mathbf{Z}|}} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2} \cot^2 \varphi}.$$

Współczynnik korelacji

$$\begin{aligned} \rho_{RX_{LC}} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi (\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 - |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}} \sqrt{\frac{\sigma_{|\mathbf{Z}|}^2 \tan^2 \varphi + |\mathbf{Z}|^2 \sigma_{\varphi}^2}{1 + \tan^2 \varphi}}} \\ \rho_{RX_{LC}} &= \frac{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 - \sigma_{\varphi}^2}{\sqrt{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 + \sigma_{\varphi}^2 \tan^2 \varphi} \sqrt{\delta_{|\mathbf{Z}|}^2 + \sigma_{\varphi}^2 \cot^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie  $z \equiv |\mathbf{Z}| \frac{\sigma_{\varphi}}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}} = \frac{\sigma_{\varphi}}{\delta_{|\mathbf{Z}|}}$  wyznaczono

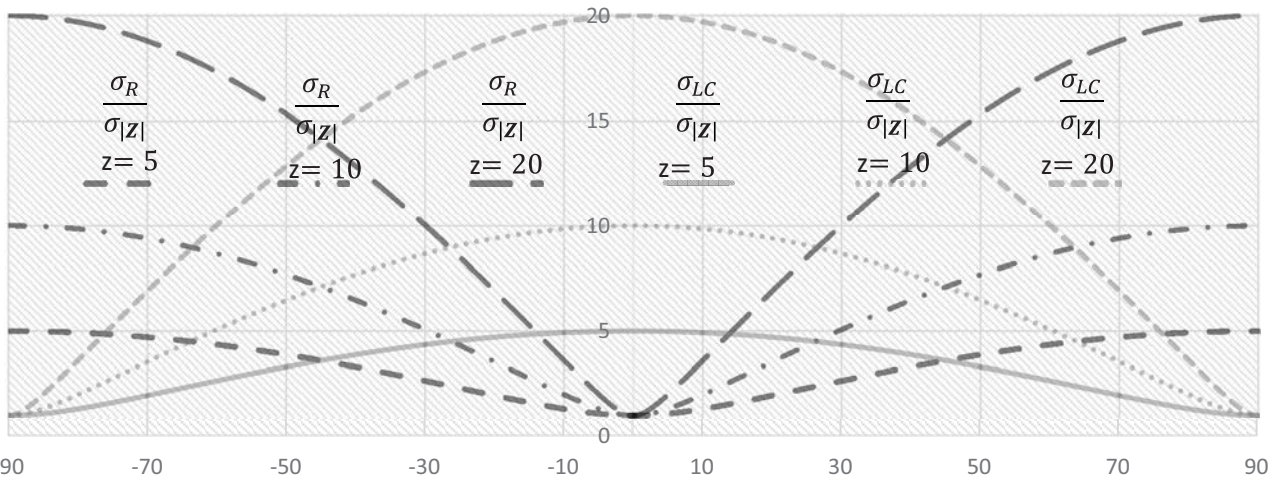
zależność znormalizowanych niepewności bezwzględnych

$\frac{\sigma_R}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}}$  i  $\frac{\sigma_{X_{LC}}}{\sigma_{|\mathbf{Z}|}}$  w funkcji kąta  $\varphi$  (rys. 2) oraz współczynnika kore-

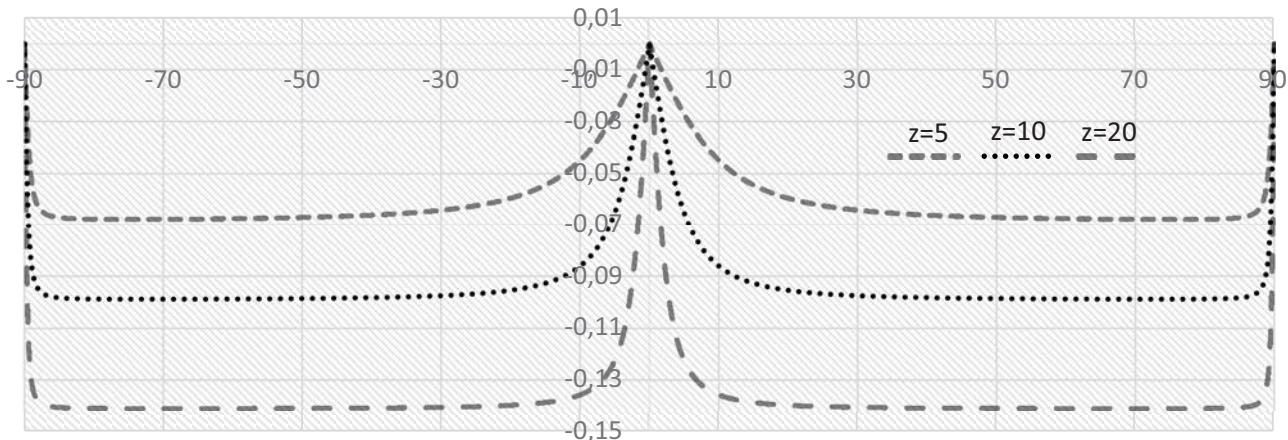
lacji  $\rho_{RX_{LC}}$  (rys. 3) dla różnych wartości parametru  $z$ . Podobne

wykresy stosunków niepewności względnych  $\frac{\delta_R}{\delta_{|\mathbf{Z}|}}$ ,  $\frac{\delta_{X_{LC}}}{\delta_{|\mathbf{Z}|}}$  w funk-

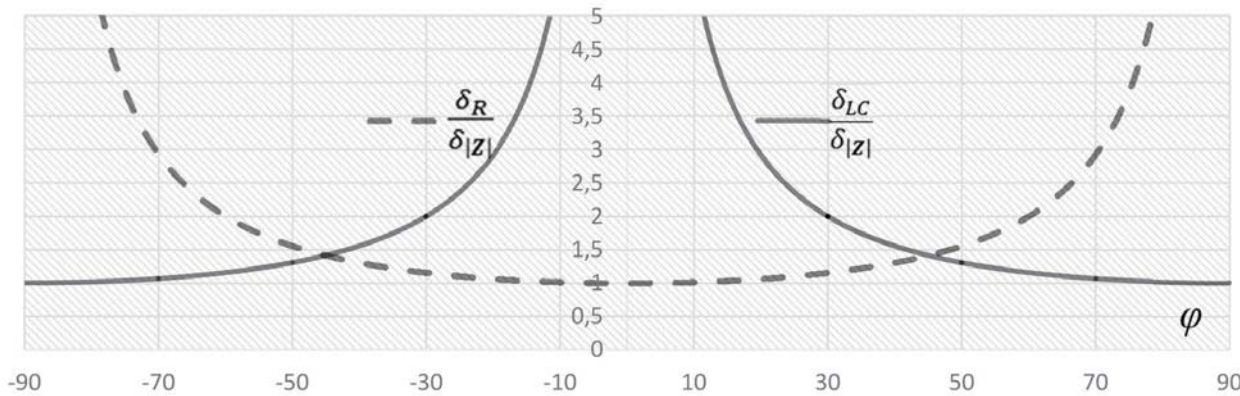
cji kąta  $\varphi$  są na rysunku 4 i w funkcji  $\frac{\delta_{\varphi}}{\delta_{|\mathbf{Z}|}}$  - na rysunku 5.



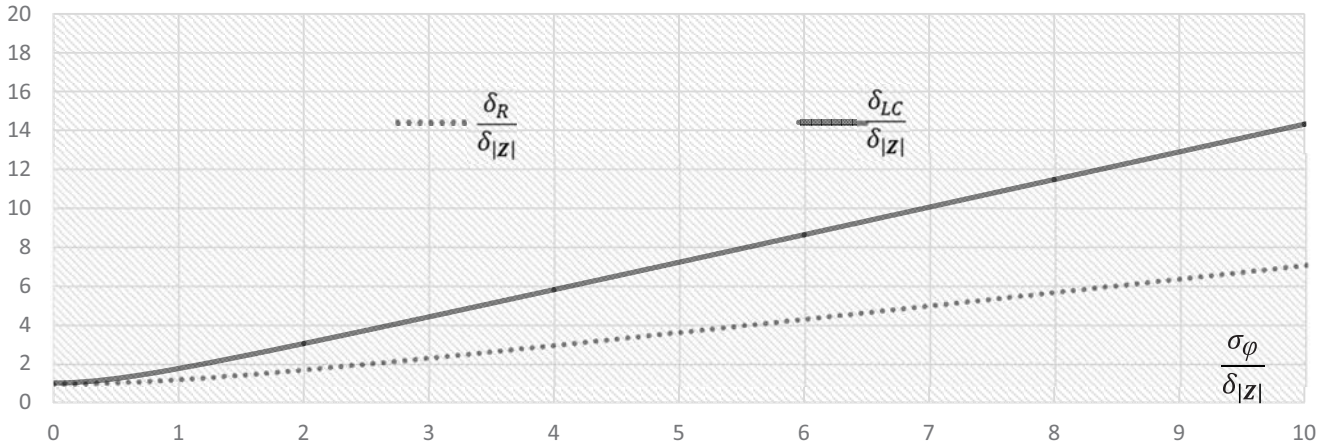
Rys. 2. Zależność znormalizowanych niepewności bezwzględnych  $\frac{\sigma_R}{\sigma_{|z|}}$  i  $\frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{|z|}}$  w funkcji kąta  $\varphi$  dla  $z \equiv |Z| \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{|z|}} = 5, 10, 20$  oraz  $|Z| = 10 \Omega$ ,  $\sigma_{|z|} = 0,01 \Omega$  i  $\sigma_\varphi = 0,005; 0,01$  i  $0,02$  rad  
 Fig. 2. Dependence of normalized absolute uncertainties  $\frac{\sigma_R}{\sigma_{|z|}}$  i  $\frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{|z|}}$  as function of the angle  $\varphi$  for  $z \equiv |Z| \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{|z|}} = 5, 10, 20$  and  $|Z| = 10 \Omega$ ,  $\sigma_{|z|} = 0.01 \Omega$  and  $\sigma_\varphi = 0.005; 0.01$  and  $0.02$  rad



Rys. 3. Współczynnik korelacji  $\rho_{R \times LC}$  w funkcji kąta  $\varphi$  dla  $\delta_{|z|} = 0,001 = 0,1\%$  i  $\sigma_\varphi = 0,005; 0,01; 0,02$  rad  
 Fig. 3. Correlation coefficient  $\rho_{R \times LC}$  as function of the angle  $\varphi$  for  $\delta_{|z|} = 0.001 = 0.1\%$  and  $\sigma_\varphi = 0.005; 0.01; 0.02$  rad



Rys. 4. Znormalizowane niepewności względne  $\frac{\delta_R}{\delta_{|z|}}$ ,  $\frac{\delta_{LC}}{\delta_{|z|}}$  w funkcji kąta  $\varphi$  dla  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_{|z|}} = 1$ , (np.  $\delta_{|z|} = 1\%$ ,  $\sigma_\varphi = 0,01$  rad)  
 Fig. 4. Normalized relative uncertainties  $\frac{\delta_R}{\delta_{|z|}}$ ,  $\frac{\delta_{LC}}{\delta_{|z|}}$  as functions of the angle  $\varphi$  for  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_{|z|}} = 1$ , (for example,  $\delta_{|z|} = 1\%$ ,  $\sigma_\varphi = 0.01$  rad)



Rys. 5. Znormalizowane niepewności względne  $\frac{\delta_R}{\delta_{|Z|}}$  i  $\frac{\delta_{LC}}{\delta_{|Z|}}$  w funkcji  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_{|Z|}}$  dla kąta  $\varphi = 35^\circ$

Fig. 5. Normalized relative uncertainties  $\frac{\delta_R}{\delta_{|Z|}}$  and  $\frac{\delta_{LC}}{\delta_{|Z|}}$  as functions of  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_{|Z|}}$  for the angle  $\varphi = 35^\circ$

Tabela 1. Znormalizowane niepewności bezwzględne i współczynnik korelacji w punktach osobliwych  
Table 1. Normalized absolute uncertainties and correlation coefficient in singular points

$\varphi$ [rad]	Rezystancja	Niepewność bezwzględna $\frac{\sigma_R}{\sigma_{ Z }}$	Reaktancja	Niepewność bezwzględna $\frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{ Z }}$	Współczynnik korelacji $\rho_{RX_{LC}}$
$\varphi = -\pi/2$	$R$	$z \quad (\sigma_R = \sigma_\varphi  Z )$	0	1 $(\sigma_{LC} = \sigma_{ Z })$	0
$\varphi = 0$	0	1 $(\sigma_R = \sigma_{ Z })$	$X_{LC}$	$z \quad (\sigma_{LC} = \sigma_\varphi  Z )$	0
$\varphi = \pi/2$	$R$	$z \quad (\sigma_R = \sigma_\varphi  Z )$	0	1 $(\sigma_{LC} = \sigma_{ Z })$	0

Szczegółową analizę tych przebiegów pozostawiamy dociekliwości Czytelnika.

Z analizy formuł wynikają wartości znormalizowanych niepewności bezwzględnych i współczynnika korelacji w punktach osobliwych zestawione w tabeli 1.

Podobne formuły i wykresy można wyznaczyć też dla niepewności modułu  $|Z|$  i kąta  $\varphi$  impedancji  $Z$  z niepewności dla pomiarów jej składowych prostokątnych  $R, X_{LC}$  i ich współczynnika korelacji  $\rho_{RX_{LC}}$ .

### 3. Wyznaczanie niepewności składowych biegunowych z pomiarów składowych prostokątnych

Jest to zagadnienie odwrotne do poprzedniego. Wektory wielkości wejściowych i wyjściowych są teraz następujące

$$\mathbf{X} = [R, X_{LC}]^T, \mathbf{Y} = [|Z|, \text{tg} \varphi]^T$$

Wybranie wielkości wyjściowej w postaci  $\text{tg} \varphi$  uprości znacznie obliczenia, które będą tu wykonane dla niepewności względnych. Tak jak i poprzednio, współczynnik korelacji niepewności wielkości względnych jest taki sam jak wielkości bezwzględnych, gdyż jest to ogólna zasada.

Macierzowe równanie zależności między macierzami kowariancji niepewności względnych wejściowych  $\mathbf{U}_{\delta X}$  i wyjściowych

$\mathbf{U}_{\delta Y}$  jest następujące [5, 6]:

$$\mathbf{U}_{\delta Y} = \mathbf{S}_\delta \cdot \mathbf{U}_{\delta X} \cdot \mathbf{S}_\delta^T$$

Macierz  $\mathbf{U}_{\delta X}$  dla nieskorelowanych niepewności wielkości wejściowych i macierz czułości  $\mathbf{S}_\delta$  mają teraz następujące postacie

$$\mathbf{U}_{\delta X} = \begin{bmatrix} \delta_R^2 & 0 \\ 0 & \delta_{LC}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_\delta = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{|Z|^2} & \frac{X_{LC}^2}{|Z|^2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

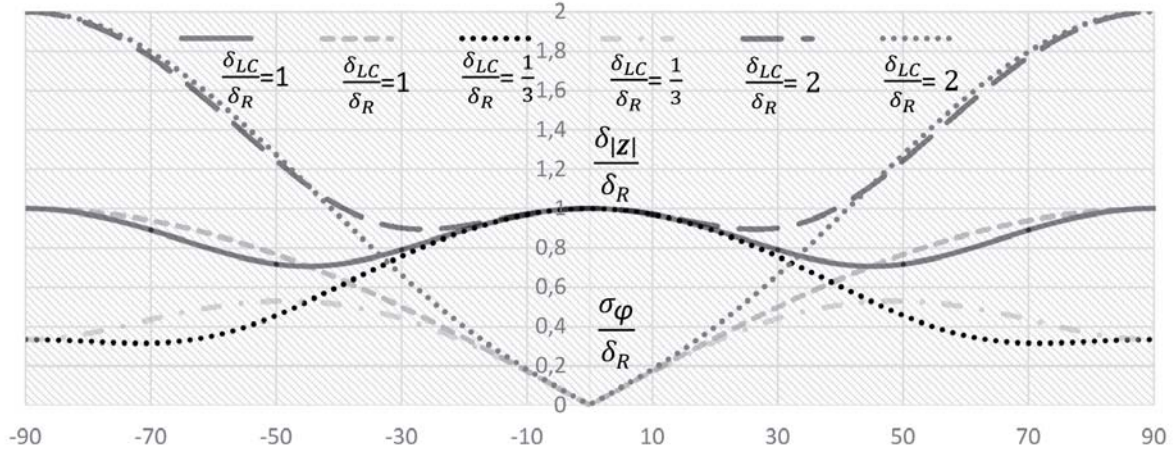
Korzysta się z tych samych, co poprzednio zależności między parametrami impedancji  $Z$ :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_{LC}^2}; \quad \text{tg} \varphi = \frac{X_{LC}}{R},$$

$$X_{LC} = X_L - X_C, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = 1/\omega C;$$

$$\{-\frac{1}{2} \pi < \varphi < \frac{1}{2} \pi\}.$$

Niepewności względne są określone jako  $\delta_R = \frac{\sigma_R}{R}$  oraz



Rys. 6. Znormalizowane niepewności względne  $\frac{\delta_{|Z|}}{\delta_R}$  i bezwzględne  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_R}$  składowych biegunowych Z w funkcji kąta  $\varphi$

Fig. 6. Normalized relative  $\frac{\delta_{|Z|}}{\delta_R}$  and absolute  $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_R}$  uncertainties of polar components Z as a function of angle  $\varphi$

Tabela 2. Znormalizowane niepewności względne i bezwzględne składowych impedancji oraz współczynnik korelacji dla wielkości wyjściowych w punktach osobliwych

Table 2. Normalized relative and absolute uncertainties of the impedance components and the correlation coefficient for the output values in singular points

$\varphi$ [rad]	Niepewność bezwzględna $\frac{\delta_{ Z }}{\delta_R}$	Niepewność bezwzględna $\frac{\sigma_\varphi}{\delta_R}$	Współczynnik korelacji $\rho_{RX_{LC}}$
$\varphi = -\pi/2$	$\frac{\delta_{LC}}{\delta_R}, (\delta_{ Z } = \delta_{LC})$	$\frac{\delta_{LC}}{\delta_R}, (\sigma_\varphi = \delta_{LC})$	$\frac{\delta_{LC}}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2}}$
$\varphi = 0$	$\frac{\delta_{ Z }}{\delta_R} = 1, (\delta_{ Z } = \delta_R)$	$\sigma_\varphi = 0$	$\frac{-\delta_R}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2}}$
$\varphi = \pi/2$	$\frac{\delta_{LC}}{\delta_R}, (\delta_{ Z } = \delta_{LC})$	$\frac{\delta_{LC}}{\delta_R}, (\sigma_\varphi = \delta_{LC})$	$\frac{\delta_{LC}}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2}}$

$$\delta_{\text{tg}\varphi} = \frac{\sigma_{\text{tg}\varphi}}{\text{tg}\varphi} = \frac{\sigma_\varphi |Z|^2}{RX_{LC}} \text{ dla } \varphi \neq 0$$

Zatem macierz wielkości wyjściowych  $U_{\delta Y}$  jest teraz określona następująco

$$U_{\delta Y} = S_\delta \cdot U_{\delta X} \cdot S_\delta^T = \begin{bmatrix} \frac{R^4}{|Z|^4} \delta_R^2 + \frac{X_{LC}^4}{|Z|^4} \delta_{LC}^2 & \frac{X_{LC}^2}{|Z|^2} \delta_{LC}^2 - \frac{R^2}{|Z|^2} \delta_R^2 \\ \frac{X_{LC}^2}{|Z|^2} \delta_{LC}^2 - \frac{R^2}{|Z|^2} \delta_R^2 & \delta_R^2 + \delta_{LC}^2 \end{bmatrix}$$

Niepewności, względne dla modułu impedancji

$$\delta_{|Z|}^2 = \frac{R^4}{|Z|^4} \delta_R^2 + \frac{X_{LC}^4}{|Z|^4} \delta_{LC}^2 = \frac{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2 \text{tg}^4 \varphi}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^2} = \delta_R^2 \frac{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2} \text{tg}^4 \varphi}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^2}$$

i niepewność względna dla tangensa kąta  $\varphi$

$$\delta_{|\text{tg}\varphi|}^2 = \delta_R^2 + \delta_{LC}^2$$

oraz niepewność bezwzględna dla kąta  $\varphi$

$$\sigma_\varphi^2 = \left( \delta_R^2 + \delta_{LC}^2 \right) \frac{R^2 X_{LC}^2}{|Z|^4} = \frac{\text{tg}^2 \varphi (\delta_R^2 + \delta_{LC}^2)}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^2} = \delta_R^2 \frac{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2}}{(1 + \text{tg}^2 \varphi)^2} \text{tg}^2 \varphi$$

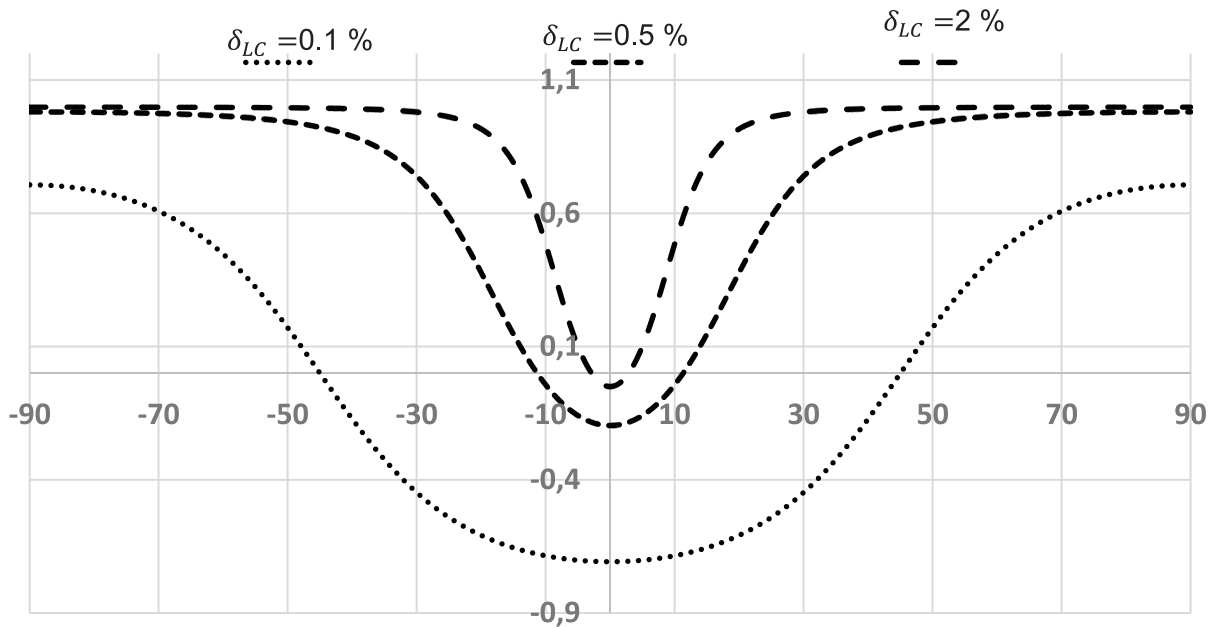
gdz  $\delta_{\text{tg}\varphi} = \frac{\sigma_{\text{tg}\varphi}}{\text{tg}\varphi} = \frac{\sigma_\varphi |Z|^2}{RX_{LC}}$

i stąd  $\sigma_\varphi = \frac{\delta_{\text{tg}\varphi} RX_{LC}}{|Z|^2}$ .

Znormalizowana niepewność względna  $\delta_{|Z|}$  i znormalizowana niepewność bezwzględna  $\sigma_\varphi$  kąta  $\varphi$  wynoszą odpowiednio

$$\frac{\delta_{|Z|}}{\delta_R} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2} \text{tg}^4 \varphi}}{1 + \text{tg}^2 \varphi} \text{ oraz } \frac{\sigma_\varphi}{\delta_R} = \frac{|\text{tg}\varphi| \sqrt{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2} \text{tg}^2 \varphi}}{1 + \text{tg}^2 \varphi}$$

Przykłady tych zależności w funkcji kąta fazowego przedstawiono na rysunku 6, a wartości charakterystyczne w punktach osobliwych w tabeli 2.



Rys. 7. Współczynnik korelacji  $\rho_{|z|\varphi}$  w funkcji kąta  $\varphi$  dla  $\delta_R = 0,1\%$  i  $\delta_{LC} = 0,1\%, 0,5\%$  oraz  $2\%$   
 Fig. 7. Correlation coefficient  $\rho_{|z|\varphi}$  as the angle function  $\varphi$  for  $\delta_R = 0.1\%$  and  $\delta_{LC} = 0.1\%, 0.5\%, 2\%$

Współczynniki korelacji dla niepewności względnych i bezwzględnych są równe, tj.  $\rho_{\delta|z|\text{tg}\varphi} = \rho_{|z|\varphi}$  i wynoszą

$$\rho_{\delta|z|\text{tg}\varphi} = \frac{\frac{X_{LC}^2}{|Z|^2} \delta_{LC}^2 - \frac{R^2}{|Z|^2} \delta_R^2}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2} \sqrt{\frac{R^4}{|Z|^4} \delta_R^2 + \frac{X_{LC}^4}{|Z|^4} \delta_{LC}^2}} =$$

$$= \frac{X_{LC}^2 \delta_{LC}^2 - R^2 \delta_R^2}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2} \sqrt{R^4 \delta_R^2 + X_{LC}^4 \delta_{LC}^2}} = \frac{\delta_{LC}^2 \text{tg}^2 \varphi - \delta_R^2}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2} \sqrt{\delta_R^2 + \delta_{LC}^2 \text{tg}^4 \varphi}}$$

i ostatecznie

$$\rho_{|z|\varphi} = \frac{\frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2} \text{tg}^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2}} \sqrt{1 + \frac{\delta_{LC}^2}{\delta_R^2} \text{tg}^4 \varphi}} .$$

Przebiegi współczynnika korelacji podano na rysunku 7.

## 4. Podsumowanie i wnioski

Do pomiarów amplitudy i fazy napięć przemiennoprądowych AC bez obciążania badanego obwodu profesor Włodzimierz Krukowski stworzył przeszło wiek temu kompensator o współrzędnych biegunowych z maszynowym przesuwnikiem fazy [1, 2]. Obecnie takie pomiary realizuje się za pomocą elektronicznych fazoczułych układów pomiarowych, zwanych też woltomierzami wektorowymi.

W pracy wyznaczono elementy macierzy kowariancji wielkości wyjściowych. Przedstawiono też wzajemne zależności między niepewnościami bezwzględnymi i względnymi dla obu rodzajów składowych impedancji. Istotne znaczenie mają nie tylko wartości mierzonych bezpośrednio składowych biegunowych  $|Z|$  i  $\varphi$ , ale i wzajemny stosunek ich niepewności.

Z analizy wynika, że nawet gdy niepewności mierzonych bezpośrednio składowych, np. amplitudy i fazy nie są ze sobą skorelowane, to niepewności wyznaczanych z nich składowych, w tym przypadku prostokątnych, już będą skorelowane. Wartość i znak współczynnika korelacji zależy od wartości stosunku niepewności wielkości wejściowych.

Wektorowe ujęcie propagacji niepewności dotyczy wszystkich wieloparametrowych pomiarów pośrednich, w tym wyznaczania parametrów układów elektrycznych. Przypadek skorelowanych wielkości wejściowych oraz przykłady pomiarów skojarzonych temperatur, składowych mocy prądu przemiennego, pola magnetycznego i obszar pokrycia 3D autorzy omówili w kwartalniku Pomiary Automatyka Robotyka 2/2018 [7]. Pomiary wielkości skojarzonych występują w szczególności w układach trójfazowych, np. przy przekształceniach trójkąt-gwiazda [8]. Zagadnienia te autorzy przedstawili też w trzech wystąpieniach na Sympozjum Podstawowych Problemów Metrologii PPM 2018 w Szczyrku [8].

## Bibliografia

1. *Prace Włodzimierza Krukowskiego*. PWN Warszawa 1956, Opracowanie zbiorowe Komisji Polskiej Akademii Nauk w składzie: Przewodniczący J. Groszkowski, vice-przewodniczący A. Metal, członkowie: H. Dziewulski (redaktor naczelny), K. Idaszewski, P. Nowacki i in., sekretarz: M. Nałęcz.
2. Warszawa Z.L., *Prace profesora Włodzimierza Krukowskiego (1887–1941) w dziedzinie układów pomiarowych i ich rola w rozwoju metrologii elektrycznej*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 58, Nr 1, 2012, 144–153.
3. *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities*. JCGM 102:2011 BIPM.
4. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Wyznaczanie parametrów multimezurandy z pomiarów wieloparametrowych. Część 1 Podstawy teoretyczne – w zarysie*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 2, 2011, 55–61.
5. Warszawa Z.L., *About evaluation of multivariate measurements results*. „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems”, Vol. 6, No. 4, 2012, 27–32.
6. Warszawa Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia. Oficyna Wydawnicza PIAP 2016, ISBN 978-83-61278-31-3.
7. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 2, 2018, 31–39, DOI: 1014313/PAR\_228/312.
8. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples*. Prezentacja ppt. Materiały Sympozjum PPM '18 Szczyrk 04–06. 05. 2018.

# Evaluation of the uncertainties of rectangular components of the impedance determined indirectly from measurements of polar components and vice versa

**Abstract:** The paper discusses the estimation of the uncertainties of rectangular components of the impedances determined indirectly from direct measurements of its polar components and vice versa. Patterns and functions for normalized absolute and relative uncertainties of a pair of impedance components determined indirectly from measurements of the remaining pair are given. Their correlation coefficient as a function of the phase angle of the impedance and the uncertainty of the measured pair is also included. The dependencies received were discussed in detail.

**Keywords:** uncertainty, indirect measurements, impedance components, covariance matrix

## doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–70, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



## dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

