Journal of KONBiN 2020
Volume 50, Issue 3
DOI 10.2478/jok-2020-0055

Bogdan LANDOWSKI, Daniel PERCZYŃSKI, Łukasz MUŚLEWSKI
UTP University of Science and Technology, Bydgoszcz
(Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy)

APPLICATION OF MARKOV MODEL FOR DETERMINATION OF AVERAGE LIFETIME OF A TRANSFORMER DISTRIBUTION SYSTEM

Zastosowanie markowskiego modelu do wyznaczenia średniego czasu życia systemu eksploatacji transformatorów rozdzielczych

Abstract: *The study presents an analysis of the operation process of elements of a system for electrical energy transformation in natural conditions of their usage. The research object is a system of HV and MV distribution transformer operation. The method of construction and an example of the Markov operation process have been presented for the analyzed technical objects. The model of the operation process was built on the basis of analysis of spatial states and events involved in operation of the analyzed technical objects. An average lifetime of the analyzed technical system was determined for assumptions accepted for a stochastic process which is a mathematical model of the distribution transformer operation process.*

Keywords: homogeneous Markov process, operation process, stochastic process, operating state, absorbing state, distribution transformer

Streszczenie: *W artykule przedstawiono analizę procesu eksploatacji elementów systemu transformacji energii elektrycznej w naturalnych warunkach ich użytkowania. Przedmiotem badań jest układ pracy transformatorów rozdzielczych wysokiego i średniego napięcia. Przedstawiono metodę budowy oraz przykład procesu eksploatacji Markowa dla analizowanych obiektów technicznych. Model procesu eksploatacji został zbudowany na podstawie analizy stanów przestrzennych i zdarzeń związanych z eksploatacją analizowanych obiektów technicznych. Wyznaczono średni czas życia analizowanego system technicznego, biorąc pod uwagę założenia przyjęte dla procesu stochastycznego, który jest modelem matematycznym procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych.*

Słowa kluczowe: jednorodny proces Markowa, proces eksploatacji, proces stochastyczny, stan obiektu, stan eksploatacyjny, stan pochłaniający, transformator rozdzielczy

1. Introduction

In order to provide the values of a technical object reliability indexes and reliability analyses of engineering, including the systems of electric energy transformation, it is necessary to acquire and process information on the system operation. For this purpose, it is necessary to do research in a real engineering system [12, 14].

The paper presents selected results of tests carried out in natural conditions of distribution transformer operation by the method of passive experiment. Due to the study goal, characteristics of correct operation time of Mv/lv transformers are presented.

Due to random character of the technical object operating state changes, modeling of the technical system processes and operation involves application of stochastic processes [2, 12, 14, 15, 22].

A natural model of the operation process of many categories of technical objects is random X(t) process with finite state space S and a set of parameters R+ (subset of real numbers ≥ 0). The Markov and semi-Markov process theory is used for mathematical modelling of the operation processes of many types of objects [2, 7, 8, 9, 11–15, 17–19, 23].

An analysis of engineering system models indicates the necessity to undertake rational actions to increase reliability and safety levels of technical objects that are used in these systems. Both analytical and simulation models are used for analysis of an engineering object operating state changes including those that occur in random time of damage. In literature the object operational state changes are modelled by means of homogeneous Markov and semi-Markov processes, as well as Markov and semi-Markov decision processes [2, 7–9, 11–15, 17–19].

In the work a homogeneous Markov X(t) process with a finite phase space S was used as a mathematical model of the process of distribution transformer operation.

In the field of technical sciences, Markov's stationary and homogeneous processes are used, among others, to build models of reliability, inventory systems, risk analyses of spare parts inventory management and to model processes of changes in the condition of technical objects [1, 4, 5, 13, 16, 22].

Among others, the application of a homogenous Markov process for determination of decision indicators of technical objects has been presented, in [13].

As far as electricity transformation systems are concerned, the Markov models are used, among others, to determine the optimal number of backup transformers [3, 6, 16]. In this area, the goal function in the form of minimizing the costs associated with the use of a backup system and downtime is most frequently used for optimization, as well as the method of cost-benefit analysis of using backup transformers.

Markov processes are also used as elements of multistage methods for a real system analysis. For example, among other things, work [16] presents a probabilistic three-stage method for determination of the optimum number of back-up transformers for power substations, where the Markov models of the system operation state description are used in one of the stages.

The paper presents the possibility of using the Markov process theory to analyze the electricity transformation system related to the system so called 'life cycle'.

An analysis of experimental tests performed in natural conditions and a study of engineering systems and processes can provide the basis for undertaking actions to increase the system operation efficiency [14, 15].

2. Model of the operation process of electricity transformation system elements

The study includes an analysis of the operation process of technical objects used in an electric energy transformation system within the Distribution Company area. The research object is a system of Mv/lv transformers made up of five subsystems which include:

- working subsystem containing n, $n \geq 1$, of basic elements necessary to provide service $E_1, E_2, ..., E_n$,
- repair subsystem situated on the territory of Distribution Company (SD),
- repair subsystem of the Transformer Repair Company for which the mean time of repair is longer than the mean time of repair in the repair subsystem SD $\overline{T}_3 > \overline{T}_2$,
- liquidation subsystem,
- reserve subsystem containing k, $k \geq 0$,of reserve elements.

A homogeneous Markov process $X(t)$ is assumed to be a model of the operation process of the transformer set. $X(t)$ process has a finite phase space S={1,2,3,4,5},

particulary when:

$X(t)$=1, in time t transformer works in the transformer station,

$X(t)$=2, in time t transformer is at the repair station SD,

$X(t)$=3, in time t it is renovated in the Transformer Repair Company,

$X(t)$=4, in time t it is being liquidated,

$X(t)$=5, in time t transformer is in reserve.

Let $P_i(t) = P\{X(t)=i\}$ mean the probability that in time t, process $X(t)$ is in state i. It is assumed that S1 is the initial state, that is, the initial distribution is as follows:

$P\{X(0)=1\}=1$, $P\{X(0)=i\}=0$ for i=2,3,4,5.

Intensity of transformations between the states is included into A matrix on the basis of the real operation process of distribution transformers.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_3 \\ \hat{\lambda} & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \end{bmatrix} \tag{1}$$

To simplify the record, denotations $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ are used.
Transition rate matrix Λ allows to build a system of differential equations in the form:

$$\begin{aligned} P'_1(t) &= -\lambda P_1(t) + \hat{\lambda} P_5(t) \\ P'_2(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \mu_1 P_2(t) \\ P'_3(t) &= \lambda_2 P_1(t) - \mu_2 P_3(t) \\ P'_4(t) &= \lambda_3 P_1(t) - \mu_3 P_2(t) \\ P'_5(t) &= \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) + \mu_3 P_4(t) - \hat{\lambda} P_5(t) \end{aligned} \tag{2}$$

System of differential equations (2) in a matrix record takes the form:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \\ P_5'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda} \\ \lambda_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & -\hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

taking into account denotation (1) of equation system (5), it can be written:

$$P_1(0)=1,\ P_2(0)= P_3(0)= P_4(0)= P_5(0)=0 \tag{4}$$

The systems of linear differential equations can be solved by means of Laplace transform, which considering initial condition (4), has the form:

$$
\begin{aligned}
s\widetilde{P}_1(s) - 1 &= -\lambda \widetilde{P}_1(s) + \hat{\lambda}\, \widetilde{P}_5(s) \\
s\widetilde{P}_2(s) &= \lambda_1 \widetilde{P}_1(s) - \mu_1 \widetilde{P}_2(s) \\
s\widetilde{P}_3(s) &= \lambda_2 \widetilde{P}_1(s) - \mu_2 \widetilde{P}_3(s) \\
s\widetilde{P}_4(s) &= \lambda_3 \widetilde{P}_1(s) - \mu_3 \widetilde{P}_4(s) \\
s\widetilde{P}_5(s) &= \mu_1 \widetilde{P}_2(s) + \mu_2 \widetilde{P}_3(s) + \mu_3 \widetilde{P}_4(s) - \hat{\lambda}\, \widetilde{P}_5(s)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

taking into account denotation (1) of equation system (5), it can be written:

$$P'(t) = \Lambda^T P(t) \tag{6}$$

where:

$$P'(t) = [P'_1(t), P'_2(t), P'_3(t), P'_4(t), P'_5(t)]^T,$$

$$P(t) = [P_1(t), P_2(t), P_3(t), P_4(t), P_5(t)]^T.$$

Matrix record of a linear equation system for the transforms has the form:

$$
\begin{bmatrix}
\lambda + s & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\
-\lambda_1 & \mu_1 + s & 0 & 0 & 0 \\
-\lambda_2 & 0 & \mu_2 + s & 0 & 0 \\
-\lambda_3 & 0 & 0 & \mu_3 + s & 0 \\
0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & \hat{\lambda} + s
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\tilde{P}_1(s) \\ \tilde{P}_2(s) \\ \tilde{P}_3(s) \\ \tilde{P}_4(s) \\ \tilde{P}_5(s)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\tag{7}
$$

It is not difficult to solve equation system (7) but implementation of a reverse Laplace transform is impossible. It results from the fact that the main determinant of equation system (7) is the fifth degree polynominal in relation to variable s and it is difficult to apply a distribution of this polynominal into linear or square factors for random values of the system parameters λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 i μ_3.

3. Determination of the system average lifetime

State 4 is assumed to be an absorbing state, that is $\mu_3 = 0$. In practice, it means that liquidation of a transformer is not immediately followed by a purchase of a new one.

In this case the system of differential equations has the form:

$$\begin{aligned}
P'_1(t) &= -\lambda P_1(t) + \hat{\lambda} P_5(t) \\
P'_2(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \mu_1 P_2(t) \\
P'_3(t) &= \lambda_2 P_1(t) - \mu_2 P_3(t) \\
P'_4(t) &= \lambda_3 P_1(t), \\
P'_5(t) &= \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) - \hat{\lambda} P_5(t)
\end{aligned} \tag{8}$$

Laplace transform of equation system (8), taking into account the initial conditions, is as follows:

$$\begin{aligned}
s\widetilde{P}_1(s) - 1 &= -\lambda \widetilde{P}_1(s) + \hat{\lambda} \widetilde{P}_5(s) \\
s\widetilde{P}_2(s) &= \lambda_1 \widetilde{P}_1(s) - \mu_1 \widetilde{P}_2(s) \\
s\widetilde{P}_3(s) &= \lambda_2 \widetilde{P}_1(s) - \mu_2 \widetilde{P}_3(s) \\
s\widetilde{P}_4(s) &= \lambda_3 \widetilde{P}_1(s) \\
s\widetilde{P}_5(s) &= \mu_1 \widetilde{P}_2(s) + \mu_2 \widetilde{P}_3(s) - \hat{\lambda} \widetilde{P}_5(s)
\end{aligned} \tag{9}$$

Equation system (9) can be written in a matrix record in the form:

$$\begin{bmatrix} \lambda + s & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\ -\lambda_1 & \mu_1 + s & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \mu_2 + s & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_2 & 0 & \hat{\lambda} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_1(s) \\ \widetilde{P}_2(s) \\ \widetilde{P}_3(s) \\ \widetilde{P}_4(s) \\ \widetilde{P}_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Equation system (10) can be solved by the Cramer method. The main determinant of the equation system has the form:

$$W(s)=\begin{vmatrix} s+\lambda & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\ -\lambda_1 & s+\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & & s+\mu_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_2 & 0 & s+\hat{\lambda} \end{vmatrix} \tag{11}$$

After successive developments and calculation of a third degree determinant we receive:

$$W(s) = s(s+\lambda)(s+\hat{\lambda})(s+\mu_1)(s+\mu_2) - s\hat{\lambda}[\lambda_1\mu_1(s+\mu_2) + \lambda_2\mu_2(s+\mu_1)] \tag{12}$$

Determinants are determined in an analogical manner:

$$W_1(s) = s(s+\hat{\lambda})(s+\mu_1)(s+\mu_2)$$

$$W_2(s) = s\lambda_1(s+\mu_2)(s+\hat{\lambda})$$

$$W_3(s) = s\lambda_2(s+\mu_1)(s+\hat{\lambda})$$

$$W_4(s) = \lambda_3(s+\mu_1)(s+\mu_2)(s+\hat{\lambda})$$

$$W_5(s) = s[\lambda_1\mu_1(s+\mu_2) + \lambda_2\mu_2(s+\mu_1)].$$

The mean lifetime of the system process is an important indicator of the system described by the $X(t)$ process. Without determination of reverse transforms which enables $P_i(t)$ probability determination, where i = 1,2,3,4,5, it is possible to determine values of the mean time of being in particular operating states. It is known that [1]:

$$E(T_1+T_2+T_3+T_5) = \lim_{s\to 0^+}\left[\frac{1}{s} - \tilde{P_4}(s)\right] \tag{13}$$

where T_i stands for the mean time of being in state i, and

$$\tilde{P}_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)} = \frac{\lambda_3(s+\mu_1)(s+\mu_2)(s+\hat{\lambda})}{s\left[(s+\lambda)\left(s+\hat{\lambda}\right)(s+\mu_1)(s+\mu_2) - \hat{\lambda}\left[\lambda_1\mu_1(s+\mu_2)+\lambda_2\mu_2(s+\mu_1)\right]\right]} \quad (14)$$

Let $W(s) = sM(s)$, then:

$$\frac{1}{s} - \tilde{P}_4(s) = \frac{1}{s} - \frac{W_4(s)}{sM(s)} = \frac{M(s)-W_4(s)}{sM(s)} \quad (15)$$

After values $M(s)$ and $W_4(s)$ are calculated, we receive:

$$M(0) = \hat{\lambda}\lambda_3\mu_1\mu_2 \quad (16)$$

$$W_4(0) = \hat{\lambda}\lambda_3\mu_1\mu_2 \quad (17)$$

Boundary

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{M(s)-W_4(s)}{sM(s)} \quad (18)$$

is a boundary of the type [0/0], where $M(s)$ is a fourth degree polynominal in relation to s, and $W_4(s)$ is a third degree polynominal.

Coefficient near s, for M(s) is equal to:

$$\lambda\hat{\lambda}\mu_1+\lambda\hat{\lambda}\mu_2+(\lambda+\hat{\lambda})\mu_1\mu_2-\hat{\lambda}\lambda_1\mu_1-\hat{\lambda}\lambda_2\mu_2 \quad (19)$$

And for $W_4(s)$

$$\lambda_3(\mu_1\mu_2 + \hat{\lambda}\mu_1 + \hat{\lambda}\mu_2) \quad (20)$$

Hence, we conclude that boundary

$$\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{1}{s} - \tilde{P}_4(s)\right] = \frac{\mu_1\mu_2(\lambda+\hat{\lambda}-\lambda_3)+\hat{\lambda}\lambda_2\mu_1+\hat{\lambda}\lambda_1\mu_2}{\hat{\lambda}\lambda_3\mu_1\mu_2} \quad (21)$$

It is convenient to present the mean value $ET=ET_1+ET_2+ET_3+ET_5$ in the form:

$$ET = \frac{\lambda + \hat{\lambda} - \lambda_3}{\hat{\lambda}\ \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3\mu_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3\mu_1} \tag{22}$$

4. Selected test results

Experimental tests were conducted in order to determine the values of transformation rate between the transformer operating states. The tests were carried out in one of the Distribution Companies operating in the north-central part of Poland, in the period of 2016–2017. The analyzed company uses more than 9000 distribution transformers. The tests were carried out in natural conditions of the company operation in the form of a passive experiment. The selected test results, presented in tab. 1, relate to the time of correct operation of all the used transformers without differentiating the power group, type, characteristics, etc. It is caused by that fact that the mean time of the distribution transformer correct operation is relatively long which makes it difficult to conduct tests and limits the number of observations.

Table 1

The values of selected statistics of correct operation (until the first damage) of distribution transformers MN/LN used by the analyzed Distribution Company

Statistics	Year 2016	Year 2017	Years 2016-2017
population	78	74	152
median	20,58	28.64	24.50
standard deviation	8,28	8.39	9.24
minimum	3.00	5.00	3.00
maximum	37.00	44.00	44.00
variance	68.53	70.45	85.34

The value of ET were calculated for data obtained from a real distribution transformer operation system. The value is presented in tab. 2.

Table 2

Dependence of the system mean lifetime in a function of intensity $\hat{\lambda}$, for constant values of parameters equal to λ=0.041, μ_2=17.823, μ_1=33.826

$\hat{\lambda}$	ET
0.05	65.27
0.10	52.02
0.15	47.60
0.20	45.39
0.25	44.06
0.30	43.18
0.35	42.55
0.40	42.07
0.45	41.70
0.50	41.41
0.55	41.17
0.60	40.97
0.65	40.79
0.70	40.65
0.75	40.53
0.80	40.42
0.85	40.32
0.90	40.23
0.95	40.16
1.00	40.08

5. Conclusions

The aim of the study was, among other things, to present the possibility of using the Markov process theory to model the operation of distribution transformers. Application of the model containing the so called absorbing state enables preliminary estimation of the system lifetime, in which the technical infrastructure that performs the main tasks is not purchased and which, due to its condition, is liquidated. The technical infrastructure analyzed in this study are distribution transformers.

The presented modelling method and the method for the system lifetime determination using the absorbing state may be particularly useful when it is impossible or inefficient to purchase new facilities of the same type in place of the liquidated ones. This may result from changes in the system environment, e.g. significant change in technology or introduction of legal standards for environmental protection.

The use of the considerations presented in the paper and the model developed by the decision-makers of the analyzed system of operation makes it possible to predict time after which the system will cease to fully perform its tasks if no investments in purchasing new transformers are undertaken.

The developed method for construction and analysis of the presented research object model and the determined dependence of the system average life may provide the basis for determining the necessary number of reserve elements in order to provide the system with required average lifetime.

An analysis of the transformer operation system model presented in this study can be generalized to cover a bigger number of repairs.

6. References

1. Bobrowski D.: Modele i metody matematyczne teorii niezawodności w przykładach i zadaniach. WNT, Warszawa 1985.
2. Buslenko N., Kałasznikow W., Kowalenko I.: Teoria systemów złożonych. PWN, Warszawa 1979.
3. Hamoud G.A.: Use of Markov Models in Assessing Spare Transformer Requirements for Distribution Stations. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 27, No. 2, May 2012, DOI 10.1109/TPWRS.2011.2177999.
4. Hamoud G.A., Lee L., Faried S.O.: Spare Assessment of Distribution Power Transformers using Two Markov Models. 2019 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM), Atlanta, GA, USA, 2019, DOI 10.1109/PESGM 40551.2019.8973546.
5. Hamoud G.A., Yiu C.: Assessment of Spare Parts for System Components Using a Markov Model. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 35, No. 4, July 2020, DOI 10.1109/TPWRS.2020.2966913.
6. Hamoud G.A., Yiu C.: One Markov Model for Spare Analysis of Distribution Power Transformers. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 31, No. 2, March 2016, DOI 10.1109/TPWRS.2015.2431820.
7. Kostek R., Landowski B., Muślewski Ł.: Simulation of rolling bearing vibration in diagnostics. Journal of Vibroengineering, Vol. 17, Iss. 8, 2015.
8. Girtler J.: Application of theory of semi-Markov processes to determining distribution of probabilistic process of marine accidents resulting from collision of ships. Polish Maritime Research, No. 1, 2014.
9. Girtler J.: Possibility of estimating the reliability of diesel engines by applying the theory of semi-Markov processes and making operational decisions by considering reliability of diagnosis on technical state of this sort of combustion engines. Combustion Engines, Vol. 163(4), 2015.
10. Grabski F.: Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji. PAN IBS, seria: Badania Systemowe, t. 30, Warszawa 2002.

11. Landowski B., Muślewski Ł., Pająk M., Polishchuk O.: Method for initial assessment of unit costs of public city transport means operation. MATEC Web of Conferences 182, 01010 (2018), 17th International Conference Diagnostics of Machines and Vehicles, DOI 10.1051/matecconf/201818201010.
12. Landowski B., Pająk M., Żółtowski B., Muślewski Ł.: Method of building a model of operational changes for the marine combustion engine describing the impact of the damages of this engine on the characteristics of its operation process. Polish Maritime Research, No. 4 (96), Vol. 24, 2017.
13. Landowski B, Perczyński D., Kolber P., Muślewski Ł.: An example of Markov model of technical objects maintenance process. Engineering Mechanics 2016, 22nd International Conference, Svratka, Czech Republic. Book of full texts, Institute of Thermomechanics Academy of Sciences of the Czech Republic, 2016.
14. Landowski B., Woropay M., Neubauer A.: Sterowanie niezawodnością w systemach transport. Wydawnictwo ITE, Radom 2004.
15. Landowski B.: Numerical simulation of the process of a technical object state changes. Journal of KONBiN, No. 44, 2017, DOI 10.2478/jok-2018-0013.
16. Leite da Silva A.M., de Carvalho Costa J.G., Chowdhury A.A.: Probabilistic Methodologies for Determining the Optimal Number of Substation Spare Transformers. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 25, No. 1, 2010, DOI 10.1109/TPWRS.2009.2030280.
17. Muślewski Ł., Landowski B., Mackiewicz N., Pająk M.: Research and analysis of work ergonomics of selected transport means operators. International Automotive Conference (KONMOT 2018), Materials Science and Engineering; 1757-8981, 2018, DOI 10.1088/1757-899X/421/3/032020.
18. Muślewski Ł., Knopik L., Landowski B., Polishchuk O.: Analysis of assessment criteria for selected systems of transport means operation. MATEC Web of Conferences 182, 02003 (2018), 17th International Conference Diagnostics of Machines and Vehicles, 2018, DOI 10.1051/matecconf/201818202003.
19. Pająk M., Muślewski Ł., Landowski B.: Optimisation of changes of the operation quality of the transportation system in the fuzzy quality states space, International Automotive Conference (KONMOT 2018), Materials Science and Engineering; 1757-8981, 2018, DOI:10.1088/1757-899X/421/3/032023.
20. Puterman M.L.: Markov decision processes. John Wiley, New York 1994.
21. Puterman M.L.: Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming. John Wiley & Sons, 2014.
22. Sołowiew A.D.: Analityczne metody w teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1983.
23. Tee K., Ekpiwhre E., Yi Z.: Degradation modelling and life expectancy using Markov chain model for carriageway. Int J Qual Reliab Manag, No. 35, 2018.

ZASTOSOWANIE MARKOWSKIEGO MODELU DO WYZNACZENIA ŚREDNIEGO CZASU ŻYCIA SYSTEMU EKSPLOATACJI TRANSFORMATORÓW ROZDZIELCZYCH

1. Wprowadzenie

Do wyznaczania wartości wskaźników niezawodności obiektów technicznych oraz analiz niezawodności w systemach eksploatacji, w tym systemach transformacji energii elektrycznej niezbędne jest pozyskanie i przetworzenie informacji eksploatacyjnej. W tym celu konieczna jest realizacja badań w rzeczywistym systemie eksploatacji obiektów technicznych [12, 14].

W pracy przedstawiono wybrane wyniki badań przeprowadzonych w naturalnych warunkach eksploatacji transformatorów rozdzielczych metodą eksperymentu biernego. Ze względu na cel pracy przedstawiono charakterystykę czasu poprawnej pracy transformatorów ŚN/nN.

Ze względu na losowy charakter zmian stanów obiektów technicznych do modelowania procesów i systemów eksploatacji powszechnie stosuje się procesy stochastyczne [2, 12, 14, 15, 22].

Naturalnym modelem procesu eksploatacji wielu kategorii obiektów technicznych jest proces losowy X(t) o skończonej przestrzeni stanów S i zbiorze parametrów R+ (podzbiór liczb rzeczywistych ≥ 0). Do matematycznego modelowania procesów eksploatacji wielu rodzajów obiektów stosuje się teorię procesów Markowa i semi-Markowa [2, 7, 8, 9, 11–15, 17–19, 23].

Analiza wyników badań modeli procesów i systemów eksploatacji umożliwia podjęcie racjonalnych działań prowadzących do zwiększenia poziomu niezawodności i bezpieczeństwa obiektów technicznych. Do analizy procesów zmian stanów obiektów, w tym związanych z występowaniem uszkodzeń w losowych chwilach, wykorzystuje się zarówno metody analityczne, jak i symulacyjne. W literaturze przedmiotu często do modelowania zmian stanów eksploatacyjnych stosowane są jednorodne procesy Markowa i semi-Markowa, a także decyzyjne procesy Markowa i semi-Markowa [2, 7– 9, 11,15, 17–19].

W pracy jako matematyczny model procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych zastosowano jednorodny proces Markowa X(t) ze skończoną przestrzeń fazową S.

W dziedzinie nauk technicznych stacjonarne i jednorodne procesy Markowa wykorzystywane są m.in. do budowy modeli w obszarze niezawodności, systemów inwentaryzacyjnych, analiz ryzyka zarządzania zapasami części zamiennych oraz do modelowania procesów zmian stanów obiektów technicznych [1, 4, 5, 13, 16, 22]

Zastosowanie jednorodnego procesu Markowa do wyznaczania wskaźników decyzyjnych obiektów technicznych przedstawiono między innymi w pracy [13].

W zakresie systemów transformacji energii elektrycznej modele markowskie stosuje się m.in. do wyznaczania optymalnej liczby transformatorów zapasowych [3, 6, 16]. W tym obszarze do optymalizacji najczęściej wykorzystuje się funkcję celu w postaci minimalizacji kosztów związanych z wykorzystaniem systemu rezerwowego i przestojami oraz metodę analizy kosztów i korzyści stosowania rezerwowych transformatorów.

Procesy Markowa stosuje się także jako elementy wieloetapowych metod analizy systemów rzeczywistych. Dla przykładu, m.in. w pracy [16] przedstawiono probabilistyczną trzyetapową metodę wyznaczania optymalnej liczby transformatorów zapasowych dla podstacji elektroenergetycznych, gdzie w jednym z etapów stosuje się markowskie modele opisu stanów operacyjnych systemu.

W pracy przedstawiono możliwość wykorzystania teorii procesów Markowa do analiz systemu transformacji energii elektrycznej związanych z tzw. czasem życia systemu.

Analiza wyników badań eksploatacyjnych zrealizowanych w naturalnych warunkach eksploatacji oraz badań modeli procesów i systemów eksploatacji może stanowić podstawę do podjęcia działań przez decydentów systemu eksploatacji zmierzających do zwiększenia efektywności działania tego systemu [14, 15].

2. Model procesu eksploatacji elementów systemu transformującego energię elektryczną

W pracy poddano analizie proces eksploatacji elementów systemu transformującego energię elektryczną na terenie Spółki Dystrybucyjnej (SD). Obiektem badań jest system transformatorów ŚN/nN, złożony z pięciu podsystemów:

- podsystemu roboczego, zawierającego n, $n \geq 1$, elementów podstawowych, niezbędnych do wykonania zadania $E_1, E_2, \ldots, E_n$,
- podsystemu odnowy wydzielonego na terenie Spółki Dystrybucyjnej,
- podsystemu odnowy Zakładu Naprawy Transformatorów, dla którego średni czas odnowy jest większy od średniego czasu odnowy w podsystemie odnowy SD $\overline{T}_3 > \overline{T}_2$,
- podsystemu likwidacji,
- podsystemu rezerwowego, zawierającego k, $k \geq 0$, elementów rezerwowych.

Zakładamy, że modelem procesu eksploatacji zbioru transformatorów jest jednorodny proces Markowa $X(t)$. Proces $X(t)$ ma skończoną przestrzeń fazową S={1,2,3,4,5}, w szczególności jeśli:

$X(t)=1$, to w chwili t transformator pracuje w stacji transformatorowej,

$X(t)=2$, to w chwili t transformator znajduje się na stanowisku naprawczym SD,

$X(t)$=3, to w chwili t trwa odnowa w Zakładzie Naprawy Transformatorów,

$X(t)$=4, to w chwili t trwa jego likwidacja,

$X(t)$=5, to w chwili t transformator znajduje się w rezerwie.

Niech $P_i(t) = P\{X(t)=i\}$ oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili t proces $X(t)$ znajduje się w stanie i. Zakładamy, że stanem początkowym jest stan S1, tzn., że rozkład początkowy ma postać:

$P\{X(0)=1\}=1,\ P\{X(0)=i\}=0$ dla i=2,3,4,5.

Na podstawie zidentyfikowanego, rzeczywistego procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych intensywność przejść między stanami procesu ujęto w macierzy Λ.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_3 \\ \hat{\lambda} & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \end{bmatrix} \tag{1}$$

W celu uproszczenia zapisu wprowadzono oznaczenie $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Macierz intensywności przejść Λ pozwala na zbudowanie układu równań różniczkowych postaci:

$$\begin{aligned} P'_1(t) &= -\lambda P_1(t) + \hat{\lambda} P_5(t) \\ P'_2(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \mu_1 P_2(t) \\ P'_3(t) &= \lambda_2 P_1(t) - \mu_2 P_3(t) \\ P'_4(t) &= \lambda_3 P_1(t) - \mu_3 P_2(t) \\ P'_5(t) &= \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) + \mu_3 P_4(t) - \hat{\lambda} P_5(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Układ równań różniczkowych (2) w zapisie macierzowym przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \\ P_5'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda} \\ \lambda_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & -\hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Aby powyższy układ równań miał jednoznaczne rozwiązania, należy przyjąć warunki początkowe. Na podstawie rozkładu początkowego procesu $X(t)$ możemy zapisać:

$$P_1(0)=1, \quad P_2(0)= P_3(0)= P_4(0)= P_5(0)=0 \quad (4)$$

Układy równań różniczkowych liniowych wygodnie jest rozwiązać za pomocą transformaty Laplace'a, która po uwzględnieniu warunku początkowego (4) ma postać:

$$\begin{gathered}
s\widetilde{P}_1(s)-1 = -\lambda \widetilde{P}_1(s) + \hat{\lambda}\, \widetilde{P}_5(s) \\
s\widetilde{P}_2(s) = \lambda_1 \widetilde{P}_1(s) - \mu_1 \widetilde{P}_2(s) \\
s\widetilde{P}_3(s) = \lambda_2 \widetilde{P}_1(s) - \mu_2 \widetilde{P}_3(s) \\
s\widetilde{P}_4(s) = \lambda_3 \widetilde{P}_1(s) - \mu_3 \widetilde{P}_4(s) \\
s\widetilde{P}_5(s) = \mu_1 \widetilde{P}_2(s) + \mu_2 \widetilde{P}_3(s) + \mu_3 \widetilde{P}_4(s) - \hat{\lambda}\, \widetilde{P}_5(s)
\end{gathered} \tag{5}$$

Uwzględniając oznaczenie (1), układ równań (5) można zapisać następująco:

$$P'(t) = \Lambda^T P(t) \tag{6}$$

gdzie:

$$P'(t) = [P'_1(t), P'_2(t), P'_3(t), P'_4(t), P'_5(t)]^T,$$

$$P(t) = [P_1(t), P_2(t), P_3(t), P_4(t), P_5(t)]^T.$$

Macierzowy zapis układu równań liniowych dla transformat ma postać:

$$\begin{bmatrix} \lambda + s & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\ -\lambda_1 & \mu_1 + s & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \mu_2 + s & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & \mu_3 + s & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & \hat{\lambda} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_1(s) \\ \widetilde{P}_2(s) \\ \widetilde{P}_3(s) \\ \widetilde{P}_4(s) \\ \widetilde{P}_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Rozwiązanie układu równań (7) nie jest trudne, ale zrealizowanie odwrotnej transformaty Laplace'a jest niemożliwe. Wynika to z faktu, że wyznacznik główny układu równań (7) jest wielomianem 5. stopnia względem zmiennej s i trudno jest dokonać rozkładu tego wielomianu na czynniki liniowe lub kwadratowe dla dowolnych wartości parametrów systemu λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 i μ_3.

3. Wyznaczenia średniego czasu życia systemu

Zakładamy teraz, że stan 4 jest stanem pochłaniającym, tzn. $\mu_3 = 0$. W praktyce oznacza to, że po likwidacji transformatora nie następuje natychmiastowy zakup nowego.

W tym przypadku układ równań różniczkowych ma postać:

$$\begin{aligned}
P'_1(t) &= -\lambda P_1(t) + \hat{\lambda} P_5(t) \\
P'_2(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \mu_1 P_2(t) \\
P'_3(t) &= \lambda_2 P_1(t) - \mu_2 P_3(t) \\
P'_4(t) &= \lambda_3 P_1(t) \\
P'_5(t) &= \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) - \hat{\lambda} P_5(t)
\end{aligned} \tag{8}$$

Transformata Laplace'a układu równań (8) po uwzględnieniu warunków początkowych ma postać:

$$\begin{aligned}
s\widetilde{P}_1(s) - 1 &= -\lambda \widetilde{P}_1(s) + \hat{\lambda} \widetilde{P}_5(s) \\
s\widetilde{P}_2(s) &= \lambda_1 \widetilde{P}_1(s) - \mu_1 \widetilde{P}_2(s) \\
s\widetilde{P}_3(s) &= \lambda_2 \widetilde{P}_1(s) - \mu_2 \widetilde{P}_3(s) \\
s\widetilde{P}_4(s) &= \lambda_3 \widetilde{P}_1(s) \\
s\widetilde{P}_5(s) &= \mu_1 \widetilde{P}_2(s) + \mu_2 \widetilde{P}_3(s) - \hat{\lambda} \widetilde{P}_5(s)
\end{aligned} \tag{9}$$

W zapisie macierzowym układ równań (9) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \lambda + s & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\ -\lambda_1 & \mu_1 + s & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \mu_2 + s & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_2 & 0 & \hat{\lambda} + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_1(s) \\ \widetilde{P}_2(s) \\ \widetilde{P}_3(s) \\ \widetilde{P}_4(s) \\ \widetilde{P}_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Układ równań (10) rozwiążemy metodą Cramera. Wyznacznik główny układu równań ma postać:

$$W(s) = \begin{vmatrix} s + \lambda & 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda} \\ -\lambda_1 & s + \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & & s + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_2 & 0 & s + \hat{\lambda} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Po wykonaniu kolejnych rozwinięć i obliczeniu wyznacznika 3. stopnia otrzymujemy:

$$W(\mathrm{s}) = \mathrm{s}(\mathrm{s}+\lambda)\ (\mathrm{s}+\hat{\lambda}\ )\ (\mathrm{s}+\mu_1)\ (\mathrm{s}+\mu_2) - \mathrm{s}\,\hat{\lambda}\ [\lambda_1\mu_1(\mathrm{s}+\mu_2) + \lambda_2\mu_2(\mathrm{s}+\mu_1)] \tag{12}$$

W analogiczny sposób wyznaczamy wyznaczniki:

$$W_1(\mathrm{s}) = \mathrm{s}(\mathrm{s}+\hat{\lambda}\ )\ (\mathrm{s}+\mu_1)\ (\mathrm{s}+\mu_2)$$

$$W_2(\mathrm{s}) = \mathrm{s}\lambda_1(\mathrm{s}+\mu_2)\ (\mathrm{s}+\hat{\lambda}\ )$$

$$W_3(\mathrm{s}) = \mathrm{s}\lambda_2(\mathrm{s}+\mu_1)\ (\mathrm{s}+\hat{\lambda}\ )$$

$$W_4(\mathrm{s}) = \lambda_3(\mathrm{s}+\mu_1)\ (\mathrm{s}+\mu_2)\ (\mathrm{s}+\hat{\lambda}\ )$$

$$W_5(\mathrm{s}) = \mathrm{s}[\lambda_1\mu_1(\mathrm{s}+\mu_2) + \lambda_2\mu_2(\mathrm{s}+\mu_1)].$$

Ważnym wskaźnikiem systemu opisywanego przez proces $X(t)$ jest średni czas życia systemu. Bez wyznaczania transformat odwrotnych, które umożliwiają wyznaczenie prawdopodobieństw $P_i(t)$, gdzie i = 1,2,3,4,5, można wyznaczyć wartości średnie czasów przebywania w stanach. Wiadomo [1], że

$$E(T_1+T_2+T_3+T_5) = \lim_{s\to 0^+}\left[\frac{1}{s} - \tilde{P_4}(s)\right] \tag{13}$$

gdzie T_i oznacza średni czas przebywania w stanie i, oraz

$$\tilde{P}_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)} = \frac{\lambda_3(s+\mu_1)(s+\mu_2)(s+\hat{\lambda})}{s\left[(s+\lambda)\left(s+\hat{\lambda}\right)(s+\mu_1)(s+\mu_2) - \hat{\lambda}\left[\lambda_1\mu_1(s+\mu_2)+\lambda_2\mu_2(s+\mu_1)\right]\right]} \tag{14}$$

Niech W(s) = sM(s), wtedy

$$\frac{1}{s} - \widetilde{P}_4(s) = \frac{1}{s} - \frac{W_4(s)}{sM(s)} = \frac{M(s)-W_4(s)}{sM(s)} \tag{15}$$

Po obliczeniu wartości M(s) i W_4(s) otrzymujemy:

$$M(0) = \hat{\lambda}\,\lambda_3\mu_1\mu_2 \tag{16}$$

$$W_4(0) = \hat{\lambda}\,\lambda_3\mu_1\mu_2 \tag{17}$$

Granica

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{M(s)-W_4(s)}{sM(s)} \tag{18}$$

jest granicą typu [0/0], gdzie $M(s)$ jest wielomianem stopnia czwartego względem s, a $W_4(s)$ jest wielomianem stopnia trzeciego.

Współczynnik przy s dla $M(s)$ jest równy

$$\lambda\hat{\lambda}\mu_1+\lambda\hat{\lambda}\mu_2+(\lambda+\hat{\lambda})\mu_1\mu_2-\hat{\lambda}\lambda_1\mu_1-\hat{\lambda}\lambda_2\mu_2, \tag{19}$$

a dla $W_4(s)$

$$\lambda_3(\mu_1\mu_2+\hat{\lambda}\mu_1+\hat{\lambda}\mu_2) \tag{20}$$

Stąd wnioskujemy, że granica

$$\lim_{s \to 0^+} \left[\frac{1}{s} - \tilde{P}_4(s) \right] = \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda + \hat{\lambda} - \lambda_3) + \hat{\lambda}\lambda_2 \mu_1 + \hat{\lambda}\lambda_1 \mu_2}{\hat{\lambda}\lambda_3 \mu_1 \mu_2} \tag{21}$$

Wygodnie jest przedstawić wartość średnią $ET=ET_1+ET_2+ET_3+ET_5$ w postaci

$$ET = \frac{\lambda + \hat{\lambda} - \lambda_3}{\hat{\lambda}\ \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3 \mu_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3 \mu_1} \tag{22}$$

4. Wybrane wyniki badań

W celu wyznaczenia wartości intensywności zmian stanów eksploatacyjnych badanych transformatorów wykonano badania eksploatacyjne. Badaniami objęto jedną ze Spółek Dystrybucyjnych działającą na obszarze środkowo-północnej Polski w okresie 2016–2017. Analizowana spółka eksploatuje w swoim systemie ponad 9000 transformatorów rozdzielczych. Badania przeprowadzono w naturalnych warunkach eksploatacji transformatorów metodą eksperymentu biernego. Przedstawione w tab. 1 wybrane wyniki badań dotyczą czasu poprawnej pracy wszystkich eksploatowanych transformatorów bez rozróżnienia grupy mocowej, typu, itp. cech. Wynika to z faktu, że średni czas poprawnej pracy transformatorów rozdzielczych jest stosunkowo długi, co utrudnia realizację badań i ogranicza liczbę obserwacji.

Tabela 1

Wartości wybranych statystyk czasu poprawnej pracy (do pierwszego uszkodzenia) transformatorów rozdzielczych ŚN/nN eksploatowanych przez analizowaną Spółkę Dystrybucyjną

Statystyka	Rok 2016	Rok 2018	Lata 2016-2018
Liczność	78	74	152
Średnia	20,58	28.64	24.50
Odchylenie standardowe	8,28	8.39	9.24
Minimum	3.00	5.00	3.00
Maksimum	37.00	44.00	44.00
Wariancja	68.53	70.45	85.34

Dla danych uzyskanych z rzeczywistego systemu eksploatacji transformatorów rozdzielczych obliczono wartość ET, którą przedstawiono w tab. 2.

Tabela 2

Zależność średniego czasu życia systemu w funkcji intensywności $\hat{\lambda}$, przy stałych wartościach parametrów równych λ=0,041, μ_2=17,823, μ_1=33,826

$\hat{\lambda}$	ET
0,05	65,27
0,10	52,02
0,15	47,60
0,20	45,39
0,25	44,06
0,30	43,18
0,35	42,55
0,40	42,07
0,45	41,70
0,50	41,41
0,55	41,17
0,60	40,97
0,65	40,79
0,70	40,65
0,75	40,53
0,80	40,42
0,85	40,32
0,90	40,23
0,95	40,16
1,00	40,08

5. Podsumowanie

Celem rozważań było m.in. przedstawienie możliwości wykorzystania teorii procesów Markowa do modelowania procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych. Zastosowanie modelu zawierającego tzw. stan pochłaniający pozwala na wstępne oszacowanie czasu życia sytemu, w którym nie dokonuje się zakupu infrastruktury technicznej realizującej główne zadania, która ze względu na jej stan ulega likwidacji. Analizowaną w pracy infrastrukturą techniczną są transformatory rozdzielcze.

Przedstawiona metoda modelowania oraz sposób wyznaczania czasu życia systemu z zastosowaniem stanu pochłaniającego może być szczególnie przydatna w przypadkach, gdy zakup nowych obiektów tego samego typu w miejsce likwidowanych jest niemożliwy bądź nieefektywny. Może to wynikać ze zmian zachodzących w otoczeniu systemu, polegających np. na istotnej zmianie technologii lub wprowadzeniu norm prawnych związanych z ochroną środowiska.

Wykorzystanie przedstawionych w pracy rozważań oraz opracowanego modelu przez decydentów analizowanego sytemu eksploatacji umożliwia określenie prognozy czasu, po którym system przestanie w pełni realizować zadania, jeżeli nie będą podejmowane inwestycje w zakup nowych transformatorów.

Opracowany sposób budowy i analizy modelu analizowanego obiektu badań oraz wyznaczona zależność średniego czasu życia sytemu może być podstawą do wyznaczenia koniecznej liczby elementów rezerwowych w celu osiągnięcia wymaganego średniego czasu życia systemu.

Analizę modelu eksploatacji systemu transformatorów przedstawioną w pracy można uogólnić na większą liczbę rodzaju odnów.

6. Literatura

1. Bobrowski D.: Modele i metody matematyczne teorii niezawodności w przykładach i zadaniach. WNT, Warszawa 1985.
2. Buslenko N., Kałasznikow W., Kowalenko I.: Teoria systemów złożonych. PWN, Warszawa 1979.
3. Hamoud G.A.: Use of Markov Models in Assessing Spare Transformer Requirements for Distribution Stations. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 27, No. 2, May 2012, DOI 10.1109/TPWRS.2011.2177999.
4. Hamoud G.A., Lee L., Faried S.O.: Spare Assessment of Distribution Power Transformers using Two Markov Models. 2019 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM), Atlanta, GA, USA, 2019, DOI 10.1109/PESGM 40551.2019.8973546.
5. Hamoud G.A., Yiu C.: Assessment of Spare Parts for System Components Using a Markov Model. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 35, No. 4, July 2020, DOI 10.1109/TPWRS.2020.2966913.
6. Hamoud G.A., Yiu C.: One Markov Model for Spare Analysis of Distribution Power Transformers. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 31, No. 2, March 2016, DOI 10.1109/TPWRS.2015.2431820.
7. Kostek R., Landowski B., Muślewski Ł.: Simulation of rolling bearing vibration in diagnostics. Journal of Vibroengineering, Vol. 17, Iss. 8, 2015.
8. Girtler J.: Application of theory of semi-Markov processes to determining distribution of probabilistic process of marine accidents resulting from collision of ships. Polish Maritime Research, No. 1, 2014.
9. Girtler J.: Possibility of estimating the reliability of diesel engines by applying the theory of semi-Markov processes and making operational decisions by considering reliability of diagnosis on technical state of this sort of combustion engines. Combustion Engines, Vol. 163(4), 2015.

10. Grabski F.: Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji. PAN IBS, seria: Badania Systemowe, t. 30, Warszawa 2002.
11. Landowski B., Muślewski Ł., Pająk M., Polishchuk O.: Method for initial assessment of unit costs of public city transport means operation. MATEC Web of Conferences 182, 01010 (2018), 17th International Conference Diagnostics of Machines and Vehicles, DOI 10.1051/matecconf/201818201010.
12. Landowski B., Pająk M., Żółtowski B., Muślewski Ł.: Method of building a model of operational changes for the marine combustion engine describing the impact of the damages of this engine on the characteristics of its operation process. Polish Maritime Research, No. 4 (96), Vol. 24, 2017.
13. Landowski B, Perczyński D., Kolber P., Muślewski Ł.: An example of Markov model of technical objects maintenance process. Engineering Mechanics 2016, 22nd International Conference, Svratka, Czech Republic. Book of full texts, Institute of Thermomechanics Academy of Sciences of the Czech Republic, 2016.
14. Landowski B., Woropay M., Neubauer A.: Sterowanie niezawodnością w systemach transport. Wydawnictwo ITE, Radom 2004.
15. Landowski B.: Numerical simulation of the process of a technical object state changes. Journal of KONBiN, No. 44, 2017, DOI 10.2478/jok-2018-0013.
16. Leite da Silva A.M., de Carvalho Costa J.G., Chowdhury A.A.: Probabilistic Methodologies for Determining the Optimal Number of Substation Spare Transformers. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 25, No. 1, 2010, DOI 10.1109/TPWRS.2009.2030280.
17. Muślewski Ł., Landowski B., Mackiewicz N., Pająk M.: Research and analysis of work ergonomics of selected transport means operators. International Automotive Conference (KONMOT 2018), Materials Science and Engineering; 1757-8981, 2018, DOI 10.1088/1757-899X/421/3/032020.
18. Muślewski Ł., Knopik L., Landowski B., Polishchuk O.: Analysis of assessment criteria for selected systems of transport means operation. MATEC Web of Conferences 182, 02003 (2018), 17th International Conference Diagnostics of Machines and Vehicles, 2018, DOI 10.1051/matecconf/201818202003.
19. Pająk M., Muślewski Ł., Landowski B.: Optimisation of changes of the operation quality of the transportation system in the fuzzy quality states space, International Automotive Conference (KONMOT 2018), Materials Science and Engineering; 1757-8981, 2018, DOI:10.1088/1757-899X/421/3/032023.
20. Puterman M.L.: Markov decision processes. John Wiley, New York 1994.
21. Puterman M.L.: Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming. John Wiley & Sons, 2014.
22. Sołowiew A.D.: Analityczne metody w teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1983.
23. Tee K., Ekpiwhre E., Yi Z.: Degradation modelling and life expectancy using Markov chain model for carriageway, Int J Qual Reliab Manag, No. 35, 2018.