

Mgr inż. Paweł Wysmulski

Dr hab. inż. Hubert Dębski

Mgr inż. Patryk Różyło

Mgr inż. Katarzyna Falkowicz

Wydział Mechaniczny

Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, Polska

E-mail: p.wysmulski@pollub.pl

E-mail: h.debski@pollub.pl

E-mail: p.rozylo@pollub.pl

E-mail: k.falkowicz@pollub.pl

Badania stateczności i stanów pokrytycznych ściskanych cienkościennych profili kompozytowych

Słowa kluczowe: *metoda elementów skończonych, stateczność konstrukcji, kompozyty, stan krytyczny, konstrukcje cienkościenne*

Streszczenie: Przedmiotem badań jest cienkościenny profil o przekroju ceowym, wykonany z kompozytu węglowo-epoksydowego, poddany osiowemu ściskaniu. Zakres badań obejmował analizę stanu krytycznego i słabo pokrytycznego metodami doświadczalnymi i numerycznymi. W wyniku badań prowadzonych na fizycznym modelu konstrukcji wyznaczono pokrytyczną ścieżkę równowagi, na podstawie której z wykorzystaniem metod aproksymacyjnych określono wartość obciążenia krytycznego. Równolegle prowadzono obliczenia numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Zakres obliczeń obejmował liniową analizę zagadnienia własnego, w wyniku której określono wartość obciążenia krytycznego modelu numerycznego konstrukcji. Drugi etap obliczeń obejmował nieliniową analizę stanu słabo pokrytycznego konstrukcji z zainicjowaną imperfekcją geometryczną, odpowiadającą najniższej postaci wyboczenia konstrukcji. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami badań doświadczalnych, potwierdzając adekwatność opracowanego modelu numerycznego konstrukcji. Zastosowanym narzędziem numerycznym był program ABAQUS®.

Research of buckling and post buckling states of the compression thin-walled composite profiles

Keywords: *finite element method, stability of construction, composites, critical state, thin-walled structures*

Abstract: The object of this study is a thin-walled channel-section profile made of a carbon-epoxy composite subjected to axial compression. The study included analysis of the critical and weakly post-critical behaviour using experimental and numerical methods. As a result of the research conducted on a physical model of the structure, we determined a post-critical equilibrium path, which was then used to determine the critical load by approximation methods. Simultaneously, numerical calculations were performed by the finite element method. Their scope included a linear analysis of eigenvalue problems, the results of which led to determination of the

critical load for the developed numerical model. The second step of the calculations consisted in performing a nonlinear analysis of the structure with geometrically initiated imperfection corresponding to the lowest buckling mode of the investigated profile. The numerical results were compared with the experimental findings, revealing that the developed numerical model of the structure was correct. The numerical simulations were performed using the ABAQUS® software.

1. Wstęp

Konstrukcje cienkościennie należą do grupy ustrojów nośnych, charakteryzujących się wysoką sztywnością oraz wytrzymałością w stosunku do ich masy własnej. Cechy te powodują szerokie zastosowanie cienkościennych elementów konstrukcyjnych w wielu dziedzinach przemysłu, a w szczególności w przemyśle lotniczym czy motoryzacyjnym. Dotyczy to przede wszystkim cienkościennych profili o złożonych kształtach przekroju poprzecznego, wykorzystywanych jako elementy usztywniające pokrycie. Wadą tego typu konstrukcji jest możliwość utraty stateczności nawet w warunkach obciążeń eksploatacyjnych [8, 15, 16]. W przypadku, gdy wyboczenie elementu cienkościennego ma charakter lokalny oraz sprężysty, nie prowadzi to do zniszczenia konstrukcji, a element konstrukcyjny może bezpiecznie pracować w stanie pokrytycznym [5, 15, 16, 23]. W związku z powyższym znajomość wartości obciążenia krytycznego, przy którym następuje utrata stateczności konstrukcji cienkościennej, należy do zagadnień o pierwszorzędym znaczeniu w warunkach eksploatacyjnych. Niestety metody wyznaczania wartości obciążenia krytycznego w przypadku konstrukcji rzeczywistych nie są jednoznaczne, co dodatkowo komplikuje proces racjonalnego projektowania tego typu ustrojów. W takich przypadkach alternatywnym narzędziem, umożliwiającym wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego są analizy numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych [13, 15, 16]. Wartość siły krytycznej określana jest z wykorzystaniem liniowej analizy zagadnienia własnego, bazującej na kryterium minimum energii potencjalnej układu. Wyznaczona numerycznie wartość obciążenia krytycznego może w takich przypadkach stanowić pewne oszacowanie siły krytycznej, ze względu na fakt, że do obliczeń przyjmowana jest konstrukcja idealna, bez uwzględnienia imperfekcji geometrycznych, występujących w konstrukcjach rzeczywistych. Oznacza to, że opracowane modele numeryczne konstrukcji cienkościennych, często charakteryzujących się złożonymi kształtami przekrojów poprzecznych, powinny być walidowane wynikami badań doświadczalnych. Taka procedura umożliwi opracowanie adekwatnych modeli dyskretnych, pozwalających analizować złożone zagadnienia utraty stateczności oraz pracy konstrukcji cienkościennych w zakresie pokrytycznym [4, 6, 9, 10, 16, 26].

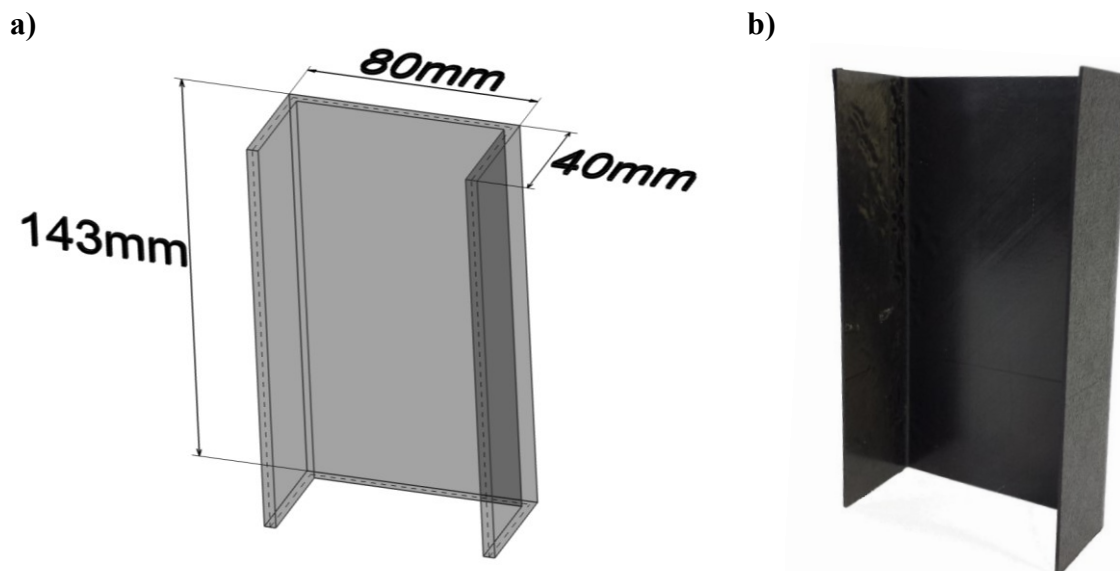
W nowoczesnych konstrukcjach cienkościennych, dotyczących zaawansowanych technologicznie konstrukcji m.in. lotniczych czy motoryzacyjnych, tradycyjne materiały inżynierskie (metale) są zastępowane nowoczesnymi materiałami kompozytowymi. Dotyczy to przede wszystkim, ze względu na budowę kompozytu, materiałów kompozytowych określanych jako laminaty [2, 3, 14, 17, 25, 27, 28, 29], czyli kompozytów warstwowych. Materiały te cechuje przede wszystkim wysoka wytrzymałość w stosunku do ciężaru własnego, co decyduje o ich zastosowaniu w strukturach nośnych. Dodatkową zaletą materiałów kompozytowych jest możliwość kształtowania ich właściwości mechanicznych, poprzez określony dobór cech materiałowych oraz zastosowanie odpowiedniej konfiguracji ułożenia warstw laminatu. Literatura dotycząca cienkościennych kompozytowych konstrukcji nośnych jest ograniczona, przy czym dominują zazwyczaj prace o charakterze teoretycznym, natomiast niewiele publikacji dotyczy prezentacji wyników badań doświadczalnych.

Przedmiotem badań w niniejszej pracy jest analiza stanu krytycznego oraz zachowania w stanie słabo pokrytycznym ściskanego osiowo cienkościennego profilu o przekroju ceowym, wykonanego z kompozytu węglowo-epoksydowego. Badania obejmują

wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej, oraz analizy stanu krytycznego i pokrytycznego z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Przeprowadzone badania pokazują metodykę postępowania, prowadzącą do rozwiązania zagadnienia wyboczenia oraz nieliniowej stateczności cienkościennych elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów kompozytowych.

2. Przedmiot badań

Przedmiot badań stanowił krótki, cienkościenny słup o przekroju ceowym, poddany próbie osiowego ściskania. Analizowana konstrukcja stanowiła typową strukturę cienkościenną, składającą się z prostopadłych ścian, stanowiących płaskie elementy płytowe, połączone na dłuższych krawędziach [5, 6, 23]. Konstrukcję wykonano techniką autoklawową z kompozytu węglowo-epoksydowego o oznaczeniu M12/35%/UD134/AS7/143. Struktura kompozytu złożona była z 8 warstw w symetrycznym układzie względem płaszczyzny środkowej o konfiguracji $[0/-45/45/90]_s$. Wymiary gabarytowe profilu ceowego wynosiły 80x40 mm, grubość ścian 0,148 mm oraz długość profilu 143 mm – rys.1.



Rys. 1. Słup cienkościenny o przekroju ceowym: a) model geometryczny, b) model fizyczny konstrukcji

Dla wytworzonego materiału kompozytowego wyznaczono eksperymentalnie podstawowe właściwości mechaniczne wg normy ISO, przedmiotowej w tym zakresie [19, 20, 21]. Określone doświadczalnie właściwości mechaniczne kompozytu węglowo-epoksydowego umożliwiają definicję modelu materiału o właściwościach ortotropowych w płaskim stanie naprężenia – tab.1.

Tabela 1. Właściwości mechaniczne kompozytu węglowo-epoksydowego

Moduły Younga [GPa]		Liczba Poissona ν_{12}	Moduł Kirchhoffa G_{12} [GPa]
$0^\circ (E_1)$	$90^\circ (E_2)$	0,32	$\pm 45^\circ$
130,71	6,36		4,18

3. Metodyka i zakres badań

Prowadzone badania dotyczyły analizy stanu krytycznego oraz słabo pokrytycznego ściskanej cienkościennej konstrukcji kompozytowej metodami eksperymentalnymi i numerycznymi. Badania eksperymentalne na wytworzonych cienkościennych słupach kompozytowych umożliwiły obserwację rzeczywistego zachowania się konstrukcji w stanie krytycznym oraz jej pracy po utracie stateczności. Prowadzone równoległe symulacje numeryczne miały na celu opracowanie adekwatnych modeli MES zweryfikowanych doświadczalnie, umożliwiających modelowanie zagadnienia stateczności (stanu krytycznego) kompozytowych konstrukcji cienkościennych, w wierny sposób odwzorowujących zachowanie konstrukcji rzeczywistej.

3.1 Badania eksperymentalne

Badania eksperymentalne dotyczyły osiowego cienkościennego profilu kompozytowego o przekroju ceowym w zakresie obciążenia wynoszącego ok 150% wartości siły krytycznej wyznaczonej w obliczeniach numerycznych. Badania prowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej Zwick Z100 o maksymalnym zakresie obciążenia 100 kN w temperaturze pokojowej, przy stałej prędkości przemieszczania górnej trawersy wynoszącej 2 mm/min. W trakcie badań końce słupa były swobodnie podparte, zapewniając w ten sposób realizację przegubowego podparcia dla poszczególnych ścian profilu, będących elementami płytowymi. W celu wyeliminowania wpływu warunków brzegowych na pracę konstrukcji, na obydwu końcach zastosowano podkładki z miękkiego tworzywa, umożliwiające niwelację ewentualnych niedokładności przekrojów końcowych słupa. Próbkę osiowano za pomocą specjalnych wkładek, umożliwiających precyzyjne ustawienie przekrojów końcowych słupa względem sworzni maszyny wytrzymałościowej. Widok stanowiska badawczego z zamocowaną próbką do badań eksperymentalnych przedstawia rys.2.



Rys. 2. Stanowisko do badań doświadczalnych

W trakcie badań rejestrowano przebieg wartości siły ściskającej oraz odkształcenia, mierzone za pomocą tensometrów oporowych, umieszczonych w kierunku wzdłużnym słupa po przeciwnych stronach środka w miejscu spodziewanych największych ugięć. Otrzymane w wyniku pomiarów pokrytyczne ścieżki równowagi, określające zależność obciążenia od różnicy odkształceń $P - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ umożliwiły określenie wartości obciążenia krytycznego oraz ocenę pracy konstrukcji w zakresie słabo pokrytycznym.

3.2 Aproksymacyjne metody wyznaczania wartości obciążenia krytycznego na podstawie badań doświadczalnych

Występujące w trakcie prowadzonych badań doświadczalnych wszelkiego rodzaju niedokładności powodowane różnymi niezależnymi czynnikami, jak m.in. imperfekcje geometryczne konstrukcji, budowa stanowiska badawczego czy realizacja obciążenia i warunków brzegowych utrudniają precyzyjne wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego. W takich przypadkach niezbędne jest wykorzystanie metod aproksymacyjnych, umożliwiających oszacowanie wartości obciążenia krytycznego na podstawie uzyskanych pomiarów w prowadzonych badaniach eksperymentalnych. W niniejszej pracy do oceny wartości sił krytycznych zastosowano 2 niezależne metody aproksymacyjne: metodę Koiter'a oraz metodę $P-w^2$ [18].

Zastosowanie metody Koiter'a polegało na aproksymacji pokrytycznej ścieżki równowagi, opisującej zależność pomiędzy obciążeniem próbki, a różnicą odkształceń mierzonych po przeciwległych stronach ścianki profilu. Wyznaczona eksperymentalnie pokrytyczna ścieżka równowagi $P-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ w zakresie słabo pokrytycznym jest w tym przypadku aproksymowana funkcją kwadratową o następującym równaniu [18]:

$$P = P_{cr} \frac{\alpha_2}{\alpha_0} w^2 + P_{cr} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} w + P_{cr} \quad (1)$$

gdzie: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – stanowią nieznanne parametry funkcji, P – oznacza wartość przyłożonej siły, P_{cr} – wartość nieznanego obciążenia krytycznego oraz wartość $w \approx (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ $w \approx (e_1 - e_2)$ oznacza przyrost ugięcia, mierzony prostopadłe do ściany profilu.

W przypadku metody Koiter'a obciążenie krytyczne określane jest jako miejsce przecięcia funkcji (1) oraz pionowej osi układu współrzędnych pokrytycznej charakterystyki konstrukcji $P-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Dokładność określenia wartości obciążenia krytycznego jest uzależniona od dobru zakresu aproksymacji, gdzie w przypadku statecznej charakterystyki konstrukcji, współczynnik kierunkowy wielomianu stopnia drugiego musi być dodatnio określony.

W przypadku metody $P-w^2$ obciążenie krytyczne jest również wyznaczone na podstawie pokrytycznej ścieżki równowagi, jednakże oszacowanie przybliżonej wartości siły krytycznej bazuje na charakterystyce obciążenia od kwadratu ugięcia na kierunku prostopadłym do płaszczyzny ściany profilu. W prowadzonych badaniach wartość ugięcia w aproksymowano różnicą wskazań tensometrów $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Pokrytyczną ścieżkę równowagi $P-w^2$ aproksymowano funkcją liniową w postaci [18]:

$$P = P_{cr} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} w + P_{cr} \quad (2)$$

gdzie: α_0, α_1 – stanowią nieznanne parametry funkcji, P – oznacza wartość przyłożonej siły, P_{cr} – wartość nieznanego obciążenia krytycznego, natomiast wartość $w \approx (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ $w \approx (e_1 - e_2)$ oznacza przyrost ugięcia mierzony prostopadłe do ściany profilu.

Obciążenie krytyczne określa się jako punkt przecięcia funkcji aproksymacji (2) z pionową osią układu współrzędnych pokrytycznej charakterystyki konstrukcji $P-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2$.

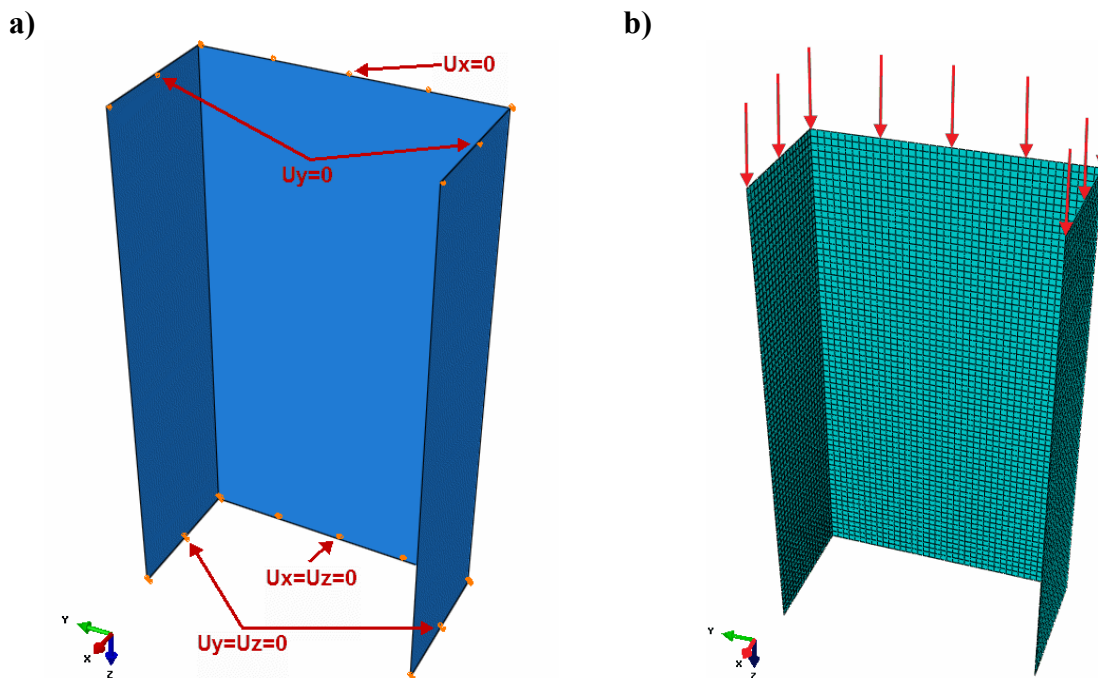
Rezultaty otrzymywane na drodze aproksymacji powyższą metodą nie zawsze są jednoznaczne. Stopień liniowości przebiegu aproksymowanej krzywej jest ściśle uzależniony od zakresu danych, biorących udział w procesie określania obciążeń krytycznych. Dodatkowo wynik znacząco zależy od ilości punktów o określonych współrzędnych, poddanych etapowi aproksymacji.

W prowadzonych badaniach kluczowym wyznacznikiem, decydującym o dokładności procesu aproksymacji był współczynnik korelacji R^2 . Wartość tego współczynnika decydowała o poziomie zbieżności przebiegu funkcji aproksymującej z wybranym zakresem aproksymowanej krzywej doświadczalnej. Wyższa wartość współczynnika korelacji zapewniała w tym przypadku większą dokładność zastosowanego procesu aproksymacji. W zastosowanych procesach aproksymacji doświadczalnych pokrytycznych ścieżek równowagi konstrukcji przyjęto minimalną wartość współczynnika korelacji na poziomie $R^2 \geq 0.95$.

3.3 Obliczenia numeryczne

Badania stateczności oraz stanów pokrytycznych prowadzono równolegle metodami numerycznymi z wykorzystaniem metody elementów skończonych. W procesie obliczeń numerycznych zastosowano komercyjny program ABAQUS®. Zakres prowadzonych obliczeń obejmował analizę stanu krytycznego oraz stanu słabo pokrytycznego, do wartości ok. 150 % wyznaczonej najniższej wartości siły krytycznej. Obliczenia dotyczące stanu krytycznego obejmowały rozwiązanie liniowej analizy zagadnienia własnego, prowadzącego do wyznaczenia wartości najniższego obciążenia krytycznego oraz odpowiadającej mu postaci utraty stateczności. W rozwiązaniu zagadnienia własnego wykorzystuje się warunki na ekstremum energii potencjalnej - stan równowagi układu odpowiada minimum energii potencjalnej [1]. Oznacza to, że dla układów o charakterze statecznym druga wariacja energii potencjalnej musi być dodatnio określona. Drugi etap obliczeń obejmował nieliniową analizę statyczną, prowadzoną na modelu z zainicjowaną imperfekcją geometryczną, odpowiadającą formie najniższej postaci wyboczenia, o wartości amplitudy wynoszącej 0,1 grubości ścianki profilu. Pozwoliło to na wyznaczenie pokrytycznej ścieżki równowagi konstrukcji, określającej zależność obciążenia od ugięcia ścianki profilu na kierunku normalnym $P-w$ w zakresie słabo pokrytycznym. Rozwiązanie zagadnienie geometrycznie nieliniowego (duże przemieszczenia) przeprowadzono z wykorzystaniem przyrostowo-iteracyjnej metody Newtona-Raphsona [1].

Proces dyskretyzacji modelu numerycznego przeprowadzono z wykorzystaniem elementów powłokowych *SHELL*, posiadających 6 stopni swobody w każdym węźle. Zastosowano typ elementu o oznaczeniu S8R, stanowiącego element 8-węzłowy, z funkcją kształtu drugiego rzędu oraz zredukowanym całkowaniem. Technika zredukowanego całkowania jest jedną z najstarszych technik aproksymacji rozwiązań stanu przemieszczeniowo-naprężeniowego w elemencie. Zredukowane całkowanie pozwala na usuwanie fałszywych form deformacji elementów skończonych dzięki zastosowaniu wielomianów wyższych rzędów w opisie funkcji kształtu elementu [7, 11, 12, 22, 24, 30]. W procesie dyskretyzacji zastosowano strukturalną siatkę elementów skończonych, przyjmując wymiar boku elementu równy 2 mm. Przyjęta metoda dyskretyzacji zapewniała równomierny podział poszczególnych ścian profilu, prowadząc do rozmiaru modelu numerycznego składającego się z 5760 elementów skończonych oraz 17585 węzłów. Widok ogólny modelu numerycznego przedstawia rys. 3b.



Rys. 3. Model dyskretny słupa o przekroju ceowym: a) warunki brzegowe, b) dyskretyzacja modelu geometrycznego

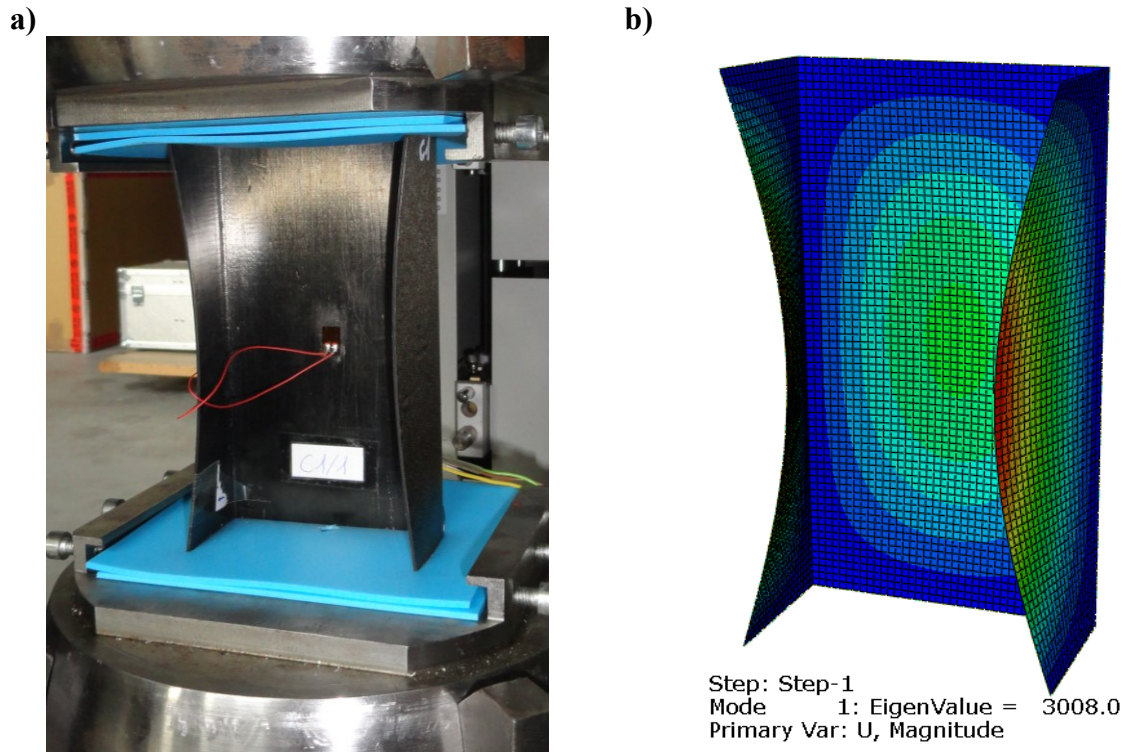
Zastosowany w procesie dyskretyzacji typ elementu skończonego stanowił element warstwowy, umożliwiający definicję struktury laminatu po grubości elementu. W opracowanym modelu numerycznym zdefiniowano model materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia, przyjmując wyznaczone eksperymentalnie właściwości mechaniczne materiału kompozytowego (Tabela 1).

Sformułowane dla modelu numerycznego warunki brzegowe odpowiadały realizacji przegubowego podparcia ściskanych słupów kompozytowych – rys.3a. Realizację warunków brzegowych przeprowadzono poprzez zadanie zerowych przemieszczeń węzłom leżącym na krawędziach dolnego i górnego przekroju końcowego słupa, odpowiednio na kierunkach prostopadłych do płaszczyzny każdej ściany (przemieszczenia $u_x = 0$ i $u_y = 0$). Dodatkowo węzłom należącym do krawędzi dolnego końca słupa zablokowano możliwość przemieszczeń na kierunku pionowym ($u_z = 0$), natomiast węzłom należącym do krawędzi górnego końca słupa przypisano równe przemieszczenie $u_z = const$, poprzez sprzęgnięcie przemieszczeń w kierunku osiowym słupa. Obciążenie modelu numerycznego zrealizowano w formie obciążenia rozłożonego, przyłożonego do krawędzi górnego przekroju końcowego słupa, zapewniając równomierne jego ściskanie na kierunku osiowym.

4. Wyniki badań - dyskusja

Przeprowadzone badania doświadczalne osiowego ściskania cienkościennego słupa o przekroju ceowym dostarczyły niezbędnych informacji, pozwalających na ocenę stanu odkształcenia konstrukcji rzeczywistej w funkcji obciążenia zewnętrznego. Otrzymane wyniki badań umożliwiają dokonanie jakościowej i ilościowej analizy stanu dokrytycznego oraz krytycznego w oparciu o zarejestrowane parametry próby. Identyfikację stanu krytycznego przeprowadzono na podstawie uzyskanej postaci wybożenia oraz odpowiadającej jej wartości obciążenia krytycznego. Wyznaczone w sposób doświadczalny wartości krytyczne stanowiły podstawę weryfikacji wyników obliczeń numerycznych MES.

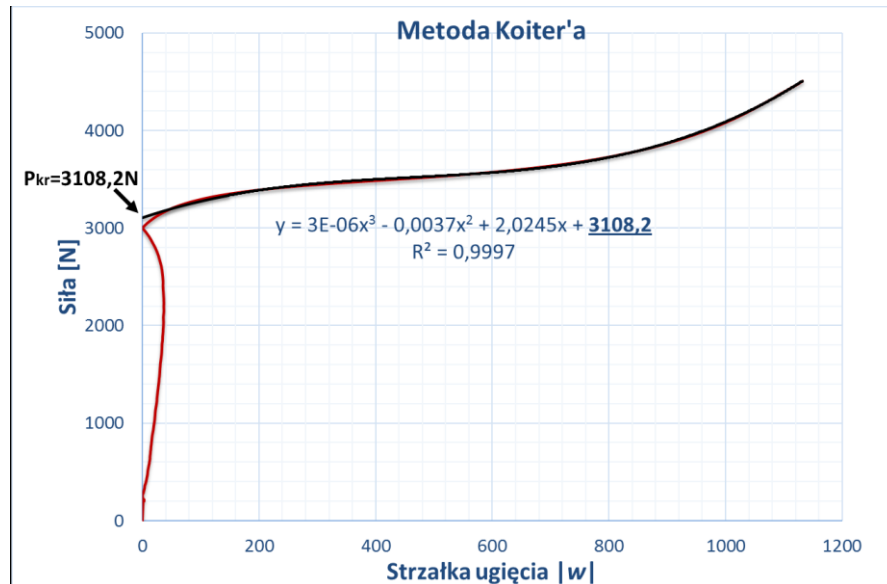
Badania stanu dokrytycznego i krytycznego wykazały, że najniższa wartość obciążenia krytycznego odpowiada lokalnej postaci utraty stateczności konstrukcji, przejawiającej się powstaniem jednej półfali na poszczególnych ścianach i średniku profilu ceowego. Otrzymaną w prowadzonych badaniach eksperymentalnych i obliczeniach numerycznych najniższą postać wybożenia konstrukcji przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Najniższa postać wybożenia słupa o przekroju ceowym: a) badania eksperymentalne, b) obliczenia numeryczne MES

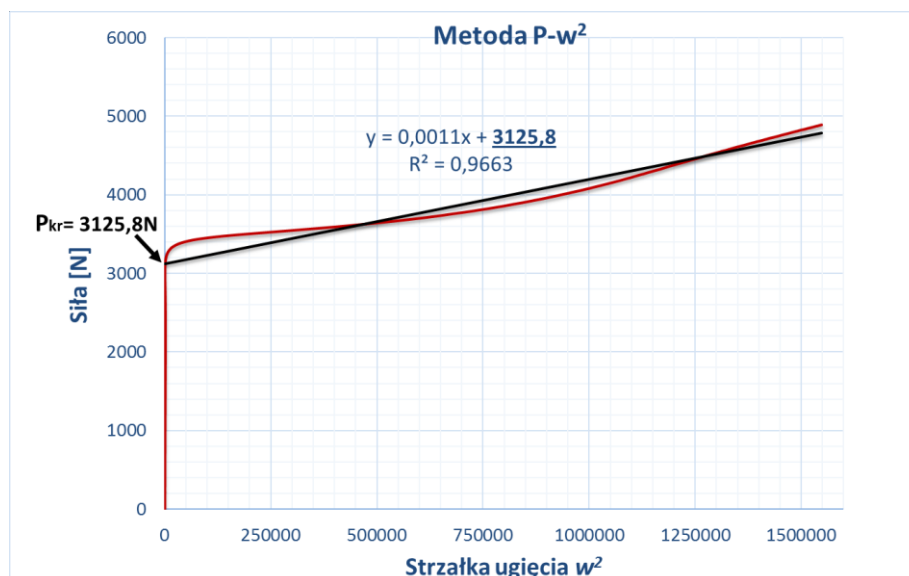
Otrzymane w badaniach doświadczalnych oraz obliczeniach numerycznych formy deformacji ściskanego słupa o przekroju ceowym wykazują całkowitą zgodność jakościową postaci wybożenia konstrukcji. Prowadzone pomiary odkształceń z wykorzystaniem tensometrów oporowych umożliwiły wyznaczenie pokrytycznej ścieżki równowagi konstrukcji, określającej zależność siły obciążającej od różnicy odkształceń $P-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Uzyskana charakterystyka stanowiła podstawę wyznaczenia wartości obciążenia krytycznego z wykorzystaniem dwóch niezależnych metod aproksymacyjnych: metody Koiter'a oraz metody $P-w^2$. Kluczowym problemem takiego podejścia jest odpowiedni dobór zakresu pomiarowego, koniecznego do opisu ścieżki pokrytycznej, co bezpośrednio przekłada się na otrzymywane wyniki. W przypadku nieodpowiednio dobranych procedur aproksymacji, wartości obciążeń krytycznych znacznie odbiegają od wartości oszacowanych w symulacjach numerycznych. Dodatkowo dobór zakresu aproksymacji powinien być podyktowany zachowaniem możliwie wysokiego współczynnika korelacji R^2 , oznaczającym zachowanie dostatecznej dokładności dopasowania funkcji aproksymującej do krzywej doświadczalnej. Z przeprowadzonych symulacji określono, że zakres aproksymowanej krzywej eksperymentalnej we wszystkich badanych przypadkach obejmował część doświadczalnej ścieżki pokrytycznej, zaczynającą się od punktu przegięcia linii *siła – odkształcenie*, do końca krzywej wyznaczonej w badaniach eksperymentalnych w stanie słabo zakrytycznym (metoda Koiter'a) lub liniowej (metoda $P-w^2$), przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej wartości współczynnika korelacji ($R^2 > 0,95$).

W przypadku metody Koiter'a analizie poddano doświadczalną ścieżkę pokrytyczną w postaci $P-w$ (gdzie wartość ugięcia wyznaczano wg zależności $w \approx (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$), a następnie aproksymowano wielomianem trzeciego stopnia. Wartość obciążenia krytycznego wyznaczał w tym przypadku punkt przecięcia się funkcji aproksymującej z osią pionową wykresu (osią obciążenia). Wyznaczona wartość obciążenia krytycznego z wykorzystaniem metody Koiter'a wynosiła 3108,2 N – rys.5.



Rys. 5. Wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego metodą Koiter'a

W przypadku metody $P-w^2$ analizie poddano pokrytyczną ścieżkę równowagi w postaci $P-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$, którą aproksymowano funkcją liniową. Również w tym przypadku wartość obciążenia krytycznego określała rzędna punktu przecięcia prostej aproksymującej z osią pionową wykresu (osią obciążenia). Wyznaczona za pomocą metody $P-w^2$ wartość obciążenia krytycznego wyniosła 3125,8 N – rys.6.



Rys. 6. Wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego metodą $P-w^2$

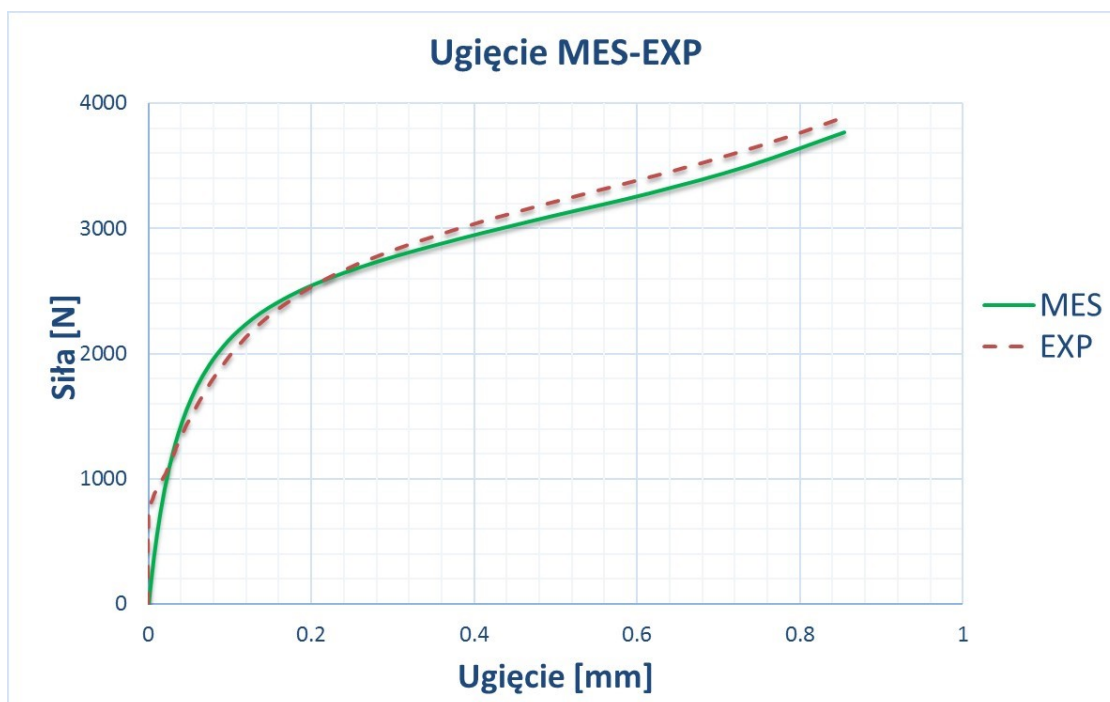
Wyznaczone metodami aproksymacyjnymi wartości obciążenia krytycznego porównywano z najniższą wartością własną, wyznaczoną w numerycznej analizie stanu krytycznego. Otrzymana numeryczna wartość siły krytycznej dla modelu numerycznego wyniosła 3008 N. Wyznaczone wartości obciążenia krytycznego z wykorzystaniem wszystkich zastosowanych metod badawczych zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości obciążenia krytycznego - zestawienie wyników doświadczalnych i numerycznych

MES [N]	Metoda Koiter'a [N]	Różnica Koiter/MES [%]	Metoda P-w ² [N]	Różnica P-w ² /MES [%]
3008	3108.2	3.3	3125.8	3.9

Otrzymane metodami aproksymacyjnymi oraz numerycznymi wartości sił krytycznych, przy których zachodzi zjawisko wyboczenia cienkościennego słupa o przekroju ceowym, charakteryzują się bardzo wysokim poziomem zbieżności. Maksymalne różnice, które nie przekraczają 4% oznaczają bardzo wysoką zgodność ilościową zastosowanych metod badawczych, potwierdzając jednocześnie poprawność zaproponowanej procedury określania wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistej.

Zestawiono również pokrytyczne ścieżki równowagi $P-w$ (siła ściskająca – ugięcie maksymalne w kierunku prostopadłym do ściany profilu) wyznaczone w zakresie słabo pokrytycznym. Przedstawiona na rys. 7 charakterystyka doświadczalna wykazuje zgodność ilościową i jakościową z krzywą wyznaczoną w symulacjach numerycznych wykonanych metodą elementów skończonych. Prezentowane wyniki potwierdzają adekwatność opracowanego modelu numerycznego, umożliwiającego symulację stanu krytycznego oraz pokrytycznego ściskanych słupów kompozytowych o przekroju ceowym.



Rys. 7. Pokrytyczne ścieżki równowagi MES-eksperyment

5. Podsumowanie

W pracy badano zachowanie cienkościennego słupa o przekroju ceowym poddanego równomiernemu ściskaniu. Podjęto próbę wyznaczenia wartości obciążenia krytycznego, na podstawie otrzymanych eksperymentalnie pokrytycznych ścieżek równowagi konstrukcji w oparciu o 2 niezależne metody aproksymacyjne: metodę Koiter'a oraz metodę $P-w^2$. Wyniki badań porównano z wartością obciążenia krytycznego wyznaczoną z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Stwierdzono bardzo wysoką zgodność wartości obciążenia krytycznego, wyznaczonego poszczególnymi metodami - maksymalne różnice nie przekraczały 4%. Potwierdza to możliwość wykorzystania zaproponowanej procedury do określania wartości obciążenia krytycznego konstrukcji rzeczywistych. Precyzyjne wyznaczenie siły krytycznej w przypadku konstrukcji cienkościennych należy do zagadnień niezwykle istotnych ze względów eksploatacyjnych, gdyż pozwala zabezpieczyć konstrukcję przed niepożądanym zjawiskiem utraty stateczności.

Przeprowadzone badania zwracają uwagę na wysoką czułość parametrów aproksymacji na dokładność uzyskiwanych wyników. W szczególności dotyczy to odpowiedniego doboru zakresu aproksymacji oraz konieczności zapewnienia wysokiego współczynnika korelacji R^2 , zapewniającego zgodność doświadczalnej charakterystyki konstrukcji z funkcją aproksymującą.

Prowadzone badania wykazały wysoką jakościową oraz ilościową zgodność wyników badań eksperymentalnych z wynikami obliczeń numerycznych. Dotyczy to zarówno postaci utraty stateczności konstrukcji, wartości obciążenia krytycznego, jak również pokrytycznych ścieżek równowagi $P-w$ w zakresie słabo pokrytycznym. Otrzymane wyniki dostarczają zatem istotnych informacji, dotyczących techniki modelowania cienkościennych struktur wykonanych z materiałów kompozytowych, potwierdzając jednocześnie adekwatność opracowanych modeli numerycznych, zarówno w obliczeniach zagadnienia własnego, jak i nieliniowej analizie statycznej w zakresie pokrytycznym.

Literatura

1. Abaqus HTML Documentation, 2016.
2. Adams DF, Carlsson LA, Pipes RB. Experimental characterization of advanced composite materials. CRC Press LLC, 2003.
3. Altenbach H, Altenbach J, Kissing W. Structural analysis of laminate and sandwich beams and plates. An introduction into the mechanics of composite. Lubelskie Towarzystwo Naukowe, 2001.
4. Banat D, Mania R.J. Comparison of failure criteria application for FML column buckling strength analysis. Composite Structures 2016; 140: 806-815.
5. Bazant ZP, Cedolin L. Stability of Structures. Elastic, Inelastic. Fracture and Damage Theories. Oxford University Press UK 2010.
6. Bloom F, Coffin D. Handbook of thin plate buckling and postbuckling. CHAPMAN & HALL/CRC Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. 2001.
7. Debski H, Sadowski T. Modelling of microcracks initiation and evolution along interfaces of the WC/Co composite by the finite element method. Computational Materials Science 2014; 83: 403–411.
8. Debski H, Teter A, Kubiak T. Numerical and experimental studies of compressed composite columns. Composite Structures 2014; 118: 28-36.
9. Doyle JF. Nonlinear analysis of thin-walled structures. Springer, 2001.

10. Falkowicz K, Ferdynus M, Debski H. Numerical analysis of compressed plates with a cut-out operating in the geometrically nonlinear range. *Eksploracja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2015; 17(12): 222-227.
11. Fedorko G, Stanova E, Molnar V, Husakova N, Kmet S. Computer modelling and finite element analysis of spiral triangular strands. *Adv. Eng. Softw* 2014; 73: 11–21.
12. Ferdynus M. An energy absorber in the form of a thin-walled column with square cross-section and dimples. *Eksploracja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2013; 15: 253-258.
13. Kolakowski Z, Mania RJ. Semi-analytical method versus the FEM for analyzing of the local post-buckling of thin-walled composite structures. *Composite Structures* 2013; 97: 99–106.
14. Kolakowski Z. Static and dynamic interactive buckling of composite columns. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 2009; 47: 177-192.
15. Kopecki T, Bakunowicz J, Lis T. Post-critical deformation states of composite thin-walled aircraft load-bearing structures. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 2016; 54(1): 195-204.
16. Kopecki T, Mazurek P, Lis T, Chodorowska D. Post-buckling deformation states of semi-monocoque cylindrical structures with large cut-outs under operating load conditions. Numerical analysis and experimental tests. *Eksploracja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2016; 18(1): 16-24.
17. Parlapalli MR, Soh KC, Shu DW, Ma G. Experimental investigation of delamination buckling of stitched composite laminates. *Composites, Part A* 2007; 38: 2024–2033.
18. Paszkiewicz M, Kubiak T. Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns. *Thin-Walled Structures* 2015; 93: 112-121.
19. PN EN ISO 527-4 „Oznaczanie właściwości mechanicznych przy statycznym rozciąganiu. Warunki badań kompozytów tworzywowych izotropowych i ortotropowych wzmocnionych włóknami.”
20. PN EN ISO 14126 „Kompozyty tworzywowe wzmocnione włóknem. Oznaczanie właściwości podczas ściskania równoległe do płaszczyzny laminowania.”
21. PN EN ISO 14129 „Kompozyty tworzywowe wzmocnione włóknem. Oznaczenie naprężenia ścinającego i odpowiadającego odkształcenia, modułu ścinania i wytrzymałości podczas rozciągania pod kątem $\pm 45^\circ$.”
22. Rudawska A, Debski H. Experimental and numerical analysis of adhesively bonded aluminium alloy sheets joints. *Eksploracja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2011; 1: 4-10.
23. Singer J, Arbocz J, Weller T. Buckling experiments. Experimental methods in buckling of thin-walled structure. Basic concepts, columns, beams, and plates. New York: John Wiley & Sons Inc, 1998; 1 (2002; 2).
24. Stanova E, Fedorko G, Kmet S, Molnar V, Fabian M. Finite element analysis of spiral strands with different shapes subjected to axial loads. *Adv. Eng. Softw.* 2015; 83: 45–58.
25. Taheri F, Nagaraj M, Khosravi P. Buckling response of glue-laminated columns reinforced with fiber-reinforced plastic sheets. *Composite Structures* 2009; 88: 481–90.
26. Teter A, Debski H, Samborski S. On buckling collapse and failure analysis of thin-walled composite lipped-channel columns subjected to uniaxial compression. *Thin-Walled Structures* 2014; 85: 324-331.
27. Tsai SW, Wu EM. A general theory of strength for anisotropic materials. *J. Compos. Mater* 1971: 58–80.

28. Turvey GJ, Zhang Y. A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded GRP columns. *Computers & Structures* 2006; 84: 1527–1537.
29. Wong PMH, Wang YC. An experimental study of pultruded glass fibre reinforced plastics channel columns at elevated temperatures. *Composite Structure* 2007; 81: 84–95.
30. Zienkiewicz OC, Taylor R.L. *Finite Element Method (5th Edition) Volume 2 – Solid Mechanics*. Elsevier, 2000.