MINUT 2023 (5), s. 256–260
ISSN 2719-3063

MATEMATYKA
I INFORMATYKA
NA
UCZELNIACH
TECHNICZNYCH

Piotr GAWRON[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Nieoczywistości ciągłości

Streszczenie. Przytaczamy definicje ciągłości funkcji rzeczywistej i nieoczywiste przykłady jej zastosowania.
Słowa kluczowe: funkcje ciągłe, punkty nieciągłości

1. Wstęp

Pojęcia ciągłości i pochodnej funkcji rzeczywistej należą do podstaw analizy matematycznej. W pracy [1] omówiliśmy ewolucję pojęcia ciągłości — od intuicyjnej do dwóch równoważnych definicji Heinego i Cauchy'ego. Zobaczymy, że posługując się formalnymi definicjami, napotkamy nieoczekiwane rezultaty.

Zakładamy znajomość podstawowego kursu analizy matematycznej, szczególnie w zakresie ciągów i ich granic.

2. Definicje ciągłości

Będziemy rozpatrywali funkcje rzeczywiste jednej zmiennej, tj. funkcje $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$. Intuicyjnie ciągłość często określa się tak, jak poniżej:

Definicja 1 (Intuicyjna, niepoprawna). *Funkcja jest ciągła, gdy jej wykres można narysować bez odrywania ołówka od papieru.*

Definicja ta jest przydatna w elementarnym rozumieniu ciągłości, tym niemniej — jak zobaczymy w poniższych przykładach — jest niepoprawna.

W każdym kursie analizy matematycznej wprowadza się dwie definicje ciągłości: ciągową Heinego i otoczeniową Cauchy'ego (jej prawdziwym autorem jest Weierstrass [1]).

Definicja 2 (Cauchy'ego). *Funkcja* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w przedziale* (a,b)*, gdy*

$$\bigwedge_{x_0\in(a,b)} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in(a,b)} |x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Autor korespondencyjny: P. Gawron piotr.gawron@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 20.09.2023.

Definicja 3 (Heinego). *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale (a,b), gdy dla dowolnego punktu x tego przedziału zachodzi: dla dowolnego ciągu $x_n \in (a,b)$ zbieżnego do x, ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$.*

Definicje są sobie równoważne (co prawda przy przyjęciu co najmniej słabej wersji aksjomatu wyboru [1]) i możemy je stosować zgodnie z potrzebami.

Zwróćmy uwagę, że ciągłość zdefiniowaliśmy tylko dla funkcji określonej na przedziale otwartym (także nieskończonym). Możemy te definicje rozszerzyć dla dowolnej dziedziny będącej podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definicja 4 (Cauchy'ego — rozszerzona). *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze D, gdy*

$$\bigwedge_{x_0 \in D} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} |x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 5 (Heinego — rozszerzona). *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze D, gdy dla dowolnego punktu x tego zbioru zachodzi: dla dowolnego ciągu $x_n \in D$ zbieżnego do x, ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$.*

Definicje rozszerzone także są sobie równoważne, ale nie są równoważne definicjom dla przedziału otwartego, ponieważ posiadają szerszy zakres — co zilustrujemy poniżej. Dalej będziemy posługiwać się definicjami rozszerzonymi. Jeszcze bardziej ogólne definicje możemy znaleźć w [2] (rozdział 1, §7).

Powyższe definicje mówią o ciągłości funkcji w całej dziedzinie, ale ich konstrukcja pokazuje, że możemy mówić o ciągłości funkcji dla danego elementu dziedziny, a funkcja może być ciągła tylko dla wybranych elementów.

Definicja 6 (Cauchy'ego — rozszerzona, ciągłość w punkcie). *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$, gdy*

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} |x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 7 (Heinego — rozszerzona, ciągłość w punkcie). *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$, gdy dla dowolnego ciągu $x_n \in D$ zbieżnego do x_0, ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$.*

Definicje ciągłości w punkcie też są sobie równoważne dla wybranego punktu. Oczywiste jest, że jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie dziedziny, to jest ciągła, i prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Przykład 1. *Niech $f\colon \{0\} \to \mathbb{R}$, wtedy — niezależnie od wartości $f(0)$ — funkcja f jest ciągła. Inaczej: funkcja zadana na dziedzinie jednoelementowej jest zawsze ciągła.*

Dowód. Skorzystamy z definicji Heinego. Jedynym ciągiem $x_n \in D = \{0\}$ zbieżnym do 0 jest ciąg $x_n = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(0) = f(0)$. □

Możemy też zauważyć, że jeżeli dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym, to funkcja jest ciągła.

Z definicji wynikają wnioski sprzeczne z potocznym i popularnym rozumieniem funkcji ciągłej.

Funkcja $f\colon (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}; \quad f(x) = 1/x$ jest ciągła jako funkcja elementarna (patrz niżej). Czytelnik zapyta: *A co z ciągłością w zerze?*. W zerze funkcja nie jest określona, ale jest ciągła na całej swojej dziedzinie. Nie sprawdzamy własności ciągłości funkcji poza jej dziedziną.

W praktyce najczęściej posługujemy się funkcjami elementarnymi — to jest funkcjami jednej zmiennej uzyskanymi poprzez (skończone) działania arytmetyczne ($+ \, - \, \times \, /$) i operacje składania funkcji ze stałych, wielomianów, pierwiastków naturalnego stopnia, funkcji trygonometrycznych i ich odwrotnych, funkcji wykładniczych i logarytmów. Zwróćmy uwagę, że każda funkcja zapisana pojedynczym wzorem $f(x) = (\textit{kombinacja funkcji elementarnych})$ jest elementarna. Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe. Aby podać przykład funkcji nieciągłej, musimy szukać przykładu wśród funkcji nieelementarnych, czyli zapisanych w bardziej złożony sposób — na przykład tak, jak poniżej: wzorem wariantowym.

Przykład 2. *Niech funkcja będzie zadana wzorem wariantowym.*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ x & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest nieciągła, a dokładniej: nie jest ciągła w punkcie 0.

Dowód. Weźmy ciąg $1/n, n \in \mathbb{N}$. Granica ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ wynosi 0 i granica wartości ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = 0$ także wynosi 0, a jest różna od wartości funkcji w zerze $f(0) = 1$. $\square$

3. Przypadki bardzo nieoczywiste

W tym rozdziale zaprezentujemy bardziej oryginalne przykłady, zdecydowanie przeczące intuicyjnej **Definicji 1**.

Zdefiniujemy funkcję Dirichleta χ — inaczej mówiąc, funkcję charakterystyczną zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Przykład 3. *Funkcja $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągła dla każdej liczby rzeczywistej.*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dowód. Niech $x_0 \in \mathbb{Q}$, wtedy $\chi(x_0) = 1$. Weźmy ciąg $x_n = x_0 + \pi/n$ liczb niewymiernych zbieżny do x_0. Ciąg wartości $\chi(x_n)$ jest ciągiem stałym o wyrazie 0 i granicy 0, różnej od 1, czyli funkcja χ jest nieciągła dla dowolnej liczby wymiernej. Rozpatrzmy teraz przypadek x_0 liczby niewymiernej. Ciąg x_n przybliżeń dziesiętnych długości n z niedomiarem jest ciągiem liczb wymiernych zbieżnych do x_0 o stałej wartości funkcji Dirichleta 1 i różnym od wartości funkcji $\chi(x_0) = 0$. Zatem funkcja χ jest nieciągła także dla dowolnej liczby niewymiernej. $\square$

Dalej przytoczymy kilka ciekawych przykładów — przy czym więcej przykładów tego typu znajdziemy w [3] i [4].

Przykład 4. *Niech funkcja* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie zadana następująco (funkcja charakterystyczna zbioru liczb niewymiernych):*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Używając analogicznych argumentów jak w powyższym przykładzie, możemy pokazać, że funkcja ψ *także jest nieciągła w każdym punkcie. Jednak suma* $\chi + \psi$ *jest zawsze równa* 1 *i jest funkcją ciągłą.*

Przykład 5. *Przykład funkcji wszędzie nieciągłej, której wartość bezwzględna jest ciągła — jest to zmodyfikowana funkcja Dirichleta:*

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wartość bezwzględna tej funkcji jest zawsze równa 1 *i jest funkcją ciągłą.*

Przykład 6. *Przykład funkcji ciągłej tylko w jednym punkcie.*

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dowód. Funkcja θ jest ciągła tylko w zerze. Przeprowadzenie dowodu (najlepiej z wykorzystaniem definicji Heinego) zostawimy czytelnikowi. □

Na koniec damy przykład funkcji o licznych punktach ciągłości i nieciągłości (tego się nie da narysować).

Przykład 7. *Przykład funkcji nieciągłej dla liczb wymiernych i ciągłej dla liczb niewymiernych.*

Przy definicji wykorzystamy fakt, że każda liczba wymierna $x \neq 0$ *ma jednoznaczny zapis* $x = p/q$*, gdzie* p, q *są liczbami całkowitymi i* $q > 0$*, oraz ułamek* p/q *jest nieskracalny.*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/q & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \;\; x = p/q, \;\; p/q \;\text{ nieskracalne}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dowód. Niech x_0 będzie liczbą niewymierną, a x_n ciągiem dążącym do x_0. W tym ciągu możemy mieć wyrazy niewymierne i wymierne. Dla x_n niewymiernych $\varphi(x_n) = 0$, a dla x_n wymiernych $\varphi(x_n) = \varphi(p_n/q_n)$, gdzie mianownik q_n rośnie do nieskończoności wraz z dokładnością przybliżenia x_0, to znaczy, że $\varphi(x_n) = \varphi(p_n/q_n) = 1/q_n$ dąży do zera, co daje, że niezależnie od ciągu x_n mamy $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$.

Niech teraz $x_0 = p/q$ (nieskracalne) będzie liczbą wymierną, ciąg $x_n = x_0 = p/q$ ma granicę x_0, a ciąg wartości funkcji $\varphi(x_n) = 1/q$ jest stały i ma granicę $1/q$. Weźmy inny dowolny ciąg, tym razem liczb niewymiernych x_n, dążący do x_0, np. $x_n = x_0 + \pi/n$. Ciąg wartości funkcji $\varphi(x_n) = 0$ jest stały o granicy 0. Oczywiście $1/q \neq 0$, czyli funkcja φ jest nieciągła dla liczb wymiernych. □

Znacznie trudniej udowodnić, że niemożliwe jest podanie przykładu funkcji: ciągłej dla liczb wymiernych, a nieciągłej dla liczb niewymiernych [4, Ch. 8].

Literatura

1. P. Gawron, *Uwagi o ewolucji pojęcia ciągłości*, MINUT 2021 (3), s. 255–257
2. K. Maurin, *Analiza część I Elementy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1991
3. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy Tom I*, PWN, Warszawa, 1972
4. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam, 1964