

## ENERGY CRITERION IN ASSESSING THE CORRECTNESS OF THE STIFFNESS MATRIX FOR NON-STANDARD FINITE ELEMENTS

### ENERGETYCZNE KRYTERIUM OCENY POPRAWNOŚCI MACIERZY SZTYWNOŚCI NIESTANDARDOWYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

#### Abstract

*The paper presents the assessment of the correctness of the stiffness matrix for non-standard finite elements, which are membrane elements with additional, rotational degrees of freedom at a node. When applied to modelling, they make it possible to connect sub-areas with different degrees of freedom. Formulas for a mean value of elastic strain energy of the elements were derived, the values were compared with the density of elastic strain energy in a classical membrane state.*

**Keywords:** elastic strain energy, membrane (transition) element, stiffness matrix, rotational degree of freedom

#### Streszczenie

*W prezentowanej pracy przeprowadzono ocenę poprawności macierzy sztywności niestandardowych elementów skończonych. Niestandardowe elementy skończone to elementy tarczowe z dodatkowymi rotacyjnymi stopniami swobody w węźle. Zastosowane w modelowaniu umożliwiają połączenie podobszarów o różnych stopniach swobody. Wyprowadzone zostały wyrażenia na średnią wartość energii sprężystej ww. elementów, które porównano z gęstością energii sprężystej występującej w klasycznym stanie tarczowym.*

**Słowa kluczowe:** energia sprężysta, element tarczowy, macierz sztywności, rotacyjny stopień swobody

#### 1. Introduction

In all analyses of structures, especially in those conducted using computer techniques, a fundamental issue, decisive for the quality of the results obtained, is to adopt an appropriate set of procedures, i.e. generally speaking, a computational model. In finite element modelling, all basic quantities, such as geometry, support, load and physical properties, which characterise the structural item being considered are modelled. Modelling the first, the second and, partly, the third quantity strictly depends on the type of elements used, which refers to the element shape and assumed degrees of freedom. When considerations are restricted to the displacement FEM representation, degrees of freedom are reduced to two types of nodal displacements: translational and rotational ones. From such a standpoint, modelled structural systems, and more generally modelled areas, can be divided into two classes. The first class comprises those areas, in which elements with only translational

#### 1. Wprowadzenie

We wszystkich analizach konstrukcji, a szczególnie w przeprowadzanych przy użyciu technik komputerowych, podstawowym zagadnieniem decydującym o jakości otrzymywanych wyników jest przyjęcie właściwego schematu albo mówiąc ogólnie – modelu obliczeniowego. W modelowaniu skończenie elementowym, procesowi temu podlegają wszystkie podstawowe wielkości charakteryzujące analizowany obiekt konstrukcyjny, do których należą: geometria, podparcie, obciążenie, cechy fizyczne. Zamodelowanie pierwszej, drugiej, częściowo trzeciej wielkości uzależnione jest ściśle od rodzaju zastosowanych elementów. Chodzi przy tym o ich kształt i przyjęte stopnie swobody. Ograniczając rozważania do przemieszczeniowej reprezentacji MES, sprowadzamy stopnie swobody do dwóch rodzajów przemieszczeń węzłowych: translacyjnych i rotacyjnych. Z tego punktu widzenia modelowane układy konstrukcyjne albo ogólniej – modelowane obszary, możemy podzielić na dwie klasy.

degrees of freedom occur (2D or 3D areas). The second class includes areas, in which sub-areas with translational degrees of freedom and sub-areas with both translational and rotational degrees of freedom, occurring jointly, are found. In order to make it possible to connect those two sub-areas, it is necessary to distinguish a transition zone and to model that zone with the so-called transition elements, which will have nodes with translational, and also translational and rotational degrees of freedom occurring jointly (Figure 1).

In the present study, such transition elements will be treated as non-standard elements.

Do pierwszej zaliczamy te obszary, w których występują elementy mające tylko translacyjne stopnie swobody (obszary 2D lub 3D), do drugiej takie, w których występują podobszary z elementami o translacyjnych stopniach swobody i podobszary ze stopniami zarówno translacyjnymi, jak i rotacyjnymi występującymi łącznie. By możliwe było połączenie tych dwóch podobszarów, konieczne jest wyodrębnienie strefy przejściowej i zamodelowanie jej tzw. elementami przejściowymi, które będą miały zarówno węzły tylko z translacyjnymi, jak i translacyjnymi oraz rotacyjnymi stopniami występującymi łącznie (rys. 1). Takie elementy będą w naszym rozumieniu elementami niestandardowymi.

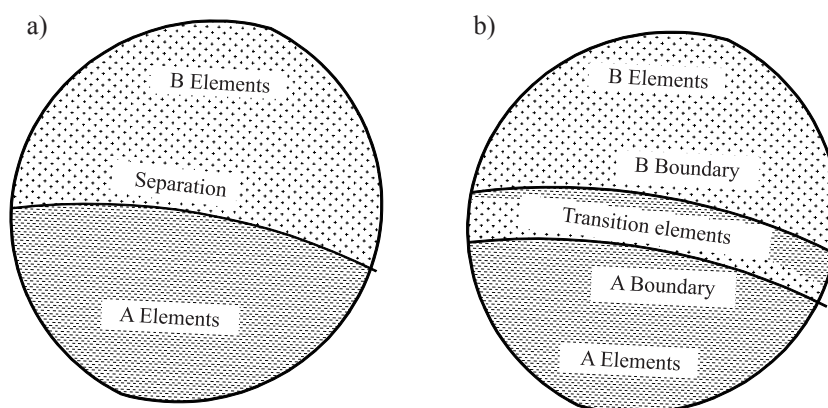


Fig. 1. Modelling the transition between sub-areas with degrees of freedom of different type

Rys. 1. Zamodelowanie połączenia (przejścia) między podobszarami o różnych rodzajach stopni swobody

The issues concerning transition elements have not been thoroughly investigated yet. The number of publications on the subject is limited, in the world they include several, in Poland just a few, titles.

Transition elements have been a focus of increased interest in recent years. The elements that allow transition between areas with grids of different density, thus with different degrees of freedom were described, among others, by: Gupta [1], who proposed a rectangular, eight-node element with four transition nodes located at the mid-length of the sides. Jeyachandrabose and Kirkhope [2] presented a family of triangular elements with transition nodes inside the element and along its edge.

First works on membrane elements with rotational degrees of freedom included those by Allman [3], Bergan, Fellipe [4] and Cook [5]. All those researchers dealt with a triangular element with nine degrees of freedom. Square polynomials were used to describe the displacement area, rotation and moment quantities were substituted with translational quantities and forces, which was

Zagadnienie elementów przejściowych nie zostało jak dotąd dostatecznie opracowane. Liczba publikacji na ten temat jest bardzo ograniczona, w literaturze światowej nie przekracza kilkunastu, a w krajowej kilku pozycji.

W ostatnich latach wzrosło zainteresowanie tematyką dotyczącą elementów przejściowych.

Elementy umożliwiające przechodzenie między obszarami z siatkami podziału o różnej gęstości i tymi samymi stopniami swobody zostały opisane m.in. przez Gupta [1], który zaproponował prostokątny ośmiowęzłowy element z czterema węzłami przejściowymi leżącymi w połowie długości boków. Jeyachandrabose i Kirkhope [2] przedstawili rodzinę elementów trójkątnych z węzłami przejściowymi wewnątrz elementu i wzdłuż jego krawędzi.

Jedne z pierwszych prac poświęconych elementom tarczowym z rotacyjnymi stopniami swobody należą do Allmana [3], Bergana, Fellipe [4] i Cooka [5]. Wszyscy oni zajmowali się elementem trójkątnym z dziewięcioma stopniami swobody. Do opisu pola przemieszczeń przyjmowali wielomiany kwadratowe, a wielkości rotacyjne i momentowe zastępowali translacyjnymi i si-

followed by boundary transition. For the elements obtained, it was necessary to adopt additional parameters, selected numerically, to optimise the solutions to individual problems. Hughes and Brezzi [6] proposed an element, which in addition to an area of translational displacements, contained an independent area with rotational displacements. The solution was obtained using variational approach appropriate for mixed displacement problems. At the end of the 20<sup>th</sup> cent, a study by Chinosi, Comodi and Sacchi [7] was published, which presented a new element with rotational degrees of freedom.

In Polish literature on the subject, rotational degrees of freedom in membranes were first referred to in the work by Rakowski [8] and in [9].

The way of constructing non-standard finite elements analysed in the present work, that is plane transition elements, termed 1R3H, 2R2H, 4R, their stiffness matrix, together with their explicit forms were presented in the works of Rakowski [10] and of the author [11, 12].

łami dokonując następnie przejścia granicznego. Użyte elementy wymagały przyjmowania dodatkowych parametrów dobieranych numerycznie w celu optymalizowania wyników rozwiązań poszczególnych problemów. Hughes i Brezzi [6] zaproponowali element, w którym występuje, poza polem przemieszczeń translacyjnych, niezależne pole przemieszczeń rotacyjnych. Rozwiązanie uzyskali, stosując podejście wariacyjne właściwe do mieszanych ujęć przemieszczeniowych. W ostatnich latach XX wieku ukazała się praca Chinosi, Comodi oraz Sacchi [7], prezentująca nowy element z rotacyjnymi stopniami swobody.

W literaturze polskiej jedną z pierwszych informacji o rotacyjnych stopniach swobody w tarczach można znaleźć w pracy Rakowskiego [8] oraz w książce [9].

Sposób budowy niestandardowych elementów skończonych, analizowanych w niniejszej pracy, tj. płaskich elementów przejściowych o nazwach: 1R3H, 2R2H, 4R, ich macierzy sztywności wraz z jawnymi postaciami, przedstawiono w pracach Rakowskiego [10] i autorki [11, 12].

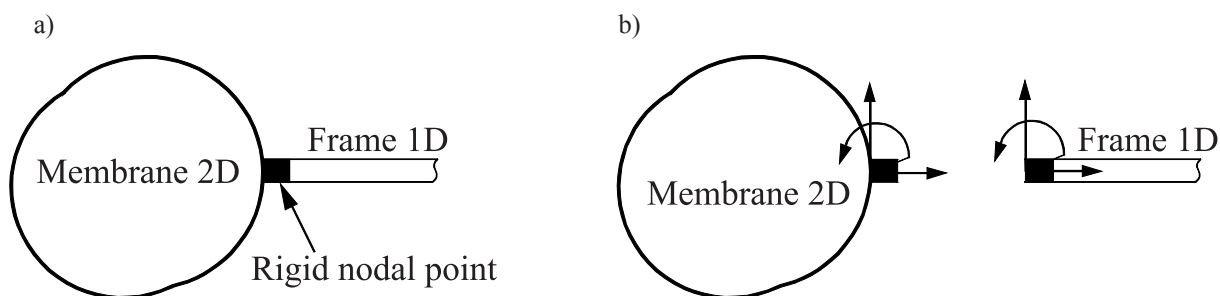


Fig. 2. 2D and 1D areas connection  
Rys. 2. Połączenie obszarów 2D i 1D

The assumption on a rigid nodal point (Fig. 2) accounts for an additional accuracy disturbance when compared with standard 2D elements, which entails local zeroing of shape strains. It is therefore necessary to assess the degree of difference in results, caused by the “parasite” factors mentioned above. It is done by comparing the density of the “exact” elastic strain energy with the corresponding quantity found in membrane elements with additional, rotational degrees of freedom.

The present paper makes an assessment of the correctness of stiffness matrixes of non-standard finite elements using the energy criterion put forward by Gilewski [13, 14].

Założenie punktowej sztywnej inkluzji (rys. 2) jest dodatkowym „zaburzeniem” dokładności w stosunku do standardowych elementów 2D, co pociąga za sobą lokalne zerowanie się odkształceń postaciowych. Należy więc ocenić stopień odmienności wyników spowodowanych przez wymienione czynniki „pasożytnicze” przez porównanie gęstości energii sprężystej „dokładnej” z analogiczną wielkością występującą w elementach tarczowych z dodatkowymi rotacyjnymi stopniami swobody.

Dlatego też w niniejszej pracy przeprowadzono ocenę poprawności macierzy sztywności niestandardowych elementów skończonych, stosując zaproponowane przez Gilewskiego [13, 14] kryterium energetyczne.

## 2. Energy criterion – mathematical formulation of the problem

Energy criterion involves making the following assumptions:

- elastic strain energy stored in the element is expressed by the dependence:

$$U = \int_V U_0 dV \quad (1)$$

where  $U_0$  is energy density determined exactly in the problem under consideration;

- in FEM representation, elastic strain energy in an element can be expressed as

$$\tilde{U} \equiv U = \frac{1}{2} q^T k q \quad (2)$$

Components determining energy in dependence (2) have the form

$$q_i k_j q_j \quad (3)$$

thus, they contain elements of the stiffness matrix and nodal displacements;

- displacements  $q_i, q_j$  are treated as function values due to expanding them into Taylor series at the element centre of gravity,
- in the expansions obtained, boundary transitions are made, due to the dimensions of the elements we receive

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \tilde{U} = \tilde{U}_0 \quad (4)$$

- received  $\tilde{U}_0$ , stating the approximate density of energy, is compared with the “exact” density  $U_0$ , which makes it possible to assess the correctness of the element stiffness matrix.

A different approach to validate the correctness of non-standard stiffness matrixes was adopted by Rakowski in [15] and [16]. As the procedure is not followed in the present study, only a very general description of it is given:

- equilibrium conditions on element boundaries, defined by relations typical of FEM, are transformed into appropriate difference equations,
- boundary transitions are made in difference equations, as a result equilibrium differential equations are obtained,
- obtained differential equations are compared with equilibrium differential equations derived from general principles of elasticity theory, which makes it possible to validate the correctness of stiffness matrixes under consideration.

## 2. Kryterium energetyczne – matematyczne sformułowanie problemu

Kryterium energetyczne polega na następujących założeniach:

- energia sprężysta nagromadzona w elemencie wyraża się zależnością:

$$U = \int_V U_0 dV \quad (1)$$

gdzie  $U_0$  to gęstość energii określona dokładnie w rozpatrywanym problemie;

- w sformułowaniu MES energię sprężystą w elemencie można wyrazić jako

$$\tilde{U} \equiv U = \frac{1}{2} q^T k q \quad (2)$$

Składniki określające energię w zależności (2) mają postać

$$q_i k_j q_j \quad (3)$$

zawierają więc elementy macierzy sztywności oraz przemieszczenia węzłowe;

- przemieszczenia  $q_i, q_j$  traktujemy jako wielkości funkcyjne dokonując ich rozwinięcia w szereg Taylora względem środka ciężkości w elemencie,
- w otrzymanych rozwinięciach dokonujemy przejścia granicznego, ze względu na wymiary elementów otrzymując

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \tilde{U} = \tilde{U}_0 \quad (4)$$

- otrzymane  $\tilde{U}_0$  określające przybliżoną gęstość energii porównujemy do gęstości „dokładnej”  $U_0$ , co pozwala na dokonanie oceny poprawności macierzy sztywności elementu.

Inne podejście do oceny poprawności niestandardowych macierzy sztywności zaproponował Rakowski [15] i [16]. Ponieważ nie będziemy wykorzystywali tego sposobu, przytoczymy tylko ogólny jego opis:

- warunki równowagi na granicach elementów, określone związkami typowymi dla MES, przekształca się w odpowiednie równania różnicowe,
- w równaniach różnicowych dokonuje się przejść granicznych otrzymując w rezultacie różniczkowe równania równowagi,
- otrzymane równania różniczkowe porównuje się z różniczkowymi równaniami równowagi otrzymanymi na ogólnych zasadach teorii sprężystości, co pozwala ocenić poprawności rozpatrywanych macierzy sztywności.



### 3. Assessment of the Correctness of Non-Standard Finite Element Stiffness Matrixes

While developing stiffness matrixes of non-standard finite elements, all requirements concerning FEM procedures for displacement representation were satisfied. The obtained stiffness matrixes are symmetric, and forces represented by individual columns fulfil the equilibrium conditions for an arbitrary two-dimensional system. Of all investigated elements, only 4R is an adjusted one. Variation of displacements along the sides is described by third-degree polynomials and the number of nodal parameters related to those displacements equals four, namely two function values and two derivative values. That makes the description unambiguous, thus accounting for continuous description of displacements along the side. For remaining elements, this condition is not satisfied, except for the side with two rigid nodes in 2R2H element. All elements, however, can be used in calculations. It happens so because they satisfy two conditions necessary to produce convergent results, namely the condition of rigid motion and the condition of constant strain. The conditions are guaranteed because the description of the displacement field components involves only the first power of constants and variables. At the same time, all elements yield approximate results, as generally FEM elements do. Shape functions, except for 1D bar, are an approximate description of the displacement field. In the case analysed here, additional accuracy “disturbance”, when compared with standard 2D elements, results from the assumption on rigid nodal point, which leads to local zeroing of shape deformations. Therefore, it is necessary to evaluate to what extent the results are affected by the “parasite” factors mentioned above.

Checking the correctness of the stiffness matrix for 1R3H element Fig. 3 an energy criterion is employed. The mathematical sense of the criterion comes down to examining the following dependence:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} q^T k q}{A} = \tilde{U}_0(0,0) \quad (5)$$

where  $A$  is the element area, in that case  $A = 4a^2$ .

From dependence (5), it follows that FEM solution is correct provided that the mean value of the elastic strain energy stored at the element tends to the value of the density the elastic strain energy at the centre of the element while the element dimension tends to zero. An additional assumption is made that it is square element with  $2a$  side.

### 3. Ocena poprawności macierzy sztywności niestandardowych elementów skończonych

Macierze sztywności zbudowane zostały z zachowaniem wszystkich wymogów koniecznych w realizacji odpowiednich procedur MES w reprezentacji przemieszczeniowej. Otrzymane macierze sztywności są symetryczne, a siły reprezentowane przez poszczególne kolumny spełniają warunki równowagi dowolnego układu płaskiego. Spośród badanych elementów, tylko 4R jest elementem dostosowanym. Zmienność przemieszczeń wzdłuż boków opisana jest wielomianami trzeciego stopnia a liczba parametrów węzłowych związanych z tymi przemieszczeniami jest równa cztery po dwie wartości funkcji i pochodnych. To przesądza o jednoznaczności tego opisu a tym samym o ciągłości opisu przemieszczeń wzdłuż boku. W pozostałych elementach ten warunek nie jest spełniony, za wyjątkiem boku z dwoma węzłami sztywnymi w elemencie 2R2H. Wszystkie natomiast elementy mogą być stosowane w obliczeniach. Spełniają bowiem dwa warunki konieczne do uzyskiwania zbieżności wyników, a mianowicie: warunek ruchu sztywnego i warunek stałych odkształceń. Gwarantem tych warunków jest występowanie w opisie składowych pola przemieszczeń stałych i zmiennych w pierwszej potędze. Jednocześnie wszystkie elementy, jak zresztą w ogóle elementy w MES dają wyniki przybliżone. Funkcje kształtu, za wyjątkiem pręta 1D, są przybliżonym opisem pola przemieszczeń. W naszym przypadku dodatkowym „zaburzeniem” dokładności w stosunku do standardowych elementów 2D jest założenie punktowej sztywnej inkluzji, co pociąga za sobą lokalne zerowanie się odkształceń postaciowych. Należy, więc ocenić stopień odmienności wyników spowodowanych przez wymienione czynniki „pasożytnicze”.

Przystępujemy do sprawdzenia poprawności macierzy sztywności elementu 1R3H (rys. 3) na podstawie kryterium energetycznego, którego sens matematyczny sprowadza się do zbadania następującej zależności:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} q^T k q}{A} = \tilde{U}_0(0,0) \quad (5)$$

gdzie  $A$  to pole powierzchni elementu, w naszym przypadku  $A = 4a^2$ .

Z zależności (5) wynika, że rozwiązanie MES jest poprawne o ile średnia wartość energii sprężystej zgromadzonej w elemencie, zdąża do wartości gęstości energii sprężystej w środku elementu przy wymiarze elementu zmierzającym do zera. Poczyniliśmy dodatkowe założenie, że jest to element kwadratowy o boku  $2a$ .

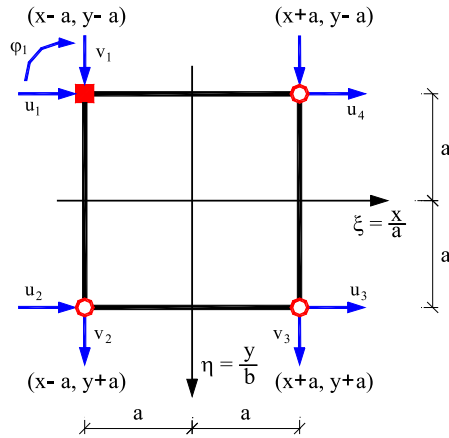


Fig. 3. Square 1R3H element with 2a side  
Rys. 3. Kwadratowy element 1R3H o boku 2a

The density of the elastic strain energy in 2D problem presented in the paper, in the classical membrane state in two-dimensional stress system expressed in strains has the following form

$$U_o = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] \tag{6}$$

Gęstość energii sprężystej w występującym u nas problemie 2D w klasycznym stanie tarczowym, w płaskim stanie naprężenia wyrażona w odkształceniach ma postać

or taking into account Cauchy relations

albo przy uwzględnieniu związków Cauchy'ego

$$U_o = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \tag{7}$$

Table 1. Falk's scheme  
Tabela 1. Schemat Falka

									$u_1$
									$v_1$
									$\varphi_1$
									$u_2$
									$v_2$
									$u_3$
									$v_3$
									$u_4$
									$v_4$
									$q =$
$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{14}$	$k_{15}$	$k_{16}$	$k_{17}$	$k_{18}$	$k_{19}$	•	
$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{24}$	$k_{25}$	$k_{26}$	$k_{27}$	$k_{28}$	$k_{29}$	•	
$k_{31}$	$k_{32}$	$k_{34}$	$k_{35}$	$k_{36}$	$k_{37}$	$k_{38}$	$k_{39}$	•	
$k_{41}$	$k_{42}$	$k_{44}$	$k_{45}$	$k_{46}$	$k_{47}$	$k_{48}$	$k_{49}$	•	
$k_{51}$	$k_{52}$	$k_{54}$	$k_{55}$	$k_{56}$	$k_{57}$	$k_{58}$	$k_{59}$	•	
$k_{61}$	$k_{62}$	$k_{64}$	$k_{65}$	$k_{66}$	$k_{67}$	$k_{68}$	$k_{69}$	•	
$k_{71}$	$k_{72}$	$k_{74}$	$k_{75}$	$k_{76}$	$k_{77}$	$k_{78}$	$k_{79}$	•	
$k_{81}$	$k_{82}$	$k_{84}$	$k_{85}$	$k_{86}$	$k_{87}$	$k_{88}$	$k_{89}$	•	
$k_{91}$	$k_{92}$	$k_{94}$	$k_{95}$	$k_{96}$	$k_{97}$	$k_{98}$	$k_{99}$	•	
$q^T =$	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$	
$U =$	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$	

$$k = \frac{Etab}{1-\nu^2} = \frac{Etab}{1-\nu^2} kq$$

$$U = \frac{1}{2} q^T k q = \frac{1}{2} \frac{Etab}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 q_i k_{ij} q_j$$

In accordance with formula (2), the energy in the element obtained with Falk's scheme is stated as (Table 1).

The elements of  $k_{ij}$  matrix are given in the works [10] and [11, 12], whereas  $q_p, q_j$  are corresponding nodal displacements stated in matrixes  $\mathbf{q}, \mathbf{q}^T$ .

In accordance with Table 1, the energy of the element comprises 45 different components, which are the products of  $k_{ij}$  elements and nodal displacements.

$$u_i^2, v_i^2 - i=1,2,3,4, \quad u_i u_j - i, j=1,2,3,4 (i \neq j), \quad v_i v_j - i, j=1,2,3,4 (i \neq j),$$

$$u_i v_j - i, j=1,2,3,4 (i \neq j), \quad u_i \varphi_1 - i=1,2,3,4, \quad v_i \varphi_1 - i=1,2,3,4, \quad \varphi_1^2$$
(8)

Nodal displacements are treated as function quantities, which will be expanded into Taylor series in accordance with the formula:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x, y)\Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta y}(x, y)\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}(x, y)\Delta x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f}{\Delta x \Delta y}(x, y)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2}(x, y)\Delta y^2$$
(9)

The types of functions expanded at the centre of the coordinate system (point (0,0)) have the form:

$$f_1 = f(x - a, y - a), \quad f_2 = f(x - a, y + a),$$

$$f_3 = f(x + a, y + a), \quad f_4 = f(x + a, y - a)$$
(10)

Expansions involved 45 functions and were quite time-consuming. A few exemplary characteristic expansions are given below:

$$u_1(x - a, y - a) \cdot u_1(x - a, y - a) = u^2(x, y) - 2a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot u(x, y) - 2a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot u(x, y) +$$

$$+ a^2 \cdot \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot u(x, y) + a^2 \cdot \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)^2 + 2a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial x \partial y} \cdot u(x, y) +$$

$$+ 2a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot u(x, y) + a^2 \cdot \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)^2$$

$$u_1(x - a, y - a) \cdot v_1(x - a, y - a) = u(x, y) \cdot v(x, y) - a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot v(x, y) - a \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot u(x, y) +$$

$$- a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v(x, y) - a \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot u(x, y) + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot v(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot u(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot u(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot v(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot v(x, y) + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot u(x, y)$$

Energia w elemencie według wzoru (2) uzyskana przy wykorzystaniu schematu Falka określona jest jako (tabela 1).

Elementy macierzy  $k_{ij}$  podane są w pracach [10] i [11, 12], natomiast  $q_p, q_j$  są odpowiednimi przemieszczeniami węzłowymi określonymi w macierzach  $\mathbf{q}, \mathbf{q}^T$ .

Zgodnie z tabelą 1 energia elementu składa się z 45 różnych składników będących iloczynami elementów  $k_{ij}$  oraz przemieszczeń węzłowych

Przemieszczenia węzłowe traktujemy jako wielkości funkcyjne, które będą podlegały rozwinięciu w szeregu Taylora według wzoru:

Typy funkcji rozwijanych względem początku układu współrzędnych (pkt (0,0)) mają postać:

Rozwinięcia dotyczyły 45 funkcji i były dość pracochłonne. Podajemy dla przykładu kilka charakterystycznych rozwinięć:

$$\begin{aligned}
v_1(x-a, y-a) \cdot u_3(x+a, y+a) &= v(x, y) \cdot u(x, y) - a \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot u(x, y) + a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot v(x, y) + \\
&- a \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot u(x, y) + a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v(x, y) + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot u(x, y) - a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot v(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot u(x, y) + a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot v(x, y) - a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \\
&- a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - a^2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot u(x, y) + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot v(x, y)
\end{aligned}$$

The rotation was made dependent on the displacement in accordance with the formula:

Obrót uzależniono od przemieszczenia, zgodnie ze wzorem:

$$\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x-a, y-a) \cdot v_4(x+a, y-a) &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v(x, y) + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot v(x, y) + a \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot v(x, y) + \\
&- a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x^2} \cdot v(x, y) + a \cdot \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right)^2 + a \cdot \frac{\partial u^2(x, y)}{\partial y^2} \cdot v(x, y) + \\
&+ a \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - a \cdot \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot v(x, y) - a \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\
\varphi_1(x-a, y-a) \cdot \phi_1(x-a, y-a) &= \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right)^2
\end{aligned}$$

Using formula from Table 1 and then formula (5), the expression for the mean value of the elastic strain energy is finally derived. It takes on the following form:

Postępując zgodnie z tabelą 1, a następnie z formułą (5) wyrażenie na średnią wartość energii sprężystej przybiera postać:

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.03 - 0.0125\nu) \gamma_{xy}^2 + \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy} \right] \quad (12)$$

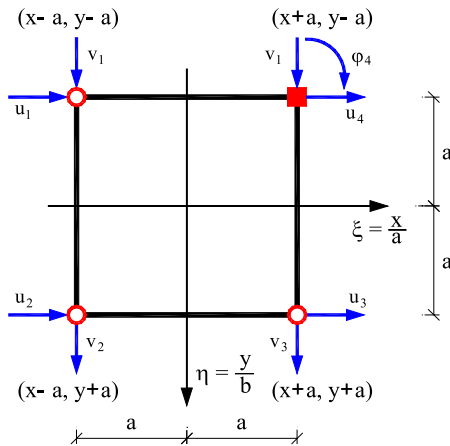


Fig. 4. Square 1R3H element with a rigid nodal point at node 4

Rys. 4. Kwadratowy element 1R3H ze sztywną inkluzją w węźle 4

Checking the correctness with the use of energy criterion is performed on 1R3H element with a rigid nodal point at the fourth node (Fig. 4). The final form of the mean value of the elastic strain energy (13) is obtained following the same assumptions as

Sprawdzeniu poprawności na podstawie kryterium energetycznego poddajemy element 1R3H ze sztywną inkluzją w węźle 4 (rys. 4). Ostateczną postać średniej wartości energii sprężystej (13) otrzymujemy na podstawie tych samych założeń jak dla po-



for the element that has been investigated previously, with the only difference being a rotational degree of freedom, this time located at the fourth node.

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.03 - 0.0125\nu) \gamma_{xy}^2 - \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy} \right] \quad (13)$$

Following the algorithm above, the expressions for the mean value of the elastic strain energy of 2R2H element (Fig. 5) (14) and 4R element (Fig. 6) (15) are determined.

przednio badanego elementu, jedyną różnicę stanowi rotacyjny stopień swobody, tym razem usytuowany w węźle czwartym.

Postępując według powyższego algorytmu, wyznaczone zostały wyrażenia na średnią wartość energii sprężystej elementu 2R2H (rys. 5) (14) oraz elementu 4R (rys. 6) (15).

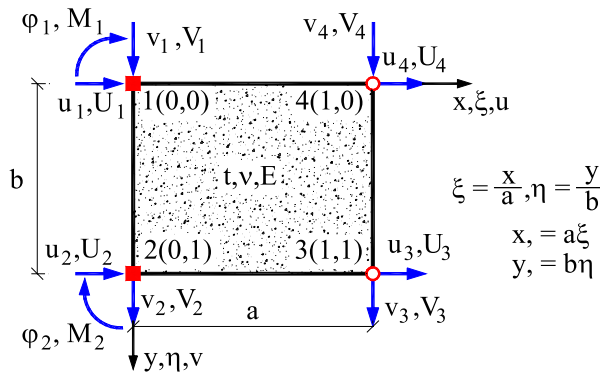


Fig. 5. 2R2H element  
Rys. 5. Element 2R2H

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.035 - 0.033\nu) \gamma_{xy}^2 \right] \quad (14)$$

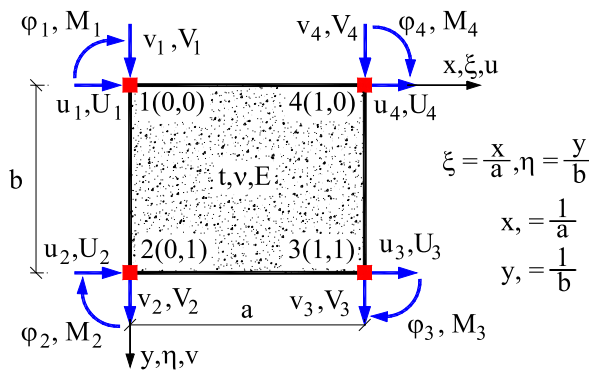


Fig. 6. 4R element  
Rys. 6. Element 4R

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.05 - 0.05\nu) \gamma_{xy}^2 \right] \quad (15)$$

## 4. Discussion

All the expressions obtained above do not give, in the boundary transition, the exact density of the elastic strain energy of the membrane state because they contain additional terms that result from assuming rotational degrees of freedom. Thus, 1R3H, 2R2H and 4R elements are not, as could be expected, correct with respect to energy when compared with 4H elements.

## 4. Rezultaty badań, dyskusja

Wszystkie otrzymane powyżej wyrażenia nie dają w przejściu granicznym ścisłej gęstości energii sprężystej stanu tarczowego, zawierają bowiem dodatkowe człony wynikające z założenia obrotowych stopni swobody. Zatem elementy: 1R3H, 2R2H, 4R nie są, czego należało oczekiwać elementami poprawnymi, w sensie energetycznym z elementami 4H.

The analysis of the term  $\left(\frac{1+\nu}{8}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\gamma_{xy}$  in expressions (12) and (13) for 1R3H element seems interesting. The terms have opposite signs, which can be attributed to the opposite signs of linear strains, at the assumption on unit rotations at rigid nodes (Fig. 7).

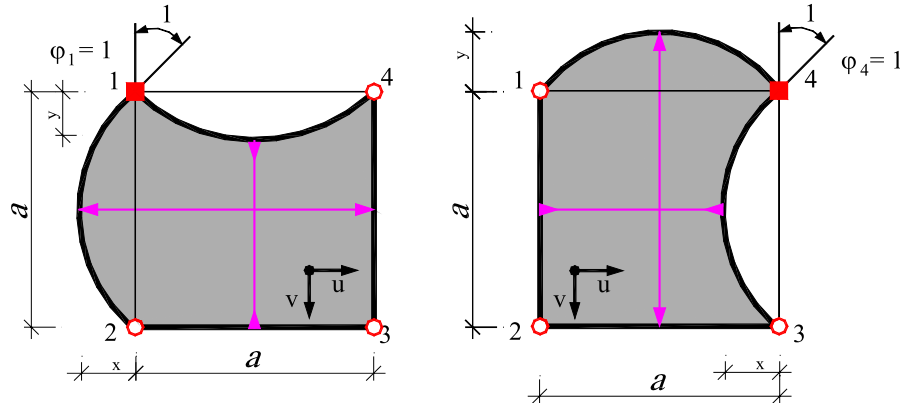


Fig. 7. Linear strains in 1R3H element

Rys. 7. Odkształcenia liniowe w elemencie 1R3H

On the basis of Figure 7, it can be stated that imposing unit rotation on the first node results in the elongation of fibres along the  $x$  axis, and at the same time shortening of the fibres along the  $y$  axis. When, however, unit rotation is imposed on the fourth node, the fibres along the  $x$  axis are shortened, whereas those along the  $y$  axis are elongated. If elongation is marked with a plus sign (+) and shortening is marked with a minus sign (-), unit rotations produce opposite signs of linear strains, which entirely explains difference in signs for the term

$\left(\frac{1+\nu}{8}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\gamma_{xy}$  in the expressions describing the mean value of the elastic strain of 1R3H element. It should also be noted that the term mentioned above is not found in expressions (14), (15), which results from a symmetric number of the nodes of the same type in 2R2H and 4R elements.

Analiza członu  $\left(\frac{1+\nu}{8}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\gamma_{xy}$  w wyrażeniach (12) i (13) w elemencie 1R3H wydaje się być interesująca. Człony te mają przeciwne znaki, co możemy wytłumaczyć przeciwnymi zwrotami odkształceń liniowych, zakładając jednostkowe obroty w sztywnych węzłach (rys. 7).

Na podstawie rysunku 7 możemy stwierdzić, że nadając jednostkowy obrót węzłowi pierwszemu następuje wydłużenie włókien wzdłuż osi  $x$  i jednocześnie skrócenie włókien wzdłuż osi  $y$ . Natomiast w przypadku, kiedy nadamy jednostkowy obrót węzłowi czwartemu włókna wzdłuż osi  $x$  ulegają skróceniu a włókna wzdłuż osi  $y$  wydłużeniu. Jeżeli oznaczymy znakiem plus (+) wydłużenie a znakiem minus (-) skrócenie, to jednostkowe obroty wywołują przeciwne znaki odkształceń liniowych, co w zupełności tłumaczy

różnicę znaków przy członie  $\left(\frac{1+\nu}{8}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\gamma_{xy}$  w wyrażeniach na średnią wartość energii sprężystej elementu 1R3H. Należy również zwrócić uwagę, że ww. człon nie występuje w wyrażeniach (14), (15), wynika to z symetrycznej liczby tego samego rodzaju węzłów w elemencie 2R2H oraz 4R.

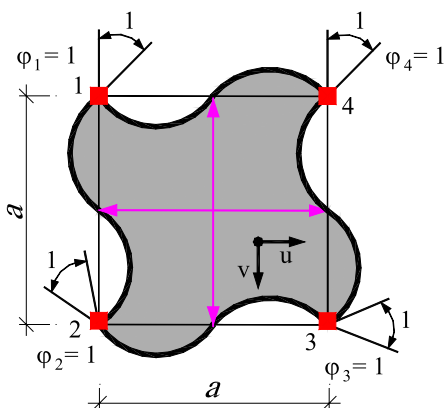


Fig. 8. Linear strains in 4R element

Rys. 8. Odkształcenia liniowe w elemencie 4R

For two or four rigid nodes in an element, linear strains resulting from unit rotations reduce each other, (e.g., cf. Figure 8).

In order to assess the mean numerical value of the elastic strain energy of the transition elements examined in the study in comparison with the density of the elastic strain energy in the membrane state, the experimental data from Kapkowski and Stupnicki's work [17] is used. The authors employed the active covering method to determine the boundaries of plastic areas for elements with a hole, subjected to tension. Specimens made of PA-7 alloys were initially deformed to obtain elastic-plastic material characteristics with a slight enhancement. The specimen cross-section was weakened with a square hole. The strain distribution was determined by assuming isochromating images to be the output data. As strains in the investigated material were the same as in the plastic bonded to it:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = mf \quad (16)$$

where:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – major strains,  $m$  – order of the isochrome,  $f$  – value of the isochrome.

It was assumed from the experiment:  $m = 5.63$ ,  $f = 1.1 \cdot 10^{-3}$ .

The strain distribution  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  was determined in the zone adjacent to the axis of the least section from equation (16) of the expressions below and:

$$\sigma_1 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_1 \quad (17)$$

where:  $\sigma_1 = 0.3\sigma_{pl} = 101.8$  MPa,  $\sigma_{pl} = 339.32$  MPa – yield point,  $E = 70.61$  GPa,  $\nu = 0.3$ .

$$e = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_x = e + \frac{1}{2}mf \cos 2\varphi \quad (19)$$

$$\varepsilon_y = e - \frac{1}{2}mf \cos 2\varphi \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = -mf \sin 2\varphi \quad (21)$$

where:  $\varphi = 22.5^\circ$  – the angle of the main directions of the strain state.

In view of the above, strains take on the following values:

$$\varepsilon_x = 0.0017, \quad \varepsilon_y = -0.0027, \quad \gamma_{xy} = -0.0044$$

W przypadku dwóch lub czterech sztywnych węzłów w elemencie, odkształcenia linowe, wynikające z jednostkowych obrotów, wzajemnie się redukują, (np. por. rys. 8).

By ocenić wartość liczbową średniej wartości energii sprężystej zaproponowanych elementów przejściowych w stosunku do gęstości energii sprężystej stanu tarczowego, posłużymy się danymi doświadczalnymi z pracy Kapkowskiego i Stupnickiego [17]. Autorzy zastosowali metodę pokryć czynnych do wyznaczenia granicy obszarów plastycznych dla rozciąganych elementów z otworem. Próbkę wykonaną ze stopów PA-7 były wstępnie odkształcane dla uzyskania charakterystyki materiału sprężysto-plastycznego z niewielkim wzmocnieniem, ich przekrój osłabiony został otworem kwadratowym. Rozkład odkształceń wyznaczono poprzez przyjęcie obrazu izochrom jako danych wyjściowych. Ponieważ odkształcenia w badanym materiale były takie same jak w przyklejonym doń plastyku, to:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = mf \quad (16)$$

gdzie:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – główne odkształcenia,  $m$  – rząd izochromy,  $f$  – wartość izochromy.

Z doświadczeń przyjęto:  $m = 5,63, f = 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

Rozkład odkształceń  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  wyznaczono w obszarze przyległym do osi najmniejszego przekroju z równań: (16) poniższych wyrażen oraz:

$$\sigma_1 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_1 \quad (17)$$

where:  $\sigma_1 = 0,3\sigma_{pl} = 101,8$  MPa,  $\sigma_{pl} = 339,32$  MPa – yield point,  $E = 70,61$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

$$e = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_x = e + \frac{1}{2}mf \cos 2\varphi \quad (19)$$

$$\varepsilon_y = e - \frac{1}{2}mf \cos 2\varphi \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = -mf \sin 2\varphi \quad (21)$$

gdzie:  $\varphi = 22,5^\circ$  – kąt kierunków głównych stanu odkształcenia.

Wobec powyższego odkształcenia przyjmują następujące wartości:

$$\varepsilon_x = 0.0017, \quad \varepsilon_y = -0.0027, \quad \gamma_{xy} = -0.0044$$

Having considered the strain values above, numerical values of the elastic strain energy density are estimated:

- classical membrane element –  $\tilde{U}_o = 0.557 \text{ MPa}$ ,
- 1R3H transition element –  $\tilde{U} = 0.605 \text{ MPa}$ ,
- 2R2H transition element –  $\tilde{U} = 0.576 \text{ MPa}$ ,
- 4R transition element –  $U = 0.583 \text{ MPa}$ .

When nodal geometric parameters are given unit values, the values of the elastic strain energy density should follow the following pattern: the least energy is stored in 4H element. Subsequently, the values of the energy density should increase with the number of rotational degrees of freedom applied, i.e., the stiffer the element is, the more energy it stores. Such a regularity can be observed in 2R2H and 4R elements. 1R3H element, however, does not show that pattern, because the energy density expression contains the

term  $\pm \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy}$ , which depending on the rigid nodal point location, either increases or decreases this value. A similar behaviour is observed, when the expression is derived for the mean elastic strain energy in an element which has three rigid and one hinge nodes (3R1H), (cf. Fig. 9). The expression takes on the form:

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.05 - 0.033\nu) \gamma_{xy}^2 - \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy} \right] \quad (22)$$

If the hinge node is located at node 1 or 3, and if the hinge node is located at node 2 or 4:

$$\tilde{U}_o = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{xy}^2 + (0.05 - 0.033\nu) \gamma_{xy}^2 + \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy} \right] \quad (23)$$

3R1H element (Fig. 9) is not applied to structure modelling. The stiffness matrix for the element was built only in order to check the expression for the mean elastic strain energy in comparison with 1R3H element, due to asymmetric number of nodes of the same type and the effect of the number of rotational degrees of freedom on this expression.

Percentages of numerical values of the elastic strain energy density in the transition elements discussed above, in comparison with the classical membrane element are as follows:

- 1R3H transition element ( rigid nodal point at the first node ) – 8.62%,

Biorąc pod uwagę powyższe wartości odkształceń, oszacowane zostały wartości liczbowe gęstości energii sprężystej:

- klasyczny element tarczowy –  $\tilde{U}_o = 0,557 \text{ MPa}$ ,
- przejściowy element 1R3H –  $\tilde{U} = 0,605 \text{ MPa}$ ,
- przejściowy element 2R2H –  $\tilde{U} = 0,576 \text{ MPa}$ ,
- przejściowy element 4R –  $\tilde{U} = 0,583 \text{ MPa}$ .

Gdy geometrycznym parametrom węzłowym nadajemy wartości jednostkowe, to wartości gęstości energii sprężystej powinny układać się w sposób następujący: otóż najmniejszą energię gromadzi element 4H, następnie wartości gęstości energii powinny wzrastać wraz z liczbą przyłożonych obrotowych stopni swobody, czyli im bardziej „sztywny” element tym więcej energii gromadzi. Jednak w przebadanych elementach tak się nie dzieje, ponieważ wyrażenie na gęstość energii elementu 1R3H zawiera człon

$\pm \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy}$ , który w zależności od umiejscowienia sztywnej inkluzji zwiększa lub zmniejsza tę wartość. Podobnie rzecz się ma, jeśli wyznaczmy wyrażenie na średnią wartość energii sprężystej elementu, w którym występują trzy węzły sztywne i jeden przegubowy (3R1H) (por. rys. 9). Wyrażenie to przybiera postać:

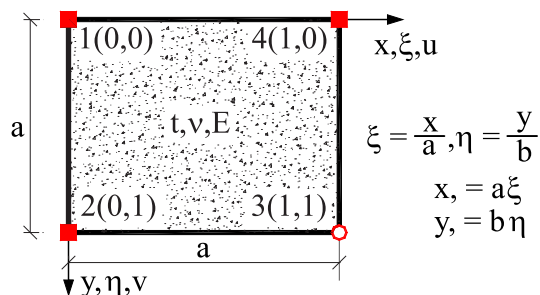
Jeżeli węzeł przegubowy znajduje się w węźle 1 lub 3 oraz jeżeli węzeł przegubowy znajduje się w węźle 2 lub 4, to otrzymujemy:

Element 3R1H (rys. 9) nie ma zastosowania w modelowaniu konstrukcji. Macierz sztywności tego elementu została zbudowana tylko w celu sprawdzenia wyrażenia na średnią wartość energii sprężystej w stosunku do elementu 1R3H z uwagi na niesymetryczną liczbę węzłów tego samego rodzaju i wpływ liczby rotacyjnych stopni swobody na to wyrażenie.

Jeśli chodzi o procentowy udział wartości liczbowych gęstości energii sprężystej ww. elementów przejściowych w stosunku do klasycznego elementu tarczowego, to przedstawia się on następująco:

- przejściowy element 1R3H (sztywna inkluzja w węźle pierwszym) – 8,62%,

- 2R2H transition element – 3.41%,
- 4R transition element – 4.67%.



- przejściowy element 2R2H – 3,41%,
- przejściowy element 4R – 4,67%.

Fig. 9. 3R1H element with rotational degrees of freedom at the first, second and fourth nodes

Rys. 9. Element 3R1H z rotacyjnymi stopniami swobody w węzłach 1, 2 i 4

## 5. Conclusions

All expressions obtained for the mean value of the elastic strain energy in non-standard elements do not give, in boundary transition, the exact density of the elastic strain energy of the membrane state. It happens so because they contain additional terms that result from the assumption on additional degrees of freedom. Therefore, 1R3H, 2R2H, 4R are not, as one could expect, correct elements with respect to energy when compared with 4H elements. The values of the elastic strain energy density, however, demonstrate some kind of regularity. 4H element stores the least energy. Then, the energy density values grow with the number of rotational degrees of freedom applied, which means the “stiffer” the element is, the more energy is stored in it. Such a pattern is observed in 2R2H and 4R elements. The regularity does not hold for 1R3H element because of the term

$\pm \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy}$  found in the expression for energy density. Depending on where the rigid nodal point is located, the term either increases or decreases the energy value. Non-standard finite elements can be used in calculations because they satisfy two conditions necessary to produce convergent results, namely the condition of rigid motion and the condition of constant strain. Additionally, the continuity of displacements along the boundary is maintained in 4R, i.e. it is an adjusted element.

## References

- [1] Gupta A.K., *A finite element for transition from a fine to coarse grid*, Int. Jour. Num. Meth. Eng. 12, 1978, pp. 35-45.
- [2] Jeyachandrabose C., Kirkhope J., *Construction of transition finite elements for the plane triangular family*, Com.&Struct. 18, 1984, pp. 1127-1134.
- [3] Allman D.J., *Evaluation of the constant strains triangle with drilling rotations*, Int. J. Num. Meth. Engrg. 26, 1988, pp. 2645-55.
- [4] Bergan, P.G., C.A. Fellipa, *A triangular membrane element with rotational degrees-of-freedom*, Comp. Meth. Appl. Engrg., 50, 1985, pp. 25-69.
- [5] Cook R.D., *A plane hybrid element with rotational D.O.F. and adjustable stiffness*, Int. J. Num. Meth. Engrg. 24, 1987, pp. 1499-1508.

## 5. Podsumowanie

Wszystkie otrzymane wyrażenia na średnią wartość energii sprężystej niestandardowych elementów skończonych nie dają w przejściu granicznym ściślejszej gęstości energii sprężystej stanu tarczowego, zawierają bowiem dodatkowe człony wynikające z założenia obrotowych stopni swobody. Zatem elementy: 1R3H, 2R2H, 4R nie są, czego należało oczekiwać elementami poprawnymi, w sensie energetycznym z elementami 4H. Gdy geometrycznym parametrom węzłowym nadajemy wartości jednostkowe, to wartości gęstości energii sprężystej powinny układać się w sposób następujący otóż najmniejszą energię gromadzi element 4H, następnie wartości gęstości energii powinny wzrastać wraz z liczbą przyłożonych obrotowych stopni swobody, czyli im bardziej „sztywny” element, tym więcej energii gromadzi. Jednak w przebadanych elementach tak się nie dzieje, ponieważ wyrażenie na gęstość energii elementu 1R3H za-

wiera człon  $\pm \left( \frac{1+\nu}{8} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \gamma_{xy}$ , który w zależności od umiejscowienia sztywnej inkluzji zwiększa lub zmniejsza tę wartość. Jednak mogą być stosowane w obliczeniach, ponieważ spełniają dwa warunki konieczne do uzyskiwania zbieżności wyników, a mianowicie: warunek ruchu sztywnego i warunek stałych odkształceń. Ponadto w elemencie 4R zachowana jest ciągłość przemieszczeń wzdłuż brzegu, tzn. że jest on elementem dostosowanym.



- [6] Hughes T.J.R., Brezzi F., *On drilling degrees-of-freedom*, Comp. Meth. Appl. Engrg., 72, 1989. pp. 105-121.
- [7] Chinosi C., Comodi M.J., Sacchi G., *A new finite element with "drilling" D.O.F.*, Comp.Meth.Appl.Engrg., 149, 1997, pp. 1-11.
- [8] Rakowski G., *Frame – membrane transition elements (in Polish)*, XLI Scientific Conference of the Committee of Civil and Water Engineering of the Polish Academy of Sciences and the Science Committee of the Polish Association of Civil Engineers and Technicians Krynica'95, Structure theory, 1995, pp. 157-163.
- [9] Rakowski G., *Finite Element Method – selected issues (in Polish)*, OWPW, Warszawa 1996.
- [10] Rakowski G., *New frame – membrane transition (in Polish)*, XLVI Scientific Conference of the Committee of Civil and Water Engineering of the Polish Academy of Sciences and the Science Committee of the Polish Association of Civil Engineers and Technicians - Krynica, 2000, pp. 153-160.
- [11] Laskowska U., *Transition elements with rotational degrees of freedom (in Polish)*, II Scientific Conference of Civil Engineering doctoral candidates, Gliwice-Wisła, 2001, pp. 269-276.
- [12] Pawlak-Laskowska U., *Non-standard finite elements in structure modelling (in Polish)*, doctoral theses, Kielce 2005.
- [13] Gilewski W., *Correctness of plate-bending element with physical shape functions*, Finite Element News, Issue 3 (June), 1993, pp. 29-34.
- [14] Gilewski W., *Best shape functions in static, dynamic and stability analyses of medium thickness beams (in Polish)*, *Theoretical Foundations of Civil Engineering X*, OWPW, Warszawa, 2002, pp. 913-920.
- [15] Rakowski J., *The Interpretation of Shear Locking Phenomenon in the Example of Timoshenko Beam (in Polish)*, IX Polish Conf. Meth. In Mechanics, Rytro 1989.
- [16] Rakowski J., *A Critical Analysis of Quadratic Beam Finite Elements*, Inf. Jour. Num. Meth. Engrg., 31, 1991, pp. 949-966.
- [17] Kapkowski J., Stupnicki J., *Investigations into elastic-plastic 2D states of stress with optically active covering method (in Polish)*, Archiwum Budowy Maszyn, series 1, vol. XVIII, 1971.