

# LINIOWE ELEMENTY SKOŃCZONE O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI W MODELOWANIU PODŁOŻA GRUNTOWEGO POD BUDYNKIEM

Tadeusz CHYŻY\*, Monika MACKIEWICZ

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

**Streszczenie:** Jednym z najprostszyc sposobów komputerowego modelowania podłoża gruntowego jest zastosowanie metody Winklera, gdzie podłoże gruntowe odwzorowuje się jednowymiarowymi sprężynami o odpowiednio dobranych parametrach sztywnościowych. W uzasadnionych przypadkach metodę Winklera można zastosować do modelowania gruntów uwarstwionych. W tym przypadku najprostszym odwzorowaniem jest zespół sprężyn połączonych szeregowo, gdzie każda z nich opisuje konkretną warstwę. W wyniku odpowiedniego sumowania sztywności składowych uzyskuje się ostatecznie sztywność zastępczą. W artykule autorzy proponują inny sposób wyznaczania sztywności zastępczej z bezpośrednim użyciem mechanizmów (algorytmów) Metody Elementów Skończonych. Pojedynczy liniowy element skończony (modelujący sprężynę w MES) dzieli się na podobszary, które mogą być oddzielnie całkowane, a zatem w każdym podobszarze można zadać inne parametry sztywnościowe (moduł) i geometryczne (miąższość) odpowiadające danej warstwie gruntu.

*Słowa kluczowe:* MES, łamane funkcje kształtu, podłoże gruntowe, model Winklera.

## 1. Wprowadzenie

Prawidłowe obliczeniowe odwzorowanie konstrukcji budowlanych na oddziaływania zewnętrzne w uzasadnionych przypadkach wymaga zamodelowania parametrów podłoża gruntowego, głównie jego podatności. Zmiany wyężenia jednego z podobszarów modelu (na przykład budynku) mają wpływ na odpowiedź drugiego podobszaru (na przykład gruntu), i na odwrót. Takie wzajemne oddziaływanie różnych podobszarów modelu obliczeniowego nazywane jest interakcją. Efekt interakcji jest tym bardziej zauważalny im bardziej złożone pod względem geometrycznym i materiałowym są podobszary współpracującego agregatu: budynek-podłoże gruntowe. Złożoność ośrodka gruntowego to głównie jego przewarstwienia, czy też zmiany właściwości mechanicznych gruntu w obszarze kontaktu z budowlą.

Istnieje wiele metod umożliwiających uwzględnienie wpływu podatności podłoża na pracę budynku. Obecnie coraz bardziej popularne są metody komputerowe wykorzystujące Metodę Elementów Skończonych (MES), czy też Metodę Elementów Brzegowych (MEB).

Szczególnie MES (Zienkiewicz i in., 2005) jest obecnie najbardziej użyteczną metodą ze względu na łatwość definiowania modelu, jak i dostępność kierunkowego oprogramowania (w tym również na licencji „open source”). Łatwość definiowania modelu

podłoża w MES umożliwiło opracowanie wielu metod – od najprostszyc jednowymiarowych do złożonych modeli trójwymiarowych 3D.

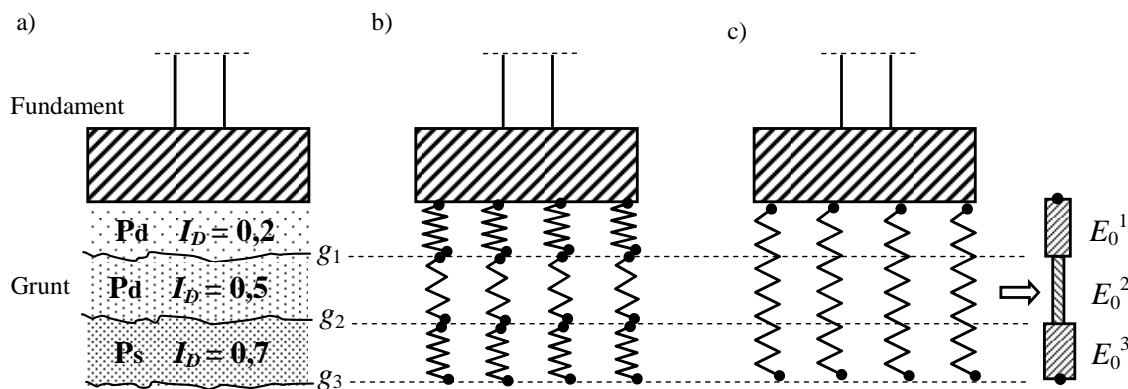
W artykule zaprezentowano koncepcję zastosowania modelu jednowymiarowego do modelowania w MES uwarstwionego podłoża gruntowego. Model może być łatwo implementowany w istniejących systemach obliczeniowych.

## 2. Koncepcja rozwiązania

Wykorzystano model interakcji pomiędzy budowlą a gruntem, polegający na zastosowaniu jednowymiarowych sprężyn (model gruntu) o charakterystyce odpowiadającej modelowi Winklera dla podłoża uwarstwionego. Istota proponowanego rozwiązania polega na zastosowaniu specjalnych elementów skończonych liniowych (sprężyny), które umożliwiają zamodelowanie pojedynczym elementem całego profilu uwarstwionego. Koncepcję zilustrowano na rysunku 1.

Przy modelowaniu pojedynczym elementem skończonym uwarstwionego podłoża gruntowego pojawia się problem odwzorowania poszczególnych warstw. Problem rozwiązano poprzez zastosowanie specjalnej

\* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: t\_chyzy@interia.pl



Rys. 1. Koncepcja metody: a) podłoże uwarstwione, b) sprężyny modelujące podłoże warstwowe według hipotezy Winklera, c) pojedyncza sprężyna modelująca podłoże uwarstwione według proponowanej koncepcji

sprężyny o skokowo zmiennej sztywności w obszarze aproksymowanego pola odkształceń, z możliwością kontroli zmian sztywnościowych i geometrycznych. Budowa tak zdefiniowanego elementu skończonego wymaga całkowania w podprzestrzeniach.

Koncepcja elementów całkowanych w podprzestrzeniach polega na podziale elementu na  $n$  części – podobszarów (rys. 2) i sumowaniu częściowych macierzy sztywności z każdego podobszaru, co wyraża się wzorem:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \dots = \int_0^{g_1} \mathbf{K}_e^1(\xi) + \int_{g_1}^{g_2} \mathbf{K}_e^2(\xi) + \int_{g_2}^{g_3} \mathbf{K}_e^3(\xi) + \dots = \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_e^k \quad (1)$$

Macierz sztywności podobszaru  $k$  elementu liniowego  $e$  (sprężyny) jest wyznaczana z równania:

$$\mathbf{K}_e^k = \int_{V_k} \mathbf{B}_e^k \mathbf{D}_e^k \mathbf{B}_e^k \cdot dV_k \quad (2)$$

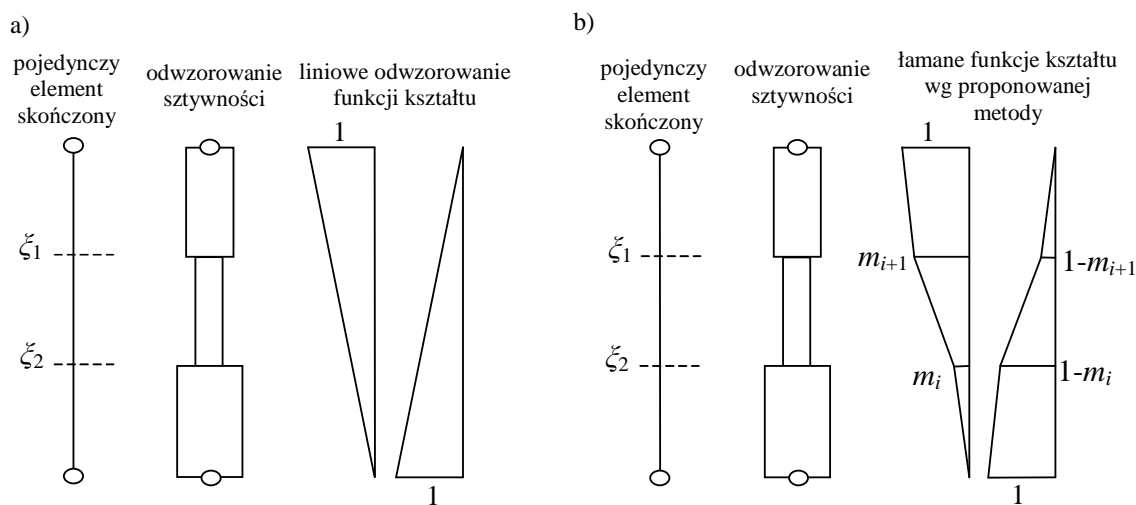
gdzie:  $\mathbf{B}_e^k$  jest macierzą odkształceń podobszaru  $k$ ,  $\mathbf{D}_e^k$  jest macierzą materiałową podobszaru  $k$ , a  $g_k$  jest głębokością spodu warstwy  $k$  (rys 1).

Po wykonaniu podstawień otrzymano ostateczną postać macierzy sztywności podobszaru  $k$ :

$$\mathbf{K}_e^k = b^2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} b^2(\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{EA}{L} & -b^2(\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{EA}{L} \\ -b^2(\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{EA}{L} & b^2(\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{gdzie } b = \frac{m_2 - m_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

Zastosowanie powyżej zdefiniowanego elementu skończonego, jako sumy macierzy sztywności poszczególnych podobszarów, przy założeniu liniowego rozkładu pola odkształceń (rozwiązanie standardowe – rys. 2a) prowadzi do błędnych rozwiązań, co zostało zilustrowane na rysunku 3, przytoczonym z pracy (Mackiewicz, 2012). Jest to związane z efektem przeszywnienia elementu skończonego powodowanym niedopasowaniem zmian pola odkształceń do zmian rozkładu sztywności wewnątrz tego elementu. Aby wyeliminować efekt przeszywnienia zastosowano łamane funkcje kształtu (rys. 2b). W efekcie doprowadziło to do uzyskania prawidłowych wyników, co zostało zilustrowane na rysunku 3.



Rys. 2. Podział elementu skończonego na podprzestrzenie

Istotą tego rozwiązania są formuły umożliwiające wyznaczenie parametrów  $m_i$ , czyli rzędnych funkcji kształtu. Pełne rozwiązanie zagadnienia podano w pracy (Chyży i in., 1996). Adaptacja formuł do potrzeb analizy podłoża uwarstwowionego ma postać:

$$m_i = \frac{\bar{k}}{k_i}, \bar{k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k_k}}, \bar{k}_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^i \frac{1}{k_k}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

gdzie:  $\bar{k}$  jest sztywnością wypadkową całego zespołu sprężyn,  $\bar{k}_i$  jest sztywnością wypadkową części układu sprężyn do punktu, w którym obliczana jest wartość  $m_i$ ,  $k_k$  jest sztywnością  $k$ -tej warstwy gruntu (podobszaru), a  $n$  jest liczbą warstw.

Kolejnym zagadnieniem związanym z modelowaniem podłoża warstwowego poprzez sprężysty element liniowy jest odpowiednie ustalenie sztywności warstwy (jako sprężyny). Jednym z rozwiązań jest zastosowanie hipotezy Winklera, według której osiadanie podłoża sprężystego  $s$  jest proporcjonalne do działającego obciążenia  $q$ :

$$q = k_z \cdot s \quad (5)$$

Wartość współczynnika podatności  $k_z$  dla gruntu jednorodnego do głębokości można wyznaczyć według wzoru (Wiłun, 2005):

$$k_z = \frac{E_0}{\omega \cdot B \cdot (1 - \nu^2)} \quad (6)$$

Natomiast w przypadku podłoża uwarstwowionego współczynnik  $k_z$  jest sumą współczynników podatności poszczególnych warstw gruntu  $k_z^i$ . Dla pojedynczej warstwy  $i$  współczynnik ten wyznacza się z wyrażenia:

$$k_z^i = \frac{E_0^i}{\Delta \omega_i \cdot B \cdot (1 - \nu^2)}, \quad \Delta \omega_i = \omega_i - \omega_{i-1} \quad (7)$$

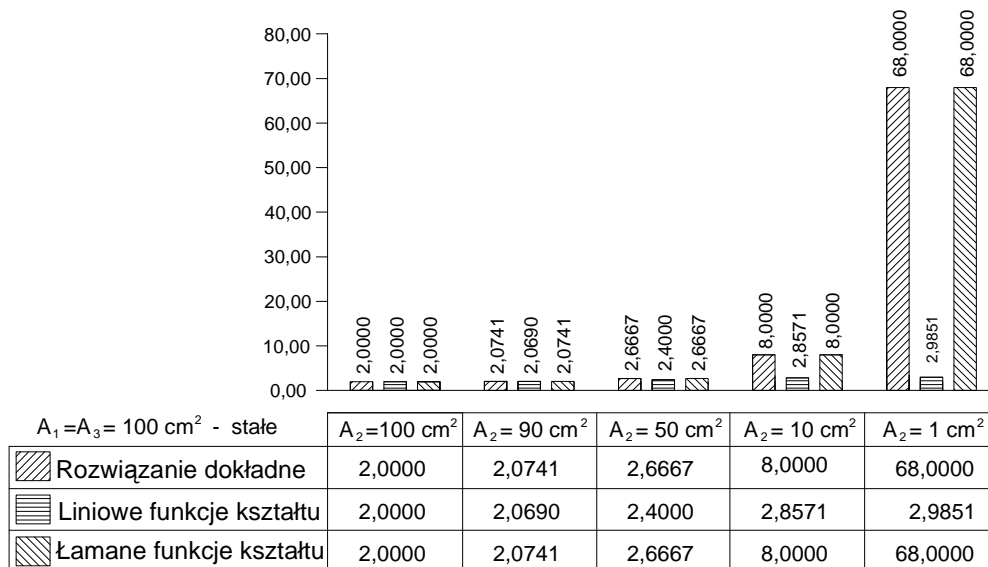
gdzie:  $q$  jest obciążeniem,  $E_0$  jest modułem odkształcenia gruntu,  $B$  jest szerokością obciążonego obszaru,  $\nu$  jest współczynnikiem bocznej rozszerzalności gruntu, a  $\omega$  ( $\omega_i$ ) jest współczynnikiem wpływu, zależnym od kształtu obciążonego obszaru (fundamentu) doboranym według odpowiednich tablic i nomogramów (Wiłun, 2005).

### 3. Przykład obliczeniowy.

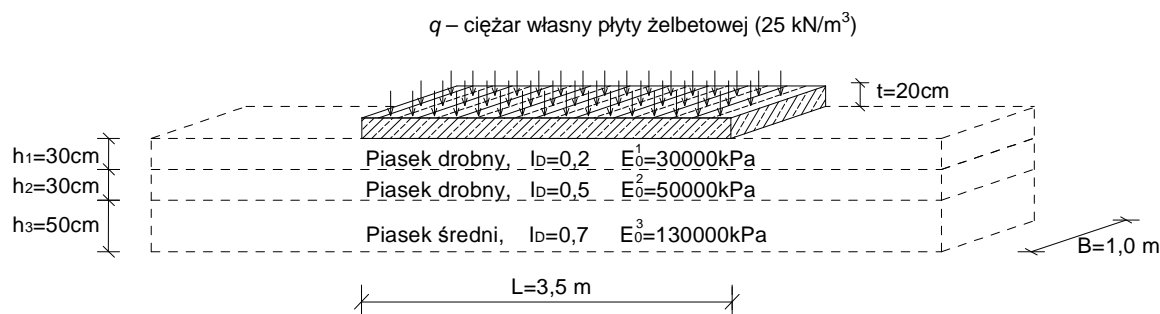
W przykładzie obliczeniowym porównano wartości osiadań w przypadku podłoża uwarstwowionego. Przyjęto płytę żelbetową o wymiarach 3,50 m × 1,0 m × 0,20 m, spoczywającą na sprężystym podłożu i obciążoną ciężarem własnym. Analizowany model oraz jego parametry obliczeniowe pokazano na rysunku 4.

Obliczenia wykonano w trzech wariantach:

- wariant I – według hipotezy Winklera i wzorów podanych przez Wiłuna (2005), przytoczonych formułami (5) (6) (7);



Rys. 3. Wyniki analizy porównawczej



$q = 25 \text{ kN/m}^3$  – ciężar własny żelbetu,  
 $\nu = 0,3$  – współczynnik bocznej rozszerzalności gruntu,  
 $\Delta\omega_1 = 0,15 - 0 = 0,15$  – współczynnik wpływu dla pierwszej warstwy,  
 $\Delta\omega_2 = 0,305 - 0,15 = 0,155$  – współczynnik wpływu dla drugiej warstwy,  
 $\Delta\omega_3 = 0,513 - 0,305 = 0,208$  – współczynnik wpływu dla trzeciej warstwy.  
 Współczynniki wpływu według (Wiłun, 2005).

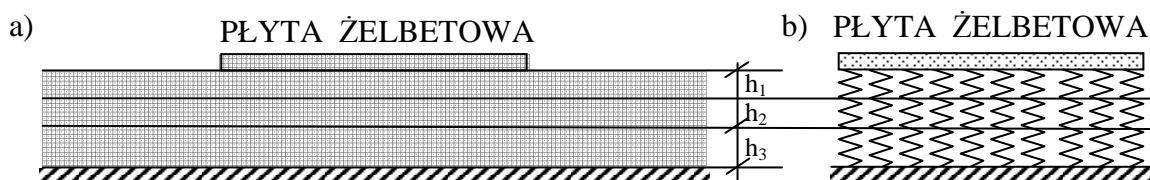
Rys. 4. Parametry modelu obliczeniowego

- wariant II – z zastosowaniem warstwowych sprężystych elementów skończonych całkowanych w podprzestrzeniach, czyli elementów skończonych prezentowanych w artykule i zaimplementowanych w autorskim systemie analizy konstrukcji „ORCAN” – <http://kmb.pb.edu.pl/dydaktyka/tchzyz/orcan.html> (rys. 5b);
  - wariant III – kontrolnie z zastosowaniem płaskiego (dwuwymiarowego) modelu MES, jak na rysunku 5a.
- Dla elementów płaskich modelujących podłoże gruntowe zastosowano transformację modułu celem odwzorowania podatności podłoża jak w hipotezie Winklera:

$$E^i = E_0^i \cdot \frac{h_i}{\Delta\omega_i} \quad (8)$$

gdzie:  $E_0^i$  jest modułem odkształcenia dla poszczególnych warstw gruntu,  $h_i$  jest grubością (miąższością) poszczególnych warstw, a  $\omega_i$  jest współczynnikiem wpływu, zależnym od kształtu obciążonego obszaru (fundamentu) dobieranym według odpowiednich tablic i nomogramów (Wiłun, 2005).

W wyniku obliczeń otrzymano następujące wartości osiadania płyty żelbetowej (rys. 5):



Rys. 5. Model obliczeniowy: a) dwuwymiarowy model MES – dyskretyzacja, b) prezentowana koncepcja

- Wariant I – hipoteza Winklera

$$s_1 = \frac{q \cdot \Delta\omega_1 \cdot B \cdot (1 - \nu^2)}{E_0^1} = \frac{(25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,20 \text{ m}) \cdot 0,15 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1 - 0,3^2)}{30000 \text{ kPa}} = 2,275 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$s_2 = \frac{q \cdot \Delta\omega_2 \cdot B \cdot (1 - \nu^2)}{E_0^2} = \frac{(25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,20 \text{ m}) \cdot 0,155 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1 - 0,3^2)}{50000 \text{ kPa}} = 1,4105 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$s_3 = \frac{q \cdot \Delta\omega_3 \cdot B \cdot (1 - \nu^2)}{E_0^3} = \frac{(25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,20 \text{ m}) \cdot 0,208 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1 - 0,3^2)}{130000 \text{ kPa}} = 0,728 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Osiadanie:  $s = s_1 + s_2 + s_3 = 4,4135 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

- Wariant II – liniowe elementy sprężyste całkowane w podprzestrzeniach (prezentowana metoda)

$$k_s^1 = \frac{E_0^1}{\Delta\omega_1 \cdot B \cdot (1 - \nu^2)} \cdot A = \frac{30000 \text{ kPa}}{0,15 \cdot 1 \text{ m} \cdot (1 - 0,3^2)} \cdot (1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m}) = 219780,22 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 0,05 \text{ m}^2 = 10989,01 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$k_s^2 = \frac{E_0^2}{\Delta\omega_2 \cdot B \cdot (1-\nu^2)} \cdot A = \frac{50000 \text{ kPa}}{0,155 \cdot 1 \text{ m} \cdot (1-0,3^2)} \cdot (1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m}) = 219780,22 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 0,05 \text{ m}^2 = 17724,21 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$k_s^3 = \frac{E_0^3}{\Delta\omega_3 \cdot B \cdot (1-\nu^2)} \cdot A = \frac{130000 \text{ kPa}}{0,208 \cdot 1 \text{ m} \cdot (1-0,3^2)} \cdot (1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m}) = 219780,22 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 0,05 \text{ m}^2 = 34340,66 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Sztywność wypadkowa:

$$\bar{k}_s = \frac{1}{\frac{1}{k_s^1} + \frac{1}{k_s^2} + \frac{1}{k_s^3}} = \frac{1}{\frac{1}{10989,01 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} + \frac{1}{17724,21 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} + \frac{1}{34340,66 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}} = 5664,438 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Osiadanie:  $s = 4,352 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

– Wariant III – model MES z zastosowanie elementów płaskich dwuwymiarowych

– pierwsza warstwa:

$$E^1 = E_0^1 \cdot \frac{h_1}{\Delta\omega_1} \quad E^1 = 30000 \text{ kPa} \cdot \frac{0,3 \text{ m}}{0,15} = 60000 \text{ kPa}$$

– druga warstwa:

$$E^2 = E_0^2 \cdot \frac{h_2}{\Delta\omega_2} \quad E^2 = 50000 \text{ kPa} \cdot \frac{0,3 \text{ m}}{0,155} = 96774,19 \text{ kPa}$$

– trzecia warstwa:

$$E^3 = E_0^3 \cdot \frac{h_3}{\Delta\omega_3} \quad E^3 = 130000 \text{ kPa} \cdot \frac{0,5 \text{ m}}{0,208} = 312500 \text{ kPa}$$

Osiadanie:  $s = 4,387 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

#### 4. Podsumowanie

W wyniku zastosowania prezentowanej metody uzyskano wystarczająco dokładne wyniki obliczeń przy dużych zmianach sztywności poszczególnych warstw gruntu pod budynkiem. Jednocześnie zapewniono minimalną liczbę niewiadomych. Bez względu na uwarstwienie podłoża liczba niewiadomych jest ta sama (elementy sprężyste 3D mają dwa węzły a w nich 3 stopnie swobody).

Prezentowana metoda stanowi specyficzne zastosowanie znanych rozwiązań – hipotezy Winklera. Dodatkowym oczekiwany atutem prezentowanego rozwiązania jest wyeliminowanie kosztownych obliczeniowo algorytmów rearanżacji siatki podziału MES, które mogłyby zaistnieć w przypadku gwałtownych zmian parametrów podłoża. Wykorzystanie metody przewiduje się przede wszystkim w analizie pokrytycznej konstrukcji doznającej dużych zmian sztywności, rozwijanej w pracy Chyżego (2009). Prezentowana koncepcja może być jednak jak najbardziej stosowana w stacjonarnych rozwiązaniach skokowych zmian sztywności, co zaprezentowano w referacie.

#### Literatura

- Chyży T. (2009). Metoda Analizy Budynków Mieszkalnych Obciążonych Nadciśnieniem w Strefie Wewnętrznej Wybuchu Gazu. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej*, Białystok.
- Chyży T., Kazberuk A., Tribiło R. (1996). Zastosowanie samo adaptujących się funkcji kształtu w nieliniowej analizie obszarów płaskich i masywnych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej*, z.15, Białystok, 65-72.
- Mackiewicz M. (2012). Koncepcja liniowych elementów skończonych do analizy konstrukcji o dużych zmianach geometryczno-sztywnościowych. W: *Badania doświadczalne i teoretyczne w budownictwie: prace naukowe doktorantów*, J. Bzówka (red.), Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 173-180.
- Wiłun Z. (2005). Zarys Geotechniki. *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*, Warszawa.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. (2005). The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals. *Elsevier*, Butterworth-Heinemann, Amsterdam.

**LINEAR FINITE ELEMENTS WITH VARIABLE  
STIFFNESS IN MODELLING OF SUBSOIL  
UNDER THE BUILDING**

**Abstract:** One of the methods of computational subsoil modelling is the Winkler model, where the subsoil is considered as one-dimensional springs with appropriate stiffness parameters. In justified cases, the Winkler method can be used in modelling of multilayered subsoil. In this case, subsoil is considered as a set of springs connected in series, where each

spring describes a particular layer. Eventually resultant stiffness is achieved as a result of the relevant summation of stiffness components. Different idea of the resultant stiffness determination with the direct use of Finite Element Method algorithms is proposed in the paper. Presented method is based on a conception where a single linear finite element, which describes spring in FEM, is divided into sub-areas. Each sub-area can be separately integrated and the same can have different stiffness and geometric parameters corresponding to the layer of subsoil.