

Ewa ŁOBOS

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

## O pochodnej kierunkowej i gradiencie

**Streszczenie.** Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi pojęcia pochodnej kierunkowej. Podano definicję i interpretację pochodnej kierunkowej oraz najważniejsze twierdzenia umożliwiające jej obliczanie. Praca zawiera przykłady ilustrujące przytoczone twierdzenia oraz przykłady obliczania pochodnej kierunkowej bezpośrednio z definicji. Czytelnik znajdzie także propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania.

**Słowa kluczowe:** pochodna kierunkowa, pochodne cząstkowe, gradient, ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych.

### 1. Motywacja

Zanim przejdziemy do tematu, rozważmy dwa problemy.

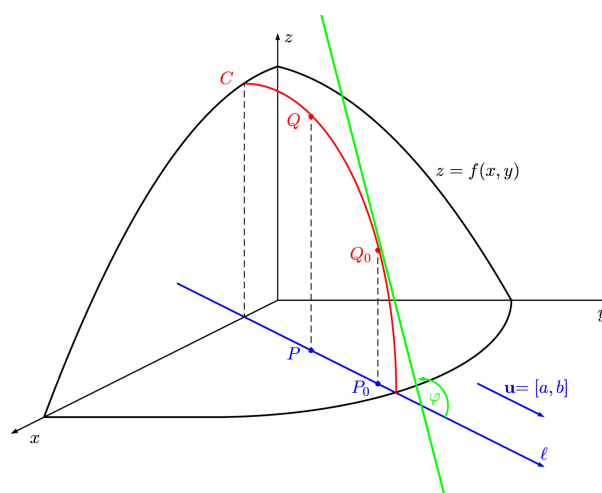
**Problem 1.** Wyobraźmy sobie pofałdowany górski teren (są tam góry, doliny, przełęczycie itd.), który jest na tyle idealny, że jego powierzchnię w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych można opisać jako  $z = H(x, y)$ , gdzie  $H$  jest funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych. Liczba  $H(x_0, y_0)$  oznacza odległość punktu  $A_0(x_0, y_0, H(x_0, y_0))$  na rozważanej powierzchni od płaszczyzny  $xy$ , natomiast samą płaszczyznę  $xy$  utożsamiamy z poziomem morza. W punkcie  $A_0$  znajduje się wędrowiec. W zależności od tego, jaką drogę wybierze, jego odległość od płaszczyzny  $xy$  po każdym kroku może się zwiększyć, zmniejszyć lub pozostać bez zmian — ma to ścisły związek z funkcją  $H$ . Wędrowiec chce dotrzeć na najbliższy szczyt jak najkrótszą drogą. Jaką strategię powinien obrać? Czy możemy przewidzieć kolejne kroki wędrowca, jeżeli nie widzimy terenu, ale znamy funkcję  $H$ ?

**Problem 2.** Na płaszczyźnie  $xy$  mamy płaski obszar  $D$ , w którym rozpalono kilka ognisk i postawiono kilka wentylatorów. Z fizyki wiemy, że temperatura  $T(x_0, y_0)$  w punkcie  $B_0(x_0, y_0) \in D$  zależy od położenia tego punktu względem wszystkich ognisk i wentylatorów. Funkcja  $T$  jest więc funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych. Przypuśćmy, że w punkcie  $B_0$  znajduje się ciepłolubny stworek, któremu jest bardzo zimno. Stworek chce jak najszybciej dotrzeć w okolice najbliższego ogniska. Czy możemy przewidzieć tor jego ruchu, jeżeli nie odczuwamy temperatur w poszczególnych punktach obszaru  $D$ , ale znamy wzór funkcji  $T$ ?

## 2. Definicja pochodnej kierunkowej

W obu problemach musimy znaleźć kierunek, w którym podana funkcja najszybciej rośnie. Spróbujmy najpierw określić tempo zmian funkcji  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , w punkcie  $P_0(x_0, y_0) \in D_f$  w kierunku ustalonego niezerowego wektora  $\mathbf{u} = [a, b]$ . Zastosujemy następującą konstrukcję:

- na płaszczyźnie  $xy$  znajdujemy oś  $\ell$ , która przechodzi przez  $P_0$ , jest równoległa do wektora  $\mathbf{u}$  i ma taki sam zwrot jak  $\mathbf{u}$ ;
- zaznaczamy płaszczyznę  $\pi$  zawierającą  $\ell$  i prostopadłą do płaszczyzny  $xy$ ;
- otrzymujemy płaską krzywą  $C$ , która jest częścią wspólną powierzchni  $z = f(x, y)$  i płaszczyzny  $\pi$ ;
- wybieramy na osi  $\ell$  dowolny punkt  $P \in D_f$  różny od  $P_0$ ; punkt ten ma współrzędne  $P(x_0 + at, y_0 + bt)$ , gdzie  $t$  jest pewną liczbą rzeczywistą różną od zera;



- na krzywej  $C$  znajdujemy punkty  $Q_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  oraz  $Q(x_0 + at, y_0 + bt, f(x_0 + at, y_0 + bt))$  i prowadzimy przez nie sieczną krzywej  $C$ ;
- odległość między punktami  $P_0$  i  $P$  jest równa  $\sqrt{(x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2}$ , więc sieczna jest nachylona do osi  $\ell$  pod kątem, którego tangens wynosi

$$\frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(w mianowniku pomijamy moduł, bo punkt  $P$  może znajdować się z różnych stron  $P_0$ );

- jeśli teraz  $P$  dąży do  $P_0$  wzdłuż  $\ell$ , to  $Q$  dąży do  $Q_0$  wzdłuż  $C$  i sieczne dążą do stycznej (o ile styczna istnieje — nie musi istnieć, bo krzywa  $C$  może mieć np. ostrze w punkcie  $Q_0$ );
- jeżeli styczna do krzywej  $C$  w punkcie  $Q_0$  istnieje, to tangens kąta między styczną a osią  $\ell$  jest równy

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to nazywamy ją pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u}$  i oznaczamy  $\frac{\partial f}{\partial \ell} \Big|_{P_0}$ .

**Definicja 1.** Pochodną kierunkową funkcji  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , w punkcie  $P_0(x_0, y_0)$  w kierunku niezerowego wektora  $\mathbf{u} = [a, b]$  nazywamy granicę

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (1)$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona.

Z definicji wynika oczywiście, że  $P_0$  należy do  $D_f$ , bo musimy obliczyć wartość  $f(x_0, y_0)$ . Aby pytać o istnienie granicy (1), musimy być pewni, że  $t_0 = 0$  jest punktem skupienia dziedziny funkcji  $\varphi$  określonej wzorem  $\varphi(t) = \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Oznacza to, że w dowolnym otoczeniu punktu  $P_0$  mamy nieskończenie wiele punktów z dziedziny funkcji  $f$ , które leżą na prostej  $\ell$ , czyli punkt  $P_0$  jest punktem skupienia zbioru  $\ell \cap D_f$ .

Jeśli np. mamy funkcję  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , to jej dziedziną jest zbiór  $\langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$ , więc możemy pytać o pochodną kierunkową w punkcie  $P_0(0, 0)$  w kierunku wektora  $[1, 3]$  lub  $[-2, -5]$ , ale nie ma sensu pytać o pochodną w  $P_0(0, 0)$  w kierunku wektora  $[-1, 3]$  czy  $[2, -5]$ . W innych punktach możemy pytać o pochodną kierunkową w dowolnym kierunku.

Odnotujmy trzy fakty wynikające bezpośrednio z definicji:

- 1) jeżeli pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [a, b] \neq \mathbf{0}$  jest równa  $A$ , to istnieje pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $-\mathbf{u} = [-a, -b]$  i jest ona równa  $-A$ ;
- 2) jeżeli istnieje pochodna cząstkowa  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}$ , to jest ona pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku dodatniej półosi  $Ox$  (czyli w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [1, 0]$ );
- 3) jeżeli istnieje pochodna cząstkowa  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0}$ , to jest ona pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku dodatniej półosi  $Oy$  (czyli w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [0, 1]$ ).

Pochodną kierunkową funkcji większej liczby zmiennych definiujemy analogicznie. Przykładowo dla funkcji trzech zmiennych mamy następującą definicję.

**Definicja 2.** Pochodną kierunkową funkcji  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^3$ , w punkcie  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  w kierunku niezerowego wektora  $\mathbf{u} = [a, b, c]$  nazywamy granicę

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) - f(x_0, y_0, z_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona.

Zauważmy, że dla funkcji trzech zmiennych pochodne cząstkowe  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0}$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{P_0}$  (o ile istnieją) są pochodnymi kierunkowymi w kierunkach wektorów  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 1]$ . Także pochodne w kierunkach przeciwnych (o ile istnieją) są liczbami przeciwnymi.

### 3. Własności pochodnej kierunkowej

Pochodną funkcji jednej zmiennej też definiujemy jako pewną granicę, ale w praktyce bardzo często korzystamy z kilku łatwych wzorów. Tak samo jest z pochodną kierunkową — policzymy ją z prostego

wzoru, o ile funkcja jest różniczkowalna. Przypomnijmy definicję różniczkowalnej funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych rzeczywistych (dla większej liczby zmiennych niezależnych definicje są analogiczne).

**Definicja 3.** Funkcja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , jest różniczkowalna w punkcie  $P_0(x_0, y_0)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej przyrost  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  można zapisać w postaci

$$\Delta z = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad \text{gdzie} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0. \quad (2)$$

**Twierdzenie 1.** Jeżeli funkcja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu  $P_0(x_0, y_0)$ , to jej pochodna kierunkowa w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  jest równa

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta, \quad (3)$$

gdzie  $\cos \alpha$  i  $\cos \beta$  są kosinusami kierunkowymi wektora  $\mathbf{u}$ .

*Dowód.* Ustalmy wektor  $\mathbf{u} = [a, b] \neq \mathbf{0}$ . Można go zapisać jako

$$\mathbf{u} = \sqrt{a^2 + b^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] = \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \alpha, \cos \beta], \quad \text{gdzie} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Oznaczmy  $\mathbf{v} = [\cos \alpha, \cos \beta]$ . Pochodna w kierunku wektora  $\mathbf{u}$  jest taka sama jak pochodna w kierunku wektora  $\mathbf{v}$ . Ze wzoru (1) dla wektora  $\mathbf{v}$ , który ma długość 1, mamy:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t} = (*).$$

W liczniku mamy przyrost  $\Delta z$ , w którym  $\Delta x = t \cos \alpha$ ,  $\Delta y = t \cos \beta$ . Jeżeli  $t \rightarrow 0$ , to  $\Delta x \rightarrow 0$  i  $\Delta y \rightarrow 0$ . Funkcja  $f$  jest różniczkowalna, więc z (2) mamy:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} t \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} t \cos \beta + \varepsilon_1 t \cos \alpha + \varepsilon_2 t \cos \beta}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta \right] = \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta + 0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta = \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta. \end{aligned}$$

□

Z twierdzenia 1 wynika, że dla funkcji różniczkowalnej w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$  pochodna kierunkowa istnieje w każdym kierunku. Z dowodu tego twierdzenia widać, że pochodną kierunkową można obliczać ze wzoru (3) także dla funkcji różniczkowalnej w punkcie  $P_0$ , ale tylko w takich kierunkach, dla których granica (1) w definicji ma sens. Możemy też skopiować powyższy dowód, wprowadzić pewne „kosmetyczne” poprawki i pokazać, że jeśli funkcja  $u = f(x, y, z)$  jest różniczkowalna w  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , to jej pochodna kierunkowa w  $P_0$  w kierunku niezerowego wektora  $\mathbf{u} = [a, b, c]$  (o ile  $P_0$  jest punktem

skupienia części wspólnej  $D_f$  oraz prostej  $\ell$ , która przechodzi przez  $P_0$  i jest równoległa do  $\mathbf{u}$ ) jest równa

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} \Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{P_0} \cos \gamma, \quad (4)$$

gdzie  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$  (czyli są to kosinusy kierunkowe wektora  $\mathbf{u}$ ). Analogiczne wzory zachodzą dla funkcji większej liczby zmiennych.

Różniczkowalność jest więc wystarczająca dla istnienia pochodnej. Jednak w większości wypadków po zobaczeniu wzoru funkcji nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy przyrosty tej funkcji spełniają warunek (2). Na szczęście mamy:

- warunki konieczne dla różniczkowalności (tzn. każda funkcja różniczkowalna jest ciągła i ma wszystkie pochodne cząstkowe) — niespełnienie któregokolwiek z tych warunków pozwala stwierdzić, że funkcja nie jest różniczkowalna i nie możemy, niestety, zastosować wzorów (3)–(4),
- warunek wystarczający dla różniczkowalności (tzn. każda funkcja klasy  $C^1$ , czyli ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi, jest różniczkowalna) — jeśli jest on spełniony, to możemy bez obaw stosować wzory (3)–(4).

Powstaje pytanie: jak rozpoznać funkcję klasy  $C^1$ ? Większość funkcji rozważanych na wykładach i ćwiczeniach to funkcje elementarne (z reguły są one ciągłe; problem z ciągłością **może** pojawić się tylko wtedy, gdy sama funkcja jest „klamerkowa” albo gdy funkcja „zawiera” funkcję odwrotną do funkcji niemonotonicznej, ale wówczas wzór musiałby być klamerkowy). Pochodne funkcji elementarnych też są zwykle ciągłe (problemy mogą pojawić się w przypadku funkcji z modułem albo w przypadku pierwiastków, arcsin czy arccos — te funkcje nie mają pochodnych w pewnych punktach).

Wróćmy teraz do funkcji dwóch zmiennych (otrzymane wyniki Czytelnik łatwo uogólni na funkcje trzech lub więcej zmiennych). We wzorze (3) możemy zauważyć iloczyn skalarny dwóch wektorów:  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} \right]$  oraz  $[\cos \alpha, \cos \beta]$ . Pierwszy z nich nazywa się gradientem funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  i oznaczamy go  $\text{grad } f|_{P_0}$ , drugi to wersor kierunku, czyli wektor  $\mathbf{v}$ . Zatem wzór (3) możemy zapisać jako

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} \Big|_{P_0} = \text{grad } f|_{P_0} \circ \mathbf{v}. \quad (5)$$

Jeżeli oznaczymy przez  $\theta$  kąt między gradientem a wersorem kierunku, to mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} \Big|_{P_0} = \|\text{grad } f|_{P_0}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta = \|\text{grad } f|_{P_0}\| \cdot \cos \theta. \quad (6)$$

Ustalmy punkt  $P_0$  i załóżmy, że funkcja  $f$  jest **różniczkowalna w pewnym otoczeniu** punktu  $P_0$ . Zatem funkcja  $f$  ma w punkcie  $P_0$  pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach. Ponadto wektor  $\text{grad } f|_{P_0}$  istnieje (jest to jeden konkretny wektor, ponieważ  $P_0$  jest ustalony).

- Wybierzmy jakiś wersor  $\mathbf{v}$ , który wskazuje kierunek, w którym chcemy policzyć pochodną kierunkową. Ponieważ  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , ze wzoru (6) mamy oszacowanie:

$$-\|\text{grad } f|_{P_0}\| \leq \frac{\partial f}{\partial \ell} \Big|_{P_0} \leq \|\text{grad } f|_{P_0}\|.$$

- Jeżeli będziemy zmieniać wektor  $\mathbf{v}$  i popatrzymy na kąt  $\theta$  między gradientem a wersorem kierunku, to zauważymy, że  $\theta$  przyjmuje wszystkie wartości z przedziału  $\langle 0, \pi \rangle$ . Zatem  $\cos \theta$  przyjmuje

wszystkie wartości z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , więc pochodna kierunkowa przyjmuje wszystkie wartości z przedziału  $\langle -\|\text{grad } f|_{P_0}\|, \|\text{grad } f|_{P_0}\| \rangle$ .

- Największą pochodną kierunkową (równą długości gradientu funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$ ) otrzymamy, gdy  $\cos \theta = 1$ , czyli  $\theta = 0$ . Najmniejszą pochodną kierunkową (równą  $-\|\text{grad } f|_{P_0}\|$ ) otrzymamy, gdy  $\cos \theta = -1$ , czyli  $\theta = \pi$ .

### Ważna własność gradientu

Jeżeli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ , to jej gradient w tym punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji.

Funkcja najszybciej maleje w kierunku przeciwnym do gradientu w punkcie  $P_0$ .

Znaleźliśmy właśnie odpowiedź na problemy sformułowane na początku tego artykułu, o ile rozważane tam funkcje  $H$  i  $T$  są różniczkowalne. Zarówno wędrowiec, jak i stworek pierwszy krok zrobią w kierunku gradientu „swojej” funkcji w punkcie  $(x_0, y_0)$ . Po pierwszym kroku wędrowiec znajdzie się w punkcie  $(x_1, y_1, H(x_1, y_1))$ , a stworek w punkcie  $(x_1, y_1)$ . Kolejny krok wykonają więc w kierunku gradientu w punkcie  $(x_1, y_1)$  itd.

Gdyby wędrowiec chciał jak najkrótszą drogą zejść na dół, poruszałby się w kierunku przeciwnym do gradientu. Podobnie stworek, gdyby jednak było mu zbyt gorąco. A jaki kierunek powinien wybrać stworek, gdyby uznał, że temperatura w punkcie  $(x_0, y_0)$  jest optymalna, ale z jakichś względów nie mógłby lub nie chciałby pozostać na swoim miejscu? Podobnych pytań możemy postawić więcej. Odpowiedzi na te pytania wskazują na zastosowania pochodnej kierunkowej i gradientu (najprostsze i zarazem najważniejsze z nich to numeryczne znajdowanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych).

## 4. Przykłady łatwe, proste i przyjemne

Rozwiążemy teraz kilka łatwych zadań, korzystając z wyników podanych w poprzedniej sekcji. Ograniczymy się do funkcji dwóch i trzech zmiennych — dla funkcji o większej liczbie zmiennych metoda rozwiązywania jest taka sama, ale rachunków będzie zdecydowanie więcej. Zainteresowany Czytelnik dodatkowe zadania znajdzie np. w [2] i [3]. Inne typy zadań omówiono w [1].

**Przykład 1.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = 4 \arcsin \frac{x}{y} + xy$  w punkcie  $P_0(3, 5)$  w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [24, -7]$ .

Możemy skorzystać ze wzoru (3), bo  $f$  jest funkcją klasy  $C^1$  w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ . Potrzebne nam są pochodne cząstkowe i kosinusy kierunkowe. Mamy:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{(25-1)^2 + 49} = \sqrt{25^2 - 50 + 1 + 49} = 25, \quad \cos \alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos \beta = \frac{-7}{25},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} + y \Big|_{P_0} = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} + 5 = 1 + 5 = 6,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{-x}{y^2} + x \Big|_{P_0} = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{-3}{25} + 3 = -\frac{3}{5} + 3 = 3 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{5}.$$

Wstawiamy do wzoru (3):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = 6 \cdot \frac{24}{25} + \frac{12}{5} \cdot \frac{-7}{25} = \frac{12}{125}(12 \cdot 5 - 7) = \frac{12}{125}(60 - 7) = \frac{12}{125} \cdot 53 = \frac{636}{125}.$$

Zauważmy, że pochodna jest dodatnia, czyli funkcja  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u}$  jest rosnąca. Pochodna jest trochę większa od 5, czyli funkcja rośnie dość szybko (jest to oczywiście kwestia względna; ja sobie zawsze zadaję pytanie, czy jechałabym rowerem pod górkę, której kąt nachylenia ma tangens równy 5).

**Odp.**  $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \frac{636}{125}.$

**Przykład 2.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y, z) = x\sqrt{y^2 - 2z}$  w punkcie  $P_0(-1, 2, 0)$  w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [-1, 1, -4]$ .

Możemy skorzystać ze wzoru (4), bo  $f$  jest funkcją klasy  $C^1$  w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ . Policzmy najpierw kosinusy kierunkowe:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \cos \alpha = \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-4}{3\sqrt{2}}.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} &= \left. \sqrt{y^2 - 2z} \right|_{P_0} = 2, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} &= x \cdot \left. \frac{2y}{2\sqrt{y^2 - 2z}} \right|_{P_0} = \left. \frac{xy}{\sqrt{y^2 - 2z}} \right|_{P_0} = -1, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{P_0} &= x \cdot \left. \frac{-2}{2\sqrt{y^2 - 2z}} \right|_{P_0} = \left. \frac{-x}{\sqrt{y^2 - 2z}} \right|_{P_0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wstawiamy do wzoru (4):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = 2 \cdot \frac{-1}{3\sqrt{2}} - 1 \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{-2 - 1 - 2}{3\sqrt{2}} = \frac{-5}{3\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

Zauważmy, że pochodna jest ujemna, czyli funkcja  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u}$  jest malejąca. Czy funkcja maleje wolno, czy szybko? Zjechać na nartach z takiego stoku?

**Odp.**  $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}.$

**Przykład 3.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = e^{x^2 - y^3}$  w punkcie  $P(-3, 2)$  w kierunku wektora, który tworzy z  $\text{grad } f|_{P_0}$  kąt  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

Możemy skorzystać ze wzoru (6), bo  $f$  jest klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^2$ . Gradient funkcji w punkcie  $P_0$  to wektor, którego współrzędnymi są kolejne pochodne cząstkowe funkcji w tym punkcie. Obliczmy je:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = e^{x^2 - y^3} \cdot 2x \Big|_{P_0} = -6e, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = e^{x^2 - y^3} \cdot (-3y^2) \Big|_{P_0} = -12e.$$

Zatem

$$\text{grad } f|_{P_0} = [-6e, -12e] = 6e[-1, -2] \quad \text{i} \quad \|\text{grad } f|_{P_0}\| = 6e\sqrt{1 + 4} = 6e\sqrt{5}.$$

Wstawiamy do wzoru (6):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = 6e\sqrt{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 6e\sqrt{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3e\sqrt{5}.$$

**Odp.**  $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = -3e\sqrt{5}.$

**Przykład 4.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y, z) = (x^2 - y^2) \ln(x + y - z)$  w punkcie  $P_0(2, 3, 4)$  w kierunku wektora, który tworzy z grad  $f|_{P_0}$  kąt  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .

Możemy znowu skorzystać ze wzoru (6), bo  $f$  jest na pewno klasy  $C^1$  w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ . Wprawdzie wzór został wyprowadzony dla funkcji dwóch zmiennych, ale łatwo sprawdzić, że ma on tę samą postać dla dowolnej funkcji wielu zmiennych, która jest różniczkowalna w punkcie  $P_0$ . Musimy tylko pamiętać, że dla funkcji  $n$  zmiennych jej gradient jest wektorem z przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Teraz mamy funkcję trzech zmiennych, więc ma ona trzy pochodne cząstkowe i gradient jest wektorem z przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Obliczamy pochodne cząstkowe w punkcie  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} &= 2x \cdot \ln(x + y - z) + (x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{x + y - z} \Big|_{P_0} = 4 \ln 1 + (4 - 9) \cdot 1 = -5, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} &= -2y \cdot \ln(x + y - z) + (x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{x + y - z} \Big|_{P_0} = -6 \ln 1 + (4 - 9) \cdot 1 = -5, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{P_0} &= (x^2 - y^2) \cdot \frac{-1}{x + y - z} \Big|_{P_0} = (4 - 9) \cdot (-1) = 5. \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{grad } f|_{P_0} = [-5, -5, 5] = 5[-1, -1, 1] \quad \text{i} \quad \|\text{grad } f|_{P_0}\| = 5\sqrt{1+1+1} = 5\sqrt{3}.$$

Wstawiamy do wzoru (6):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = 5\sqrt{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}.$$

**Odp.**  $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \frac{15}{2}.$

**Przykład 5.** Obliczyć największą pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \frac{2x + y}{2x - y}$  w punkcie  $P_0(2, 1)$ .

Widzimy, że funkcja jest klasy  $C^1$  w pewnym otoczeniu punktu  $P$ , więc istnieją pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach. Największa pochodna kierunkowa to pochodna w kierunku gradientu (gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji). Jeśli

$$\mathbf{v} \parallel \text{grad } f|_{P_0},$$

to we wzorze (6) mamy  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ , czyli pochodna w kierunku gradientu jest równa długości gradientu. Obliczamy pochodne cząstkowe w punkcie  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} &= \frac{2(2x - y) - (2x + y) \cdot 2}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = \frac{2(2x - y - 2x - y)}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = \frac{-4y}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = -\frac{4}{9}, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} &= \frac{(2x - y) - (2x + y) \cdot (-1)}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = \frac{2x - y + 2x + y}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = \frac{4x}{(2x - y)^2} \Big|_{P_0} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$



Zatem

$$\text{grad } f|_{P_0} = \left[ -\frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right] = \frac{4}{9}[-1, 2],$$

natomiast długość gradientu to  $\frac{4}{9}\sqrt{1+4} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ . Możemy napisać odpowiedź.

**Odp.** Największa pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  jest równa  $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ .

**Przykład 6.** Obliczyć najmniejszą pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$  w punkcie  $P_0(1, 1, 1)$ .

Jak już wspomniano, wzór (6) jest uniwersalny — zachodzi dla wszystkich funkcji różniczkowalnych wielu zmiennych, oczywiście w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ . Nasza funkcja jest klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^3$ . Ponieważ  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , najmniejsza pochodna kierunkowa w punkcie  $P_0$  jest równa  $-\|\text{grad } f_{P_0}\|$ .

Obliczamy pochodne cząstkowe i gradient w punkcie  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} &= 2xy^3z^4 \Big|_{P_0} = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} &= 3y^2x^2z^4 \Big|_{P_0} = 3, \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{P_0} &= 4z^3x^2y^3 \Big|_{P_0} = 4. \end{aligned}$$

Zatem  $\text{grad } f|_{P_0} = [2, 3, 4]$ . Gradient ten ma długość  $\sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ . Jeśli policzylibyśmy pochodne kierunkowe funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  we wszystkich możliwych kierunkach, to otrzymalibyśmy wszystkie liczby w z przedziału  $\langle -\sqrt{29}, \sqrt{29} \rangle$ .

**Odp.** Najmniejsza pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  wynosi  $-\sqrt{29}$ .

## 5. Przykłady dla dociekliwych, czyli warunek wystarczający nie jest konieczny

Wiemy już, że jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie  $P_0$ , który jest punktem skupienia zbioru  $\ell \cap D_f$ , to jej pochodną kierunkową można obliczyć ze wzoru (3), (4) lub analogicznego wzoru dla funkcji o większej liczbie zmiennych. Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu  $P_0$ , to jej pochodna kierunkowa istnieje w każdym kierunku. Zatem warunkiem wystarczającym dla istnienia pochodnej kierunkowej jest różniczkowalność funkcji. Przeanalizujemy teraz kilka przykładów, które pokażą, że warunek ten nie jest konieczny. Pokażemy jeszcze więcej: istnieją funkcje, które są nieciągłe lub nie mają pochodnych cząstkowych, ale mają jakieś pochodne kierunkowe. Czytelnik zapewne domyślił się już, że teraz będziemy liczyć pochodne kierunkowe bezpośrednio z definicji. Wbrew powszechnym przesądom, nie zawsze jest to trudne, uciążliwe itd.

**Przykład 7.** Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{jeśli } xy > 0 \\ x - 2y, & \text{jeśli } xy \leq 0. \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w punkcie  $P_0(0, 0)$ , ale ma w tym punkcie pochodne kierunkowe w dowolnych kierunkach.

Najpierw zauważmy, że dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R}^2$  i że funkcja ta jest ciągła w punkcie  $P_0$ . Zacznijmy od obliczenia pochodnych cząstkowych. Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 2 \cdot 0 - (0 - 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 2h - (0 - 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2.\end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe w punkcie  $P_0$  istnieją, więc istnieją też pochodne kierunkowe w  $P_0$  w kierunkach wektorów  $\mathbf{u}_1 = [1, 0]$  i  $\mathbf{u}_2 = [0, 1]$  oraz  $\mathbf{u}_3 = [-1, 0]$  i  $\mathbf{u}_4 = [0, -1]$ . Pochodne te są równe:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell_1}\Big|_{P_0} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_2}\Big|_{P_0} = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_3}\Big|_{P_0} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_4}\Big|_{P_0} = 2.$$

Chcemy teraz policzyć pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku jakiegoś wektora  $[c, d]$ , który nie jest równoległy do osi układu współrzędnych, tzn.  $cd \neq 0$ . Nie możemy zastosować wzoru (3), ponieważ w treści podano, że funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie  $P$ . Sprawdźmy to. Przypuśćmy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $P$ , czyli dla dowolnych przyrostów  $\Delta x$  i  $\Delta y$  zmiennych niezależnych, z których co najmniej jeden jest różny od zera, zachodzi warunek (2), tzn.

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 1 \cdot \Delta x - 2 \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

gdzie  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  dążą do zera przy  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . Weźmy  $\Delta x = \Delta y \neq 0$ . Mamy:

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta x &= \Delta x - 2\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta x \quad | : \Delta x \\ \Delta x &= 1 - 2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \Delta x &= -1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność: przy  $\Delta x \rightarrow 0$  lewa strona dąży do zera, a prawa dąży do  $-1$ , bo dla funkcji różniczkowalnej  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  dążyłyby do zera. Zatem funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w  $P_0$ .

Pochodną w kierunku wektora  $\mathbf{u}_5 = [c, d]$ , gdzie  $c^2 + d^2 = 1$  i  $cd > 0$ , możemy obliczyć bezpośrednio z definicji. Zauważmy, że iloczyn  $ct \cdot dt$  jest dodatni dla każdego  $t \neq 0$ , więc

$$\frac{\partial f}{\partial \ell_5}\Big|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ct, dt) - f(0, 0)}{t\sqrt{c^2 + d^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ct \cdot dt - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} cdt = 0.$$

Takiego wyniku nie otrzymalibyśmy, gdybyśmy mimo wszystko próbowali zastosować wzór (3). Nie jest to wcale dziwne, bo założenia są ważne.

Podobnie obliczamy pochodną w kierunku wektora  $\mathbf{u}_6 = [c, d]$ , gdzie  $c^2 + d^2 = 1$  i  $cd < 0$ . Wówczas  $ct \cdot dt = cdt^2 < 0$  dla każdego  $t \neq 0$ , więc

$$\frac{\partial f}{\partial \ell_6}\Big|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ct, dt) - f(0, 0)}{t\sqrt{c^2 + d^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ct - 2dt - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (c - 2d) = c - 2d.$$

Taki sam wynik otrzymalibyśmy, jeśli zastosowalibyśmy wzór (3). Założenia nie są spełnione, a otrzymana zgodność jest przypadkowa<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Nie jest to całkowicie przypadkowy wynik, ma on pewien związek z samą funkcją. Czytelnik łatwo ten związek zauważy, jeśli przeanalizuje podobną do  $f$  funkcję  $g$  podaną w zadaniu 3 w sekcji 6 tego artykułu.

## Wniosek z przykładu 7

Funkcja, która nie jest różniczkowalna w punkcie  $P_0$ , może mieć pochodną kierunkową w  $P_0$  (nawet w każdym możliwym kierunku).

**Przykład 8.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcja  $f$  jest nieciągła w punkcie  $P_0(0, 0)$ , ale ma w tym punkcie pochodne kierunkowe w pewnych kierunkach.

Funkcja  $f$  jest określona na całej płaszczyźnie ( $D_f = \mathbb{R}^2$ ), więc ciągłość w punkcie  $P_0$  oznaczałaby<sup>2</sup>, że granica funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  jest równa wartości funkcji w tym punkcie. Rozważana funkcja w ogóle nie ma granicy w punkcie  $P_0$  — wynika to np. z definicji Heinego:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Funkcja  $f$  jest nieciągła w punkcie  $P_0$ , ma jednak obie pochodne<sup>3</sup> cząstkowe w punkcie  $P_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe w punkcie  $P_0$  istnieją, więc istnieją też pochodne kierunkowe w  $P_0$  w kierunkach wektorów  $\mathbf{u}_1 = [1, 0]$  i  $\mathbf{u}_2 = [0, 1]$  oraz  $\mathbf{u}_3 = [-1, 0]$  i  $\mathbf{u}_4 = [0, -1]$ . Te cztery pochodne kierunkowe są równe:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell_1} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \ell_2} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \ell_3} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \ell_4} \right|_{P_0} = 0.$$

Zbadajmy jeszcze, czy istnieje pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w jakimś innym kierunku, np. wektora  $\mathbf{u}_5 = [-4, 3]$ . Funkcja jest nieciągła w  $P_0$ , więc nie jest też różniczkowalna w  $P_0$  i nie możemy zastosować wzoru (3) do policzenia tej pochodnej kierunkowej. Sprawdźmy, czy istnieje skończona granica

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell_5} \right|_{P_0} \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-4t, 3t) - f(0, 0)}{t\sqrt{16+9}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{-4t \cdot 3t}{16t^2+9t^2} - 0}{5t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{-12t^2}{25t^2}}{5t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-12}{125t}.$$

Oczywiście ta granica nie istnieje, bo granice jednostronne są różne:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-12}{125t} = \left[ \frac{-\frac{12}{125}}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-12}{125t} = \left[ \frac{-\frac{12}{125}}{0^-} \right] = +\infty.$$

<sup>2</sup> Punkt  $(0, 0)$  jest punktem skupienia dziedziny tej funkcji. Przypomnijmy, że w punktach izolowanych dziedziny funkcja jest ciągła wprost z definicji.

<sup>3</sup> Zwróćmy uwagę, że dla funkcji jednej zmiennej taka sytuacja jest niemożliwa, bo ciągłość funkcji jednej zmiennej jest konieczna (ale niewystarczająca) dla istnienia pochodnej tej funkcji.

Zatem  $\frac{\partial f}{\partial \ell_5} \Big|_{P_0}$  nie istnieje. Podobnie możemy pokazać, że nie istnieje pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $[c, d]$ , gdzie  $cd \neq 0$ .

### Wniosek z przykładu 8

Funkcja, która nie jest ciągła w punkcie  $P_0$ , może mieć pochodną kierunkową w  $P_0$ .

**Przykład 9.** Zbadajmy, czy funkcja określona wzorem  $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y - 3)$  ma jakąś pochodną kierunkową w punkcie  $P_0(2, 1)$ .

Funkcja signum (łac. *znak*) jest funkcją nieciągłą, która przyjmuje tylko trzy wartości: 1 dla argumentów dodatnich,  $-1$  dla argumentów ujemnych i 0 dla argumentu równego zero. Najpierw obliczymy granicę  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h}$ . Jest to granica przy  $h$  dążącym do zera, czyli  $h$  jest dowolnie blisko zera, ale jest różne od zera, więc mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} = \left[ \frac{1}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{h} = \left[ \frac{-1}{0^-} \right] = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h} &= +\infty. \end{aligned}$$

Korzystając z tego wyniku, stwierdzamy, że funkcja  $f$  nie ma pochodnych cząstkowych w  $P_0$ , bo nie istnieją skończone granice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} &\stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h, 1) - f(2, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(2+h+1-3) - \operatorname{sgn}(2+1-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} &\stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2, 1+h) - f(2, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(2+1+h-3) - \operatorname{sgn}(2+1-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{h}. \end{aligned}$$

Jeżeli chcemy policzyć pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u} = [a, b] \neq \mathbf{0}$ , to musimy obliczyć granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+at, 1+bt) - f(2, 1)}{t\sqrt{a^2 + b^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(2+at+1+bt-3) - 0}{t\sqrt{a^2 + b^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(at+bt)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Granica ta jest skończona tylko wtedy, gdy licznik jest równy zero, czyli dla  $a = -b$ . Wektorów spełniających ten warunek jest nieskończenie wiele, ale wskazują one tylko dwa różne kierunki. Wybierzmy dwa takie wektory o „ładnych” współrzędnych:  $\mathbf{u}_1 = [1, -1]$  i  $\mathbf{u}_2 = [-1, 1]$ . W kierunku tych wektorów pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  jest równa 0.

### Wniosek z przykładu 9

Funkcja, która nie ma pochodnych cząstkowych w punkcie  $P_0$ , może mieć pochodną kierunkową w punkcie  $P_0$ .

## 6. Zadania i odpowiedzi

Teraz nadszedł czas, aby sprawdzić swoją wiedzę i zrozumienie tematu. Poniżej zamieszczono propozycje kilku zadań do samodzielnego rozwiązania.

**Zadanie 1.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$  w kierunku wektora  $\mathbf{u}$ , jeśli

a)  $f(x, y) = \arctg \frac{x-y}{2}$ ,  $P_0(5, 5)$ ,  $\mathbf{u} = [-4, 3]$ ,

b)  $f(x, y) = xexy^3$ ,  $P_0\left(\frac{1}{8}, 2\right)$ ,  $\mathbf{u} = [2, -1]$ ,

c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x+2y+3z}$ ,  $P_0(15, 2, -1)$ ,  $\mathbf{u} = [-1, 2, -2]$ ,

d)  $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ ,  $P_0(4, -1, 2)$ ,  $\mathbf{u} = [\cos \pi, \cos \frac{\pi}{3}, \cos 0]$ .

**Zadanie 2.** Obliczyć największą i najmniejszą pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $P_0$ , jeśli

a)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}2$ ,  $P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ ,

b)  $f(x, y, z) = 2 \sin x + \operatorname{tg} y - e^{-3z}$ ,  $P_0(0, 0, 0)$ .

**Zadanie 3.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{jeśli } xy \geq 0 \\ x - 2y & \text{jeśli } xy < 0 \end{cases}$  w punkcie  $P_0(0, 0)$

w kierunku wektora

a)  $\mathbf{u} = [-4, 3]$ ,

b)  $\mathbf{u} = [3, 4]$ .

W którym przypadku otrzymalibyśmy taki sam wynik, stosując beztrosko wzór (3)? Tego wzoru niestety **nie można** zastosować, bo nie są spełnione założenia.

**Zadanie 4.** Sprawdzić, że funkcja  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  jest nieciągła w punkcie  $P_0(0, 0)$ , ale ma w tym punkcie pochodną kierunkową w każdym kierunku  $[a, b] \neq \mathbf{0}$ .

**Zadanie 5.** Zbadać, w jakich kierunkach funkcja  $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4y^2)$  ma pochodną kierunkową w punkcie  $P_0(0, 0)$ .

**Odpowiedź 1.**

a)  $-0, 7$ ,

b)  $\frac{e\sqrt{5}}{2}$ ,

c)  $-\frac{1}{8}$ ,

d)  $\frac{1}{3}$  (wskazówka:  $\mathbf{u}$  nie jest wersorem).

**Odpowiedź 2.**

a) 1 (w kierunku  $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$ ),  $-1$  (w kierunku  $[\sqrt{3}, \sqrt{2}]$ ),

b)  $\sqrt{14}$  (w kierunku  $[2, 1, 3]$ ),  $-\sqrt{14}$  (w kierunku  $[-2, -1, -3]$ ).

**Odpowiedź 3.**

a)  $-\frac{7}{5}$ ,

b) 0.

W przypadku b) otrzymamy ten sam wynik ze wzoru (3), chociaż nie mamy podstaw do stosowania tego wzoru — funkcja  $g$  nie jest różniczkowalna w  $P_0$ .

**Odpowiedź 4.**

$$\frac{\partial g}{\partial \ell} \Big|_{P_0} = \begin{cases} \frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}} & \text{dla } b \neq 0 \\ 0 & \text{dla } b = 0. \end{cases}$$

Funkcja jest nieciągła, bo np.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq g(0, 0)$ .

**Odpowiedź 5.**

Istnieją cztery pochodne kierunkowe w  $P_0$  (w kierunkach wektorów  $[2, 1]$ ,  $[2, -1]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[-2, -1]$ ).

**Literatura**

1. E. Łobos, *Własności pochodnej kierunkowej w zadaniach*, MINUT 2022(4), s. 61-69.
2. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises. Part 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020, pp. 143–145.
3. J. Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, Thomson/Brooks Cole 2008, pp. 920–921; <https://www.stewartcalculus.com/> (dostęp: 8.06.2022 r.).