

Piotr KARDASZ*

ALGORYTM IDENTYFIKACJI SKŁADOWYCH SINUSOIDALNYCH ZŁOŻONEGO SYGNAŁU NA PODSTAWIE JEGO LOSOWO POBRANYCH PRÓBEK

W artykule przedstawiono algorytm estymacji parametrów składowych sinusoidalnych złożonego sygnału, na podstawie ograniczonej liczby losowo pobranych próbek tego sygnału. Działanie algorytmu zostało zbadane na przykładach kilku sygnałów, które stanowią sumę składowych sinusoidalnych o różnych amplitudach i częstotliwościach. Wyniki eksperymentu pokazują, że proponowany algorytm jest w stanie zidentyfikować i określić parametry składowych sinusoidalnych badanego sygnału o największej amplitudzie. Wyniki działania badanego algorytmu mogą stanowić punkt wyjścia dla bardziej zaawansowanych metod identyfikacji składowych takiego sygnału, takich jak algorytmy ewolucyjne. W artykule zostało zbadane zachowanie się proponowanego algorytmu i dokładność otrzymanych wyników w zależności od parametrów i liczby próbek użytych w procedurze identyfikacji składowych sygnału. Zostały również zarysowane kierunki dalszych badań nad udoskonaleniem algorytmu.

1. WPROWADZENIE

Klasyczne metody analizy i obróbki sygnałów jednowymiarowych przedstawionych w postaci dyskretnej, takich jak sygnały akustyczne albo sygnały pomiarowe, opierają się na ogół na wykorzystaniu jednej z popularnych transformat, takich jak transformata Fouriera, cosinusowa lub falkowa [1]. Metody takie mogą być stosowane wtedy, kiedy mamy do dyspozycji pełny zestaw próbek sygnału, pobranych z częstotliwością próbkowania nie mniejszą niż wynikająca z twierdzenia Kotelnikowa-Shannona. Warunek ten nie zawsze może być spełniony. Istnieją przypadki, w których taki zestaw próbek badanego sygnału nie jest dostępny. Może to wynikać z powodu braku odpowiednich środków technicznych [2] lub uszkodzeń w kanale transmisyjnym. Istnieją również przypadki, w których z góry wiadomo jest, że pewne próbki nie reprezentują badanego sygnału i należy je odrzucić. Przykładem tego rodzaju sytuacji jest „ucięcie” wierzchołków sygnału na skutek przekroczenia zakresu liczb reprezentujących sygnał dyskretny w wyniku przetwarzania analogowo-cyfrowego.

*Politechnika Białostocka.

W ostatnich latach rozwija się metoda zwana *Compressed Sensing*, polegająca na rekonstrukcji sygnału na podstawie ograniczonej liczby jego odpowiednio przygotowanych próbek [3, 4]. Metoda ta, w przeciwieństwie do klasycznych metod kompresji sygnału, działających na ogół w dziedzinie jego widma i wymagających zaangażowania znacznej mocy obliczeniowej w celu kompresji i kodowania sygnału, pozwala na przygotowanie takich próbek przy zastosowaniu niewielkiej mocy obliczeniowej. Jedną z najprostszych metod tego rodzaju może być odrzucenie części próbek [4] i rekonstrukcja sygnału na podstawie pozostałych.

Rekonstrukcja sygnału na podstawie ograniczonej liczby jego próbek możliwa jest przy użyciu algorytmu ewolucyjnego. Badania nad działaniem tego rodzaju algorytmów pokazały, że potrafią one z dużą dokładnością odnaleźć parametry składowych badanego sygnału nawet na podstawie niewielkiej liczby próbek, ale charakteryzują się długim czasem działania.

2. CEL I ZAKRES BADAŃ

Podstawowym problemem podczas identyfikacji parametrów sygnału z użyciem algorytmów ewolucyjnych jest mała szybkość ich działania. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest fakt, że algorytmy takie rozpoczynają działanie od zestawu losowo wybranych parametrów i trzeba wielu pokoleń, aby algorytm tego rodzaju zbliżył się do poszukiwanego rozwiązania. Celem pracy stało się więc opracowanie, zaimplementowanie i przetestowanie algorytmu, pracującego szybciej niż algorytm ewolucyjny, a którego wyniki pracy mogłyby stać się punktem wyjścia dla bardziej zaawansowanych metod [5]. Algorytm taki powinien odnaleźć w sygnale złożonym z wielu składowych sinusoidalnych i białego szumu te składowe, których amplituda jest najwyższa, a następnie określić ich przybliżone parametry: amplitudę, fazę i częstotliwość.

Algorytm taki został opracowany, zaimplementowany i przetestowany. Do testów użyte zostały sygnały składające się z ośmiu składowych sinusoidalnych i białego szumu. Zbadana została zdolność odnajdowania składowych w funkcji liczby próbek sygnału oraz dokładność otrzymanych wyników.

3. ALGORYTM IDENTYFIKACJI

3.1. Podstawy działania algorytmu

Podstawą do opracowania proponowanego algorytmu stało się spostrzeżenie, że równanie

$$\sin at \cdot \sin bt = \frac{\cos(a-b)t}{2} - \frac{\cos(a+b)t}{2} \quad (1)$$

redukuje się do

$$\sin at \cdot \sin at = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2at)}{2} \quad (2)$$

jeśli $a = b$ po scałkowaniu otrzymuje się dla $a \neq b$:

$$\int \sin at \sin btdt = \frac{\sin(a-b)t}{2} - \frac{\sin(a+b)t}{2} + C \quad (3)$$

Funkcja ta, dla $C = 0$, może przyjmować wartości z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Dla $a = b$ otrzymano

$$\int \sin(ax) \sin(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{2} + C \quad (4)$$

Jeśli badany sygnał jest funkcją sinusoidalną o amplitudzie A , to

$$\int_{t_2}^{t_1} A \sin(at) \sin(at) dt = \frac{A(t_2 - t_1)}{2} - \frac{A \sin(2at_2)}{2} + \frac{A \sin(2at_1)}{2} \quad (5)$$

Można więc określić amplitudę sygnału sinusoidalnego:

$$A = \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} A \sin(at) \sin(at) dt}{(t_2 - t_1) - \sin(2at_2) + \sin(2at_1)} \quad (6)$$

Jeśli $t_2 - t_1 \gg 2$, to

$$A \approx \frac{2 \int_{t_1}^{t_2} A \sin(at) \sin(at) dt}{t_2 - t_1} \quad (7)$$

Spostrzeżenie to jest prawdziwe także dla sygnałów dyskretnych:

$$A \approx \frac{2 \sum_{n=n_1}^{n_2} A \sin(anT) \sin(anT)}{n_2 - n_1} \quad (8)$$

W rzeczywistych sygnałach mamy do czynienia ze składowymi sinusoidalnymi przesuniętymi w fazie. Możemy skorzystać z faktu, że sygnał taki można rozłożyć na składową sinusową i kosinusową:

$$\sin(at + \varphi) = \sin at \cos \varphi + \cos at \sin \varphi \quad (9)$$

i korzystając z powyższych spostrzeżeń oszacować amplitudy niezależnie dla składowej sinusoidalnej i kosinusoidalnej, po czym obliczyć amplitudę:

$$A = \sqrt{A_{\sin}^2 + A_{\cos}^2} \quad (10)$$

oraz fazę:

$$\varphi = \arctg \frac{A_{\sin}}{A_{\cos}} \quad (11)$$

badanego sygnału.

Jeśli dysponuje się $N < n_2 - n_1$ próbkami P_n sygnału, równanie (8) przyjmie postać:

$$A \approx \frac{2 \sum_{n=1}^N P_n \sin anT}{N} \quad (12)$$

gdzie P_n jest wartością n -tej próbki i powyższe spostrzeżenia pozostaną nadal słuszne, wzrośnie jedynie, z powodu zmniejszenia N , błąd estymacji spowodowany przez nieznaną z góry wielkość pominięte w równaniu (7).

W przypadku, gdy sygnał jest mieszaniną wielu składowych sinusoidalnych, każda z nich doda swój niezerowy wkład do sumy (12), co dodatkowo zwiększy błąd estymacji, jednak założeniem pracy było oszacowanie, a nie dokładne odnalezienie poszukiwanych wartości.

3.2 Działanie algorytmu

Na podstawie powyższych spostrzeżeń został opracowany i zaimplementowany w środowisku uruchomieniowym Lazarus algorytm, umożliwiający identyfikację parametrów sinusoidalnych składowych złożonego sygnału. Algorytm ten dokonuje mnożenia badanego sygnału przez sygnały testowe postaci

$$F_{\sin} = \sin 2\pi ft \quad (13)$$

oraz

$$F_{\cos} = \cos 2\pi ft \quad (14)$$

gdzie f zmienia się z krokiem 1 Hz. Wyniki mnożeń są sumowane dla każdej próbki, zgodnie ze wzorem (12). Następnie na podstawie (10) i (11) obliczana jest amplituda i faza. Wśród odnalezionych wartości poszukiwane jest maksimum amplitudy w funkcji częstotliwości testowej f . Zapisywana jest wtedy wartość amplitudy i fazy odnalezionej składowej. Aby zwiększyć dokładność estymacji parametrów kolejnej składowej, odnaleziona składowa jest odejmowana od badanego sygnału, po czym procedura jest powtarzana.

Aby dodatkowo zwiększyć dokładność estymacji, procedura jest uruchamiana wielokrotnie, za każdym razem odejmując od sygnału testowego już odnalezione składowe. Kolejność odnajdowania i odejmowania odnalezionych składowych dla pierwszych kroków obliczeń przedstawiono w tabeli 3.1.

Postępowanie tego rodzaju, chociaż zwiększa czas obliczeń, zmniejsza wpływ już odnalezionych składowych na dokładność poszukiwania kolejnych z nich. Pominięcie odejmowania już odnalezionych składowych powoduje, że procedura nie radzi sobie z odnalezieniem składowych o niższych amplitudach.

Tabela 3.1. Poszukiwane składowe sygnału w pierwszych krokach proponowanego algorytmu

Przebieg	Odejmowane odnalezione składowe	Poszukiwana składowa
1	-	1
2	1	2
3	2	1
4	1	2
5	1,2	3
6	2,3	1
7	1,3	2
8	1,2	3
9	1,2,3	4
10	2,3,4	1
11	1,3,4	2
12	1,2,4	3
13	1,2,3	4
14	1,2,3,4	5

3.3 Przebieg i wyniki eksperymentów

Proponowany algorytm został przetestowany za pomocą dwóch sygnałów, składających się z ośmiu składowych każdy. Dodatkowo użyte zostały te same sygnały z dodatkiem białego szumu przy SNR = 20dB. Parametry sygnałów testowych przedstawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Parametry sygnałów testowych

Sygnał 1				Sygnał 2			
Składowa	A	f	φ	Składowa	A	f	φ
		[Hz]	[°]			[Hz]	[°]
1.	1,000	100	0	1.	0,944	1992	92
2.	0,707	200	0	2.	0,471	1006	-101
3.	0,500	300	0	3.	0,350	1358	90
4.	0,354	400	0	4.	0,253	1759	162
5.	0,250	500	0	5.	0,129	1866	-128
6.	0,177	600	0	6.	0,129	1704	-13
7.	0,125	700	0	7.	0,073	503	104
8.	0,088	800	0	8.	0,068	411	126

Wygenerowane zostało 2048 kolejnych próbek sygnałów. Spośród nich wylosowano zestawy 64, 128, 256, 512 i 1024 próbek. Dla poszczególnych zestawów tych próbek uruchomiono badany algorytm. W tabeli 3.3 przedstawiono

wyniki jego działania dla wybranych sygnałów i liczby próbek. Pokazane zostały średnie (dla wszystkich składowych) i maksymalne (dla „najgorzej” rozpoznanej składowej) błędy identyfikacji parametrów sygnału. Błąd fazy odniesiony został do kąta pełnego.

Tabela 3.3. Wyniki działania algorytmu – błędy estymacji składowych sygnału

Sygnał nr	SNR[dB]	Liczba próbek	Średnie wartości błędów			Maksymalne wartości błędów		
			ΔA	Δf	$\Delta \varphi$	ΔA	Δf	$\Delta \varphi$
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
1	∞	2048	0,46	0,00	0,11	1,61	0,00	0,34
1	∞	512	4,99	0,073	1,14	11,2	0,25	2,85
1	20	2048	1,29	0,00	0,20	3,36	0,00	0,46
1	20	512	7,48	0,25	2,04	26,1	1,00	3,52
2	∞	2048	0,12	0,00	0,027	0,43	0,00	0,10
2	∞	512	1,11	0,038	1,26	3,02	0,19	3,25
2	20	2048	1,74	0,030	0,62	5,73	0,24	3,75
2	20	512	2,78	0,055	1,10	9,13	0,20	3,33

Algorytm był w stanie odnaleźć wszystkie składowe sygnałów testowych na podstawie ich 512 losowo pobranych próbek. Mając do dyspozycji 128 losowo pobranych próbek algorytm był w stanie odnaleźć 7 z 8 składowych obu testowanych, nie zaszumionych sygnałów.

4. PODSUMOWANIE, KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ

Przedstawiony algorytm jest w stanie odnaleźć ze stosunkowo dużą dokładnością składowe sinusoidalne złożonego sygnału. Błąd ten jest na tyle mały, że w celu dalszej poprawy jakości estymacji parametrów sygnału można zastanowić się nad użyciem metod prostszych, niż algorytmy ewolucyjne [5].

Ponieważ poszczególne mnożenia przez funkcje sinusoidalne mogą być dokonywane równolegle, na przykład przez układy mnożące zawarte w procesorach GPU [6] lub układach FPGA [7], zaletą przedstawionego algorytmu jest możliwość jego zmodyfikowania tak, aby mógł być uruchomiony w środowisku równoległym, w którym jeden proces odpowiadałby za jedną testowaną częstotliwość. Pozwoli to na wielokrotne zwiększenie szybkości pracy takiego algorytmu.

LITERATURA

- [1] Zieliński T. P., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2005.
- [2] Hong S., Direct Spectrum Sensing from Compressed Measurements, Military Communications Conference, 2010 - MILCOM 2010, 1187-1192.
- [3] Donoho D. L., Compressed Sensing, IEEE Transactions On Information Theory, Vol. 52, No. 4, April 2006, s. 1289-1306.
- [4] Romberg J., Wakin M., Compressed Sensing: A Tutorial, IEEE Statistical Signal Processing Workshop, Madison, Wisconsin 2007.
- [5] Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L., Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte, PWN, Warszawa, Łódź, 1999.
- [6] Munshi A., Gaster B., Mattson T.G., OpenCL Programming Guide, Addison Wesley Pub Co. Inc., 2011.
- [7] Majewski J., Zbysiński P., Układy FPGA w przykładach, Wydawnictwo BTC, Warszawa 2007.

SINUSOIDAL SIGNAL COMPONENTS IDENTIFICATION ALGORITHM BASED ON LIMITED NUMBER OF ITS RANDOM SAMPLES

The paper presents an algorithm for sinusoidal signal components estimation based on a limited number of random samples of this signal. The algorithm was tested on several examples of signals that are the sum of sinusoidal components having different amplitudes and frequencies. The experimental results show that the proposed algorithm is able to identify and determine the parameters of sinusoidal components of the test signal with the highest amplitudes. The results of the test algorithm can provide a starting point for more advanced ways to identify components of such signals, such as evolutionary algorithms. The behavior of the proposed algorithm, and the accuracy of the results obtained, depending on the parameters used and the number of samples to reconstruct the signal was tested. The directions for further research to improve the algorithm are outlined.