

Mikołaj BUSŁOWICZ*

ANALIZA DYNAMIKI PROSTEGO OBWODU ELEKTRYCZNEGO NIECAŁKOWITEGO RZĘDU Z MEMRYSTOREM

W pracy rozpatrzono szeregowy obwód elektryczny niecałkowitego rzędu zawierający cewkę, superkondensator i memrystor. Stosując badania teoretyczne oraz symulacyjne, przeprowadzone w środowisku systemu Matlab/Simulink, dokonano analizy wpływu niecałkowitego rzędu równań opisujących rozpatrywany obwód na możliwość wystąpienia drgań chaotycznych.

1. WSTĘP

W XX wieku nastąpił intensywny rozwój badań naukowych w zakresie teorii chaosu deterministycznego, który należy rozumieć jako przypadkowe zachowanie się przebiegów czasowych zmiennych charakteryzujących procesy o deterministycznych modelach matematycznych. Dla pewnych wartości parametrów procesy te stają się niezwykle wrażliwe na warunki początkowe i nawet niewielka ich zmiana może prowadzić po pewnym czasie do wielkich odchyłeń. Bliższe informacje dotyczące układów chaotycznych można znaleźć np. w pracy [15] i w cytowanej tam literaturze.

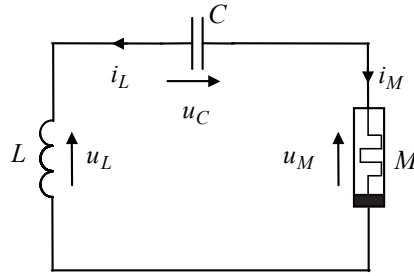
Znanym klasycznym obwodem elektrycznym, w których występują drgania chaotyczne jest tzw. oscylator Chua [3], szeroko analizowany w literaturze, np. [14, 15].

Ostatnio w pracy [13] (patrz też [7, 8]) został zaproponowany prosty szeregowy obwód elektryczny zawierający trzy elementy: cewkę, kondensator i memrystor (a właściwie układ memrystorowy), w którym występują drgania chaotyczne. Układ ten będzie rozpatrywany w niniejszej pracy w przypadku, gdy kondensator jest elementem niecałkowitego rzędu, a związek pomiędzy napięciem występującym na nim i przepływającym przez niego prądem jest opisany zależnością różniczkową niecałkowitego rzędu. Taka zależność występuje w przypadku superkondensatora, np. [6, 9, 10]. Zostanie przeprowadzona analiza dynamiki rozpatrywanego obwodu, w tym analiza możliwości wystąpienia drgań chaotycznych. Zostaną też podane wyniki badań symulacyjnych w środowisku systemu Matlab/Simulink z wykorzystaniem Ninteger Fractional Control Toolbox for MatLab [16].

* Politechnika Białostocka.

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy szeregowy obwód elektryczny o schemacie jak na rysunku 1.



Rys. 1. Rozważany obwód elektryczny

Obwód ten został zaproponowany w pracy [13] i był analizowany w [7, 8]. Podobnie jak w [13], element oznaczony literą M nie jest dokładnie elementem zdefiniowanym w [4] jako memerystor lecz bardziej ogólnym elementem zdefiniowanym w [5] i określonym jako układ memrystorowy. Zgodnie z [4] związek pomiędzy napięciem na memrystorze i przepływającym przez niego prądem jest następujący: $u_M(t) = M(q)i_M(t)$, $\dot{q}(t) = i_M(t)$ ($q(t)$ jest ładunkiem elektrycznym) zaś w przypadku układu memrystorowego zachodzą zależności

$$u_M(t) = R(z(t))i_M(t), \quad \dot{z}(t) = f(z(t), i_M(t)), \quad (1)$$

gdzie $z(t)$ jest wewnętrznym stanem memrystora zaś $R(z(t))$ jest memrystancją.

Podobnie jak w pracy [13] przyjmiemy, że

$$R(z(t)) = \beta(z^2(t) - 1), \quad f(z(t), i_M(t)) = -\alpha z(t) + i_M(t)(1 - z(t)), \quad (2)$$

przy czym $\alpha = 0.6$, $\beta = 3/2$.

Z powyższego i praw Kirchhoffa, przyjmując $L=3$ i $C=1$, otrzymamy następujące równanie stanu nieliniowego obwodu pokazanego na rysunku 1 [13]

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad X(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]^T, \quad (3)$$

$$F(X(t)) = \begin{bmatrix} y(t) \\ -(1/3)x(t) + 0,5y(t) - 0,5z^2(t)y(t) \\ -y(t) - 0,6z(t) - y(t)z(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

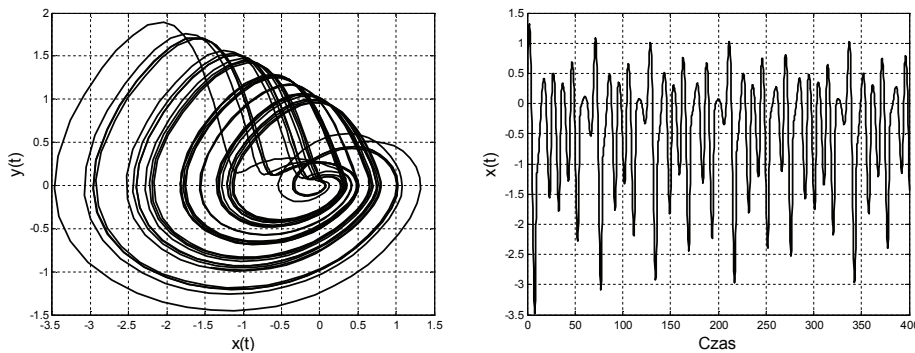
przy czym zmienna stanu $x(t)$ jest napięciem na kondensatorze, $y(t)$ jest prądem płynącym przez cewkę, $z(t)$ jest wewnętrznym stanem układu memrystorowego.

Układ (3), (4) ma jeden punkt równowagi X_e w początku przestrzeni (x,y,z) zaś liniowe przybliżenie w otoczeniu tego punktu ma postać $\dot{X}(t) = A_e X(t)$, przy czym

$$A_e = \frac{\partial F(X)}{\partial X} \Big|_{X_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -0,6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Macierz (5) ma wartości własne: $-0,6$ oraz $0,25 \pm j0,52$. Liniowe przybliżenie nie jest więc asymptotycznie stabilne.

Chaotyczny atraktor układu (3), (4) na płaszczyźnie (x,y) i wykres zmiennej $x(t)$, wyznaczone dla $t \in [0, 400]$ za pomocą badań symulacyjnych środowiska systemu Matlab/Simulink są pokazane na rysunku 2. Przyjęte warunki początkowe to $x(0) = y(0) = 0,5; z(0) = -0,2$.



Rys. 2. Chaotyczny atraktor rozważanego obwodu na płaszczyźnie (x,y) i wykres $x(t)$

Celem pracy jest analiza rozpatrywanego obwodu elektrycznego w przypadku, gdy kondensator jest elementem niecałkowitego rzędu (superkondensatorem).

Związek pomiędzy napięciem na superkondensatorze i przepływającym przez niego prądem jest opisany zależnością $i_c(t) = C u_c^{(p)}(t)$, $p \in (0, 1)$, przy czym [6, 9, 10]

$$u_c^{(p)}(t) = (d^{(p)}u(t)) / dt^p = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{\dot{u}_c(\tau) d\tau}{(t-\tau)^p}, \quad (7)$$

jest pochodną Caputo niecałkowitego rzędu p zmiennej $u_c(t)$, $\dot{u}_c(t) = du_c(t)/dt$

zaś $\Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-t} t^{l-1} dt$ jest funkcją gamma Eulera.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

W przypadku rozpatrywanego obwodu elektrycznego niecałkowitego rzędu równanie stanu (3) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} x^{(p)}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = F(X(t)), \quad (8)$$

przy czym prawa strona ma postać (4).

Układ (8) ma ten sam punkt równowagi co układ (3).

Wyznaczając liniowe przybliżenie układu (8) w otoczeniu punktu równowagi otrzymamy

$$\begin{bmatrix} x^{(p)}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

przy czym macierz stanu A_e ma postać (5).

Wielomian charakterystyczny układu (9) niecałkowitego rzędu ma postać

$$\det \begin{bmatrix} s^p & -1 & 0 \\ 1/3 & s-1/2 & 0 \\ 0 & 1 & s+0,6 \end{bmatrix} = (s+0,6)(s^{p+1} - 0,5s^p + 1/3). \quad (10)$$

Z teorii stabilności liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu mamy, że układ (9) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera jego wielomianu charakterystycznego (10) (niecałkowitego stopnia) mają ujemne części rzeczywiste, np. [1, 2, 11, 12, 14]. Z (10) wynika, że jedno zero jest rzeczywiste i ujemne zaś pozostałe zera są zerami wielomianu

$$w_1(s) = s^{p+1} - 0,5s^p + 1/3. \quad (11)$$

Do sprawdzenia, czy wszystkie zera wielomianu (11) mają ujemne części rzeczywiste zastosujemy metodę częstotliwościową podaną w pracach [1, 2].

Z powyższych rozważań prac [1, 2] wynika następujące twierdzenie.

Niech $w_0(s)$ będzie dowolnym wielomianem odniesienia niecałkowitego stopnia $p+1$, którego wszystkie zera mają ujemne części rzeczywiste. Za $w_0(s)$ możemy np. wybrać wielomian o postaci $w_0(s) = (s+c)^{p+1}$, $c > 0$.

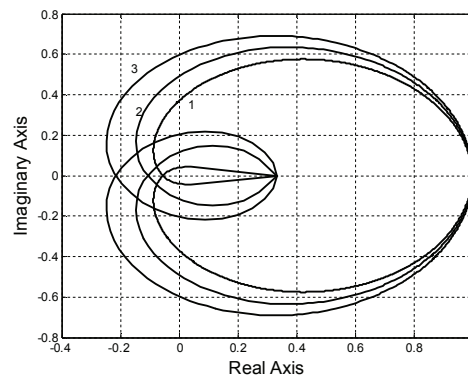
Twierdzenie 1. Układ (9) niecałkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\psi(j\omega) = w_1(j\omega)/w_0(j\omega) \quad (12)$$

przy wartościach ω zmieniającym się od $-\infty$ do ∞ nie okrąża ani obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Aby zbadać stabilność układu (9) wyznaczano wykresy funkcji (12) przy $w_0(j\omega) = (j\omega + 1)^{p+1}$ dla różnych wartości niecałkowitego rzędu $p \in (0, 1)$, zmieniających się od 0 do 0,9 z krokiem 0,1. Kilka z nich jest pokazanych na rysunku 2. Wszystkie otrzymane wykresy obejmowały początek układu współrzędnych, ponadto z ich przebiegów wynikało, że obejmowanie zachodziło też dla wartości pośrednich.

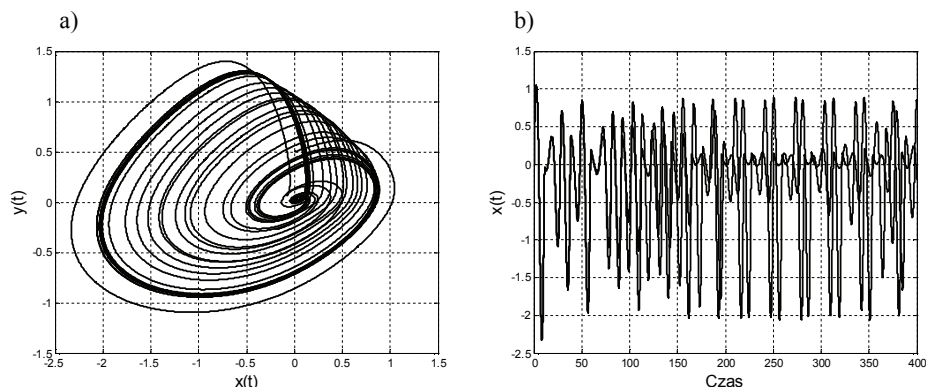
Uwzględniając powyższe oraz niestabilność asymptotyczną układu (9) dla $p = 1$ możemy stwierdzić, że punkt równowagi rozpatrywanego obwodu elektrycznego niecałkowitego rzędu nie jest asymptotycznie stabilny dla dowolnego $p \in (0, 1)$. Oznacza to, że w tym obwodzie mogą wystąpić drgania chaotyczne.



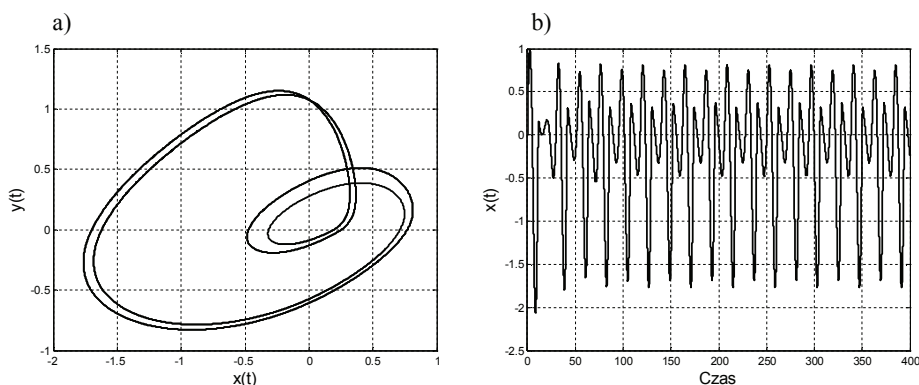
Rys. 2. Wykresy funkcji (12) dla kilku wartości parametru q :
1 – dla $p = 0,1$; 2 – dla $p = 0,6$; 3 – dla $p = 0,9$

Aby przeanalizować możliwość wystąpienia drgań chaotycznych w rozpatrywanym obwodzie, przeprowadzono badania symulacyjne w środowisku systemu Matlab/Simulink. Wykorzystano przy tym *Noninteger Fractional Control Toolbox for MatLab* opisany w pracy [16]. Zawiera on blok *nid* realizujący (w sposób przybliżony) operacje różniczkowania lub całkowania niecałkowitych rzędów, przy czym można wybrać rząd i metodę aproksymacji. Do symulacji wybrano metodę aproksymacji Oustaloup'a (CRONE) rzędu $n = 7$. Blok *nid* ma transmitancję k/s^ν , przy czym k jest współczynnikiem wzmocnienia zaś $\nu \in (-1, 1)$ jest niecałkowitym rzędem całko-różniczkowy.

Przeprowadzając badania symulacyjne przyjmowano wartości niecałkowitego rzędu p malejące od 0,95 do 0,8 z krokiem 0,5 i od 0,7 do 0,1 z krokiem 0,1 i analizowano otrzymane przebiegi. Wybrane trajektorie i przebiegi czasowe są pokazane na rysunkach 3, 4 i 5.

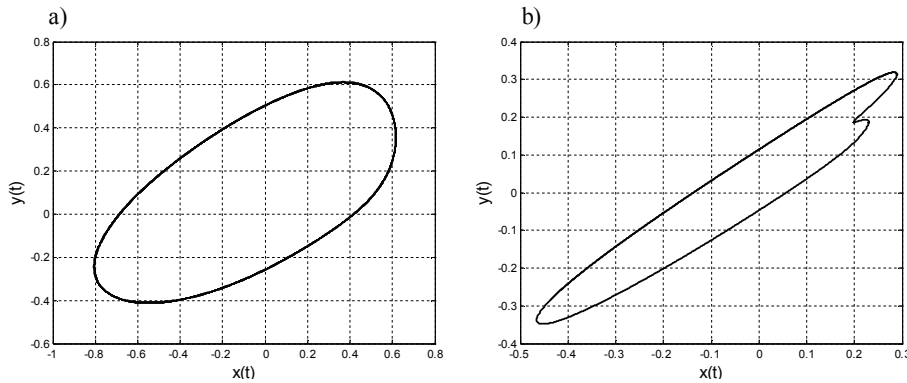


Rys. 3. a) Chaotyczny atraktor dla $p = 0,85$; b) wykresy $x(t)$ dla $y(0) = 0,5$ (linia ciągła) i $y(0) = 0,49$ (linia przerywana), wartości $x(0)$ i $z(0)$ są takie same w obu przypadkach



Rys. 4. a) Cykl graniczny dla $p = 0,8$; b) wykres $x(t)$

Na rysunku 3a) jest pokazany chaotyczny atraktor jaki występuje w układzie przy $p = 0,85$ i warunkach początkowych $x(0) = y(0) = 0,5$; $z(0) = -0,2$. Aby potwierdzić, że przy $p = 0,85$ mamy do czynienia z przebiegami chaotycznymi, a nie np. z cyklem granicznym, wyznaczono przebieg zmiennej $x(t)$ przy warunkach początkowych $x(0) = y(0) = 0,5$; $z(0) = -0,2$ i $x(0) = 0,5$; $y(0) = 0,49$; $z(0) = -0,2$. Oba przebiegi są pokazane na rysunku 3b). Wynika z nich, że wykresy $x(t)$ wyznaczone dla minimalnie różnych warunków początkowych „rozbiegają się”, co świadczy o ich chaotycznym charakterze.

Rys. 5. Cykle graniczne, a) dla $p = 0,6$; b) dla $p = 0,1$

Z przeprowadzonych badań wynika, że w układzie (8) drgania chaotyczne występują dla $p = 0,95$; $p = 0,9$ i $p = 0,85$. Natomiast dla wszystkich wartości p malejących od 0,8 do 0,1 z krokiem 0,1 w układzie występuje cykl graniczny. Najpierw jest to cykl graniczny o dwóch orbitach okresowych (dla $p = 0,8$), przy czym te orbity zbliżają się do siebie w miarę zmniejszania wartości p zaś dla wartości $p = 0,6$ jest to już jedna orbita (rys. 5a)). W miarę dalszego zmniejszania się wartości niecałkowitego rzędu p amplituda drgań okresowych maleje (rys. 5b)).

*Praca naukowa finansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki
jako projekt badawczy N N514 638940.*

LITERATURA

- [1] Busłowicz, M., Stability of State-Space Models of Linear Continuous-Time Fractional Order Systems, *Acta Mechanica et Automatica*, Volume 5, Number 2, 15-22, 2011.
- [2] Busłowicz, M., Stability Analysis of Continuous-Time Linear Systems Consisting of n Subsystems with Different Fractional Orders, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Volume 60, Number 2, 279-284, 2012.
- [3] Chua L.O., Wu W.C., Huang A., Zhong G.A., A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos – part I: Routes to Chaos, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Volume 40, 732-744, 1993.
- [4] Chua, L.O., Memristor-The Missing Circuit Element, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Volume 18, Number 5, 507-519, 1971.
- [5] Chua, L.O., Kang, S.M., Memristive Devices and Systems, *Proc. The IEEE*, Volume 64, 209-223, 1976.
- [6] Dzieliński A., Sarwas G., Sierociuk D., Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models, *Advances in Differential Equations*, 1-15, 2011:11, doi:10.1186/1687-1847-2011-11.

- [7] Ginoux J., Letellier C., Chua, L.O., Topological Analysis of Chaotic Solution of a Three-Element Memristive Circuit, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Volume 20, Number 11, 3819-3827, 2010.
- [8] Hrubos Z., Synthesis of Memristor-Based Chaotic Circuit, *Proc. of the 35th Intern. Conf. on Telecommunications and Signal Processing TSP*, Prague, 416-420, 2012.
- [9] Kaczorek T., Analysis of Fractional Electrical Circuits in Transient States, *Mat. VII Konf. Nauk.-Tech. Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo w Transporcie*, Szczyrk, 1695-1704, 2010.
- [10] Kaczorek T., Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Volume 21, Number 2, 379-384, 2011.
- [11] Kaczorek T., *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer, Berlin, 2011.
- [12] Monje C., Chen Y., Vinagre B., Xue D., Feliu V., *Fractional-Order Systems and Controls*, Springer-Verlag, London, 2010.
- [13] Muthuswamy B., Chua L.O., Simplest Chaotic Circuit, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Volume 20, Number 5, 1567-1580, 2010.
- [14] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation*, Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [15] Sprott J.C., *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [16] Valério D., Ninteger v. 2.3 - Fractional Control Toolbox for MatLab, User and programmer manual, Technical University of Lisbona, Lisbona 2005, <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>.

ANALYSIS OF DYNAMICS OF SIMPLE ELECTRICAL CIRCUIT OF FRACTIONAL ORDER WITH MEMRISTOR

The paper considers electrical circuit of fractional order which has only three elements in series: supercapacitor, coil and memristor. Using theoretical analysis and numerical simulations effects of fractional order on chaotic behavior of the circuit is investigated. Simulations are performed using Ninteger Fractional Control Toolbox for MatLab.