

## FIZYCZNA I GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA POCHODNO-CĄŁKI

## Streszczenie

W pracy pokazano powiązanie między rzędem  $n$  pochodno-cąłki Grünwalda-Letnikowa  ${}_t D_{t_0}^n \{f(t)\}_{0...l}$ , a przyrostem  $dt$  zmiennej  $t$  oraz interpretację geometryczną i fizyczną pochodno-cąłki Grünwalda-Letnikowa niecałkowitego rzędu.

## WSTĘP

Różnego rodzaju interpretacje równań rachunku pochodno-cąłkowego niecałkowitych rzędów opisuje I. Podlubny [6] opierając się na pracach m.in. R.S. Rutmana [7], K. Nishimoto [5] i innych. Z ostatnich prac można wymienić A.G. Butkovskii et al. [1], N. Heymans et al. [4], J.F. Gómez – Aguilar et al. [3], S. Das [2]. Żadna z tych prac nie podaje jednoznacznej interpretacji rachunku niecałkowitego rzędu nawiązującej do klasycznej fizycznej interpretacji pochodnej i cąłki, jako pomiaru przyspieszenia i drogi poruszającego się punktu. Ta praca skupia się na tym właśnie zagadnieniu w zakresie pochodno-cąłki Grünwalda-Letnikowa.

## 1. POCHODNO-CĄŁKA GRÜN WALDA-LETNIKOWA CIĄGU FUNKCYJNEGO

## 1.1. Ogólna definicja

Niech  $f(t)$  będzie funkcją zmiennej rzeczywistej  $t$ . Pochodną dowolnego rzędu  $n \in \mathbb{N}$  funkcji  $f(t)$  zapisuje się:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - mdt)}{(dt)^n} \quad (1)$$

gdzie:

$dt$  jest przyrostem zmiennej niezależnej  $t$ ,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ dla } n \geq m.$$

Indeksuje się kolejne wartości  $(t - mdt)$ :

$$t_m = t - mdt \quad (2)$$

gdzie:

$$dt = t_0 - t_1 = t_1 - t_2 = \dots = t_{l-1} - t_l$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, l$$

$$l = \left\lfloor \frac{t_0 - t_l}{dt} \right\rfloor.$$

Funkcję  $f(t - mdt)$  uwzględniając indeksowanie (2) zapisuje się jako ciąg funkcyjny:

$$f(t - mdt) = \{f(t)\}_{0...l} = \{f_0(t_l), f_1(t_{l-1}), \dots, f_l(t_0)\} \quad (3)$$

Podstawiając (3) do (1) otrzymuje się pochodną rzędu  $n \in \mathbb{N}$  nazywaną dalej pochodno-cąłką Grünwalda-Letnikowa ciągu funkcyjnego:

$$\begin{aligned} \{f^{(n)}(t)\} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{(dt)^n} \sum_{m=0}^l (-1)^m \binom{n}{m} \{f_{l-m}(t_m)\} \\ &\equiv {}_t D_{t_0}^n \{f(t)\}_{0...l} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$\{f_m(t_{l-m})\}$  jest  $m$  elementem ciągu  $\{f(t)\}_{0...l}$

$$l \geq n$$

${}_t D_{t_0}^n \{f(t)\}_{0...l}$  jest notacją Davisa pochodno-cąłki.

## 1.2. Pochodno-cąłka dodatnich rzędów

Dla  $n > 0$  wyrażenie  $\binom{n}{m}$  można zapisać za pomocą funkcji Gamma:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{m! \Gamma(n-m+1)} \quad (5)$$

Uściślając pochodno-cąłkę (4) za pomocą wzoru (5) na rzędy  $(\eta > 0) \in \mathbb{R}$  otrzymuje się pochodno-cąłką Grünwalda-Letnikowa ciągu funkcyjnego dodatnich rzędów:

$$\begin{aligned} &{}_t D_{t_0}^\eta \{f(t)\}_{0...l} = \\ &\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{(dt)^\eta} \sum_{m=0}^l (-1)^m \frac{\Gamma(\eta+1)}{m! \Gamma(\eta-m+1)} \{f_{l-m}(t_m)\} \end{aligned} \quad (6)$$

Pierwsza pochodna ciągu funkcyjnego (3) wyznaczana dla  $l = 1$  odpowiada pochodno-cąłce o rzędzie  $\eta = 1$  (odpowiednik pierwszej pochodnej funkcji  $f(t)$ ):

$$\begin{aligned} {}_t D_{t_0}^1 \{f(t)\}_{0...1} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{f_1(t_0)\} - \{f_0(t_1)\}}{dt} \\ &= \frac{d\{f(t)\}_{0...1}}{dt} = tg\alpha \end{aligned} \quad (7)$$

Na podstawie wzoru (6) pochodno-cąłka dla  $l = 1$  i  $(\eta > 0) \in \mathbb{R}$  wyraża się wzorem:

$${}_t D_{t_0}^\eta \{f(t)\}_{0...1} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{f_1(t_0)\} - \eta \{f_0(t_1)\}}{(dt)^\eta} \quad (8)$$

W równaniu (8) wprowadzono dodatkowe oznaczenie w lewej górnej części notacji Davisa będące wartością  $l$  równania (6), która dla rzędu pochodno-cąłki  $\eta > 0$  jest jednocześnie odpowiednikiem pochodnej dla rzędów całkowitych (4) (1 oznacza pierwszą pochodną, 2 – drugą itd.).

## 1.3. Pochodno-cąłka ujemnych rzędów

Dla  $n < 0$  wyrażenie  $\binom{n}{m}$  ma postać:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{m} &= \frac{-n(-n+1)(-n+2) \dots (-n-m+1)}{m!} = \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma(n+m)}{m! \Gamma(n)} \end{aligned} \quad (9)$$

Uściślając pochodno-cąłkę (4), za pomocą (9), na rzędy  $(-\eta < 0) \in \mathbb{R}$ , to pochodno-cąłkę Grünwalda-Letnikowa ujemnych rzędów ciągu funkcyjnego zapisuje się w postaci:

$${}_t D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{0...l} = \lim_{dt \rightarrow 0} dt^\eta \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(\eta+m)}{m! \Gamma(\eta)} \{f_m(t_{l-m})\} \quad (10)$$

Liczba  $l$  jest dodatkowym oznaczeniem o wartości określającej liczbę iteracji pomniejszonej o 1.

Dla rzędu  $(-\eta = -1)$  i  $l = 0$  (dla ciągu funkcyjnego składającego się z 1 elementu) pochodno-cąłka (10) ma postać:

$$\begin{aligned} {}_{t_1}^0 D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{0...1} &= \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_0(t_0)\} \\ &\equiv \int_{t_0-dt}^{t_0} \{f(t)\}_{0...1} dt \end{aligned} \quad (11)$$

Wartość  $l = 0$  dodatkowego oznaczenia określa, dla  $\eta < 0$ , operację równoznaczną całkowaniu w przedziale całkowania równemu krokwowi całkowania  $dt$ . Pochodno-całka (11) o rzędzie  $(-\eta = -1)$  odpowiada całkowaniu metodą prostokątów ciągu funkcyjnego  $\{f(t)\}_{0...1}$ .

Pochodno-całkę (10) rzędu  $(-\eta = -1)$  ciągu funkcyjnego (3) zapisuje się jako sumę (dodatkowe oznaczenie  $\Sigma$ ) pochodno-całek:

$$\begin{aligned} \sum_{t_l}^{\Sigma} D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{0...l} &= \\ {}_{t_1}^0 D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} &+ {}_{t_2}^0 D_{t_1}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} + \dots \\ &+ {}_{t_{l-1}}^0 D_{t_l}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_l(t_0)\} &+ \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_{l-1}(t_1)\} + \dots \\ &+ \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_0(t_l)\} = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} dt \sum_{m=0}^l \{f_m(t_{l-m})\} &\equiv \int_{t_l-dt}^{t_0} \{f(t)\}_{0...l} dt = \quad (12) \\ \int_{t_1=t_0-dt}^{t_0} \{f_l(t_0)\} dt &+ \int_{t_2=t_1-dt}^{t_1} \{f_{l-1}(t_1)\} dt + \dots \\ &+ \int_{t_l-dt}^{t_l} \{f_0(t_l)\} dt \end{aligned}$$

Postępując tak jak we wzorze (12) w odniesieniu do dowolnych ujemnych rzędów  $(-\eta < 0) \in \mathbb{R}$ , to pochodno-całka (10) ma postać:

$$\begin{aligned} \sum_{t_l}^{\Sigma} D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{0...l} &= {}_{t_1}^0 D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} \\ &+ {}_{t_2}^0 D_{t_1}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} + \dots \\ &+ {}_{t_{l-1}}^0 D_{t_l}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_l(t_0)\} &+ \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_{l-1}(t_1)\} + \dots \\ &+ \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_0(t_l)\} = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \sum_{m=0}^l \{f_m(t_{l-m})\} &\equiv \int_{\tau_{l-(dt)^\eta}^{\tau_0} \{f(t)\}_{0...l} (dt)^\eta \quad (13) \\ &= \int_{\tau_1=\tau_0-(dt)^\eta}^{\tau_0} \{f_l(t_0)\} (dt)^\eta + \\ &\int_{\tau_2=\tau_1-(dt)^\eta}^{\tau_1} \{f_{l-1}(t_1)\} (dt)^\eta \dots + \int_{\tau_l-(dt)^\eta}^{\tau_l} \{f_0(t_l)\} (dt)^\eta \end{aligned}$$

## 2. FIZYCZNA I GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA POCHODNO-CALKI GRÜN WALDA-LETNIKOWA

### 2.1. Interpretacja pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa dodatnich rzędów

Niech ciąg funkcyjny składający się z dwóch elementów:

$$\{v(t)\}_{0...1} = \{v_0(t), v_1(t)\} \quad (14)$$

będzie zapisem pomiarów prędkości poruszającego się punktu wykonanych w dwóch kolejnych chwilach czasu  $t_1$  i  $t_0$  co odstęp czasu  $dt$ , przy czym ostatni pomiar czasu indeksowany jest jako 0.

Niech  $a$  oznacza chwilowe przyspieszenie:

$$a = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{v_1(t_0)\} - \{v_0(t_1)\}}{dt} \quad (15)$$

Przyspieszenie (15) wyznaczane jest na podstawie pomiaru zmiennej prędkości, której wartość jest funkcją przedziału czasu, w którym została zmierzona. Wartość przyspieszenia zależy tym samym od dokładności wyznaczenia chwil początku i końca czasu pomiaru. Ponieważ chwile te określane są na podstawie znajomości wartości przedziału czasu  $dt$ , to dokładność ich wyznaczania, a tym samym pośrednio dokładność wyznaczenia przyspieszenia zależy od dokładności określenia przedziału czasu  $dt$ .

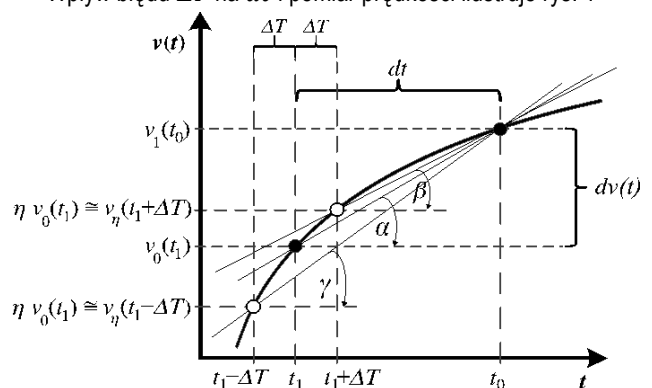
Oznacza się przez  $\Delta T$  błąd pomiaru przedziału czasu  $dt$ . Interpretuje się go, jako błąd bezwzględny i dodaje ze znakiem do wartości  $dt$ . Wzór na przyspieszenie uwzględniający  $\Delta T$  ma postać:

$$a_{\Delta T} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{v_1(t_0)\} - \{v_0(t_1 + (\pm \Delta T))\}}{dt + (\pm \Delta T)} \quad (16)$$

Oznacza się przez  $(dt)^\eta$  zmianę długości przedziału czasu  $dt$  uwzględniającą błąd  $\Delta T$ :

$$(dt)^\eta = dt + (\pm \Delta T) \quad (17)$$

Wpływ błędu  $\Delta T$  na  $dt$  i pomiar prędkości ilustruje rys. 1



Rys. 1. Geometryczna interpretacja pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa dodatnich rzędów ciągu funkcyjnego

Wartości prędkości w chwilach  $t_1 + \Delta T$  i  $t_1 - \Delta T$  nie są znane, gdyż pomiary wykonuje się co przedział czasu  $dt$ . Z tego względu nie można określić dokładnej wartości przyspieszenia uwzględniającego błąd  $\Delta T$ . Zauważmy podobieństwo wzorów (15) i (7) oraz (16) i (8). Z podobieństw tych wynika:

$$\{v_0(t_1 + (\pm \Delta T))\} = \eta \{v_0(t_1)\} \approx \{v_\eta(t_1 + (\pm \Delta T))\} \quad (18)$$

gdzie  $\eta$  jest parametrem i jednocześnie rzędem pochodno-całki estymującym wartość prędkości  $v_\eta$  w chwili  $t_1 + (\pm \Delta T)$  i wyznaczanym z zależności (17) jako:

$$\eta = \log_{dt} (dt + (\pm \Delta T)) \quad (19)$$

Podstawiając (17) do (16) oraz uwzględniając (18) otrzymuje się wzór na przyspieszenie chwilowe odpowiadający pochodno-całce dodatnich niecałkowitych rzędów (8):

$$\begin{aligned} a_{\Delta T} &= \left\{ \begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{v_1(t_0)\} - \{v_0(t_1 + |\Delta T|)\}}{(dt)^\eta} &= tg\beta \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{v_1(t_0)\} - \{v_0(t_1 - |\Delta T|)\}}{(dt)^\eta} &= tg\gamma \end{aligned} \right\} \quad (20) \\ &\approx \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\{v_1(t_0)\} - \eta \{v_0(t_1)\}}{(dt)^\eta} \text{ dla } \begin{cases} \eta > 1 \text{ i } v_0(t_1) < v_1 \\ \eta < 1 \text{ i } v_0(t_1) > v_1 \end{cases} \\ &\equiv {}_{t_1}^1 D_{t_0}^\eta \{v(t)\}_{0...1} \end{aligned}$$

Analizując postępowanie pokazane w rozdziałach 1.2 i 2.1 można stwierdzić:

Pochodno-całkę Grünwalda-Letnikowa dodatniego rzędu (6) ciągu funkcyjnego (14) opisującego prędkość poruszającego się punktu, interpretuje się jako przyspieszenie tego punktu wyznaczone na podstawie pomiarów jego prędkości odczytywanych co prze-

dział czasu  $dt$  z błędem pomiaru przedziału czasu  $\Delta T$ , gdzie rząd pochodno-calki Grünwalda-Letnikowa związany jest z  $dt$  i  $\Delta T$  za pomocą zależności (19).

### 2.2. Interpretacja pochodno-calki Grünwalda-Letnikowa ujemnych rzędów

Niech ciąg funkcyjny:

$$\{v(t)\}_{0\dots l} = \{v_0(t_l), \dots, v_{l-1}(t_1), v_l(t_0)\} \quad (21)$$

będzie zapisem kolejnych pomiarów prędkości wykonanych w chwilach czasu od  $t_l$  do  $t_0$  co odstęp czasu  $dt$ . Niech  $S$  oznacza drogę przebytą przez ten punkt wyznaczoną z fizycznej interpretacji całki (całkowanie metodą prostokątów):

$$S = \int_{t_l-dt}^{t_0} \{v(t)\}_{0\dots l} dt = \lim_{dt \rightarrow 0} dt \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\} \quad (22)$$

Wzór na drogę (22) odpowiada pochodno-calce rzędu  $(-\eta = -1)$  (12). Droga (22) wyznaczana jest na podstawie pomiaru prędkości, której wartość zależy od chwili czasu, w którym została zmierzona (traktując czas jak zmienną niezależną). Ponieważ chwila ta jest określana na podstawie wielokrotności przedziału czasu  $dt$ , to dokładność wyznaczania chwili czasu pomiaru, a tym samym dokładność wyznaczenia drogi zależy od dokładności określenia  $dt$ . Oznacza się przez  $\Delta T$  błąd pomiaru przedziału czasu  $dt$ . Przyjęto, że błąd  $\Delta T$  jest stały co do znaku i wartości dla każdego  $m$  elementu ciągu  $\{v_m(t)\}_{0\dots l}$  i interpretuje się go jako błąd bezwzględny dodając ze znakiem do wartości  $dt$ . Uwzględniając  $\Delta T$  we wzorze (22):

$$S_{\Delta T} = \lim_{dt \rightarrow 0} (dt + (\pm \Delta T)) \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m}(\pm \Delta T))\} = \int_{\tau_1=t_0-(dt \pm \Delta T)}^{t_0} \{v_l(t_0)\}(dt \pm \Delta T) + \int_{\tau_2=\tau_1-(dt \pm \Delta T)}^{\tau_1} \{v_{l-1}(t_1)\}(dt \pm \Delta T) \dots + \int_{\tau_l-(dt \pm \Delta T)}^{\tau_{l-1}} \{v_0(t_l)\}(dt \pm \Delta T) \quad (23)$$

Ponieważ wyznaczenie drogi odbywa się za pomocą całkowania metodą prostokątów, dla której wartość funkcji w przedziale kroku całkowania jest stała, to przyjmuje się, że:

$$v_m(t_{l-m}(\pm \Delta T)) = v_m(t_{l-m}) \quad (24)$$

Oznacza się przez  $(dt)^\eta$  pojedynczy przedział czasu pomiaru (tożsamy z krokiem całkowania) uwzględniający błąd  $\Delta T$  jak we wzorze (17). Uwzględniając (24) oraz (17), to wzór (23) przyjmuje postać:

$$S_{\Delta T} = \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\} \equiv \sum_{t_l}^D D_{t_0}^{-\eta} \{v(t)\}_{0\dots l} \quad (25)$$

Droga opisana wzorem (25) odpowiada pochodno-calce Grünwalda-Letnikowa ujemnego rzędu (13). Największą dokładność obliczeń drogi uzyska się, gdy liczba dróg elementarnych w badanym przedziale czasu będzie dążyła do nieskończoności ( $l \rightarrow \infty$ ) oraz gdy podział czasu na odcinki elementarne będzie dążył do 0 ( $dt \rightarrow 0$ ). W rzeczywistych pomiarach zarówno liczba dróg elementarnych jak i podział czasu są wartościami skończonymi, stąd przyjmuje się założenia:

$$0 < dt < 1 \mid \Delta T < dt \quad (26)$$

Traktując błąd  $\Delta T$  jako maksymalny błąd bezwzględny, to uwzględniając jego znak można określić maksymalną i minimalną drogę przebytą przez punkt. Dla  $\Delta T < 0$  wyznaczana będzie mini-

malna droga  $S_{min}$ , dla  $\Delta T > 0$  wyznaczana będzie droga maksymalna  $S_{max}$ , a dla  $\Delta T = 0$  wyznaczana będzie droga  $S_0$  z błędem równym 0:

$$S_{min} = \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ \Delta T < 0}} (dt - \Delta T) \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\} \quad (27)$$

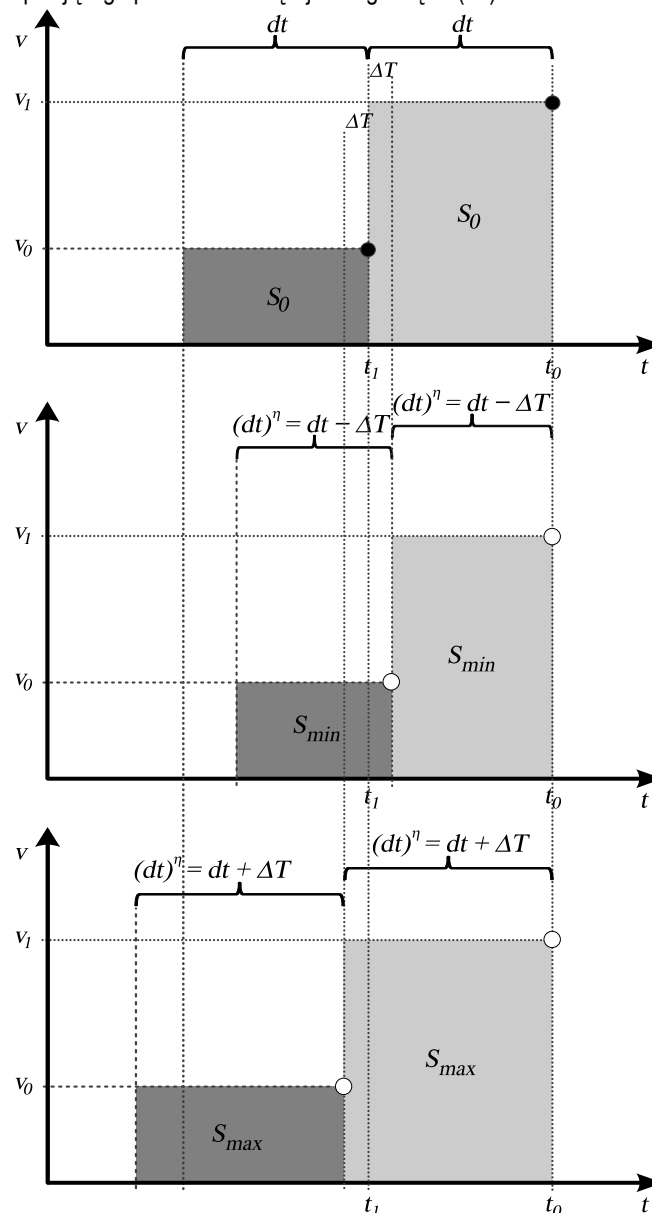
$$= \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ \eta > 1}} (dt)^\eta \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\}$$

$$S_{max} = \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ \Delta T > 0}} (dt + \Delta T) \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\} \quad (28)$$

$$= \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ \eta < 1}} (dt)^\eta \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\}$$

$$S_0 = \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ \Delta T = 0 \\ \eta = 1}} dt \sum_{m=0}^l \{v_m(t_{l-m})\} \quad (29)$$

Na rys. 2 przedstawiono geometryczną interpretację równania opisującego pochodno-calkę ujemnego rzędu (25).



Rys. 2. Geometryczna interpretacja pochodno-calki Grünwalda-Letnikowa ujemnego rzędu

Na podstawie analizy wzorów pokazanych w rozdziałach 1.3 i 2.2 można stwierdzić:

Pochodno-całkę Grünwalda-Letnikowa ujemnego rzędu (10) ciągu funkcyjnego (21) opisującego prędkość poruszającego się punktu interpretuje się jako drogę przebytą przez ten punkt wyznaczoną na podstawie pomiarów prędkości odczytywanych co przedział czasu  $dt$  z błędem pomiaru tego przedziału  $\Delta T$ , gdzie rząd pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa związany jest z  $dt$  i  $\Delta T$  zależnością (17).

## PODSUMOWANIE

W przypadku pomiarów pośrednich, które są funkcją  $g(f(t))$  będącą pochodną lub całką wielkości mierzonej  $f(t)$  zależnej od zmiennej niezależnej  $t$  i odczytywanej co  $dt$ , to rząd pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa funkcji  $f(t)$  związany jest bezpośrednio z błędem  $\Delta T$  odczytu przedziału  $dt$ . Znajomość zależności między  $\Delta T$ , a  $dt$  pozwala na interpretację pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa nawiązującą do klasycznej interpretacji pochodnej i całki, jako pomiarów pośrednich przyspieszenia i drogi poruszającego się punktu. W przypadku takiej interpretacji oraz z punktu widzenia fizyki pomiarów, można stwierdzić, że niecałkowity rząd pochodno-całki Grünwalda-Letnikowa związany jest zależnością (19) z błędem odcinkowego pomiaru czasu w pomiarach pośrednich drogi i przyspieszenia.

## BIBLIOGRAFIA

1. Butkovskii A.G. et al. *Fractional Integro-Differential Calculus and Its Control-theoretical Application. I. Mathematical Fundamentals and the Problem of Interpretation*, Automation and Remote Control, Vol. 74, No. 4 (2013)
2. Das S. *Functional Fractional Calculus*, Springer (2011).
3. Gómez – Aguilar J.F. et al. *A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response*, Revista Mexicana de Física 60, 32-38, January-February (2014).
1. Heymans N., Podlubny I. *Physical interpretation of initial condition for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives*, Rheologica Acta, Vol. 45, Issue 5, pp 765-771 (2006)
2. Nishimoto K. (Ed.) *Fractional Calculus and Its Applications*, Nihon University, Koriyama (1990)
3. Podlubny I. *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 5, No. 4 (2002)
4. Rutman R.S. *On physical interpretation of fractional integration and differentiation*, Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 105, No. 3 (1995)

## PHYSICAL AND GEOMETRICAL INTERPRETATION OF DIFFERINTEGRAL

### Abstract

The paper illustrates relationship between fractional  $n$  order of Grünwald-Letnikov differintegral  ${}_{t_0}D_{t_0}^n\{f(t)\}$  and increment  $dt$  of variable  $t$  and

*proposes a geometrical and physical interpretation of the differintegral.*

Autor:

dr inż. **Radosław Cioć** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki, Zakład Automatyki i Inżynierii Pomiarowej, 26-600 Radom, ul. Malczewskiego 29, e-mail: r.cioc@uthrad.pl