

Obliczanie stanów granicznych stropów gęstożebrowych w funkcji obciążenia i rozpiętości

Mgr inż. Jerzy Piotr Bednarek

1. Wprowadzenie

Obliczanie wytrzymałości elementów żelbetowych i struconobetonowych (w tym stropów gęstożebrowych) w funkcji obciążenia i rozpiętości jest powszechnie znane i przedstawiane, natomiast obliczanie ich stanów granicznych jest pierwszą próbą podjętą w mojej pracy doktorskiej „Badanie stanów granicznych wybranych stropów gęstożebrowych żelbetowych i sprężonych w funkcji obciążenia i rozpiętości oraz modelowanie optymalnego przekroju”.

Praca ta została ukończona, ale nie obroniona. Niniejszy artykuł jest przygotowanym na potrzeby tej publikacji fragmentem wspomnianej wyżej pracy.

2. Podstawa opracowania i założenia

Podstawą opracowania są:

- Polska Norma PN-B-03264/1999 opracowana w oparciu o poprzednią normę PN-84B-03264 i Eurokod 2;
- praca zbiorowa pod przewodnictwem M. Knauffa w ramach projektu badawczego KBN „Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2”, Warszawa, 1997;
- praca zbiorowa pod redakcją M. Kamińskiego „Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.

W punkcie 9.2 aktualnej normy czytamy: „stropy gęstożebrowe z wypełnieniem sztywnym i trwałym, z żebrami rozdzielczymi o rozstawie nie większym niż 4,0 m i płytą górną o grubości co najmniej 3 cm uważa się za płyty pełne”.

Mimo tego w mojej pracy sprawdziłem stropy na ścinanie i okazało się, że w niektórych stropach żelbetowych wartości związane z nośnością V_{Rd3} (dla zbrojenia poprzecznego $\varnothing 4,5$ co 10 cm) mogą być miarodajne przy małych rozpiętościach. Sprawdziłem również, że w stropach sprężonych bez zbrojenia poprzecznego ścinanie związane z nośnością V_{Rd1} może być pominięte jako niemiarodajne.

W stanach granicznych (SG) konstrukcji żelbetowych i sprężonych obowiązują normowe założenia.

Przyjmujemy ponadto, że stropy są swobodnie podparte i równomiernie obciążone w sposób ciągły. W przypadku obciążeń skupionych, np. w postaci ścianek działowych, przyjmujemy dodatkowo zastępcze obciążenie ciągłe.

2.1. Stropy żelbetowe

W stanach granicznych nośności (SGN) obliczamy nośność na zginanie M_{Rd} , na ścinanie V_{Rd1} , V_{Rd2} i V_{Rd3} jako ewentualnie miarodajne, korzystając z danych geometrycznych badanego stropu, klasy betonu i wariantów zbrojenia niekoniecznie typowego, ale spełniającego wymagania aktualnej normy, między innymi dotyczące dopuszczalnej grubości otuliny. W stanach granicznych użyteczności (SGU) sprawdzamy natomiast jako ewentualnie miarodajne: możliwość pojawienia się rys prostopadłych i ugięcie. Sprawdziłem obliczeniowo, że możemy pominąć możliwość pojawienia się rys ukośnych jako zbyt małą.

2.2. Stropy sprężone

W SGN sprawdzamy nośności tych stropów na zginanie M_{Rd} i na ścinanie V_{Rd} natomiast w SGU sprawdzamy możliwość pojawienia się rys prostopadłych, możliwości pojawienia się rys ukośnych i ugięcie.

3. Wzory do obliczeń stanów granicznych

3.1. Stropy żelbetowe (SGN)

Obliczamy je na podstawie następujących wzorów zamieszczonych w wyżej wymienionej pracy M. Knauffa:

- przy zginaniu dla przekrojów teowych (każdy z badanych stropów spełnia warunek): $x < h_f$

$$x = A_{sl} f_{yd} / b_{eff} \alpha f_{cd} \quad (1)$$

$$\omega = A_{sl} f_{yd} / b_{eff} d \alpha f_{cd} = x/d \rightarrow \mu_{cs} \quad (z\ tablic\ prof.\ Marii\ Kamińskiej) \quad (2)$$

$$M_{Rd} = \mu_{cs} b_{eff} d^2 \alpha f_{cd} \quad (3)$$

przy czym $M_{Rd} = M_{Sd}$, a dla naszego przypadku

$$M_{Sd} = q l_{eff}^2 / 8 \quad (4)$$

- natomiast przy ścinaniu mamy wg normy trzy przypadki:
 - bez zbrojenia poprzecznego:

$$V_{Rd1} = k \tau_{Rd} (1,2 + 40 \rho_l) b_w d \quad (5)$$

– z uwzględnieniem krzyżulców betonowych:

$$V_{Rd2} = b_w z v f_{cd} / (ctg \theta + tg \theta) \quad (6)$$

– ze zbrojeniem poprzecznym:

$$V_{Rd3} = A_{sw} z f_{ywd} ctg \theta / s \quad (7)$$

każda z tych nośności osiąga graniczne wartości, dla naszego przypadku przy:

$$V_{Rd} = V_{Sd} = 0,5 q l_{eff} \quad (8)$$

3.2. Stropy żelbetowe (SGU)

Sprawdzamy je na zarysowanie i ugięcie, przyjmując granicznie dopuszczalne wartości, jakie mogą osiągnąć na podstawie wzorów normowych:

• dla rys prostopadłych:

$$w_k = \beta s_m \varepsilon_{sm} = \beta (50 + 0,25 k_1 k_2 \Phi / \rho_r) [1 - \beta_1 \beta_2 (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2] \sigma_s : E_s = w_{im} \quad (9)$$

gdzie:

$\rho_r = A_s / A_{ct,eff}$ – efektywny stopień zbrojenia,

$A_{ct,eff} = b_w 2,5 (h-d)$ – efektywna powierzchnia przekroju rozciąganego, (10)

k_1 – współczynnik zależny od właściwości przyczepnościowych prętów,

k_2 – współczynnik zależny od rozkładu odkształceń rozciąganych,

β – współczynnik określający stosunek obliczeniowej szerokości rysy do jej szerokości średniej,

Φ – średnica pręta, w przypadku wielu różnych prętów średnica zastępcza,

$\sigma_s = M_{Sd} / \zeta A_s d$ (naprężenie w zbrojeniu rozciągającym, obliczone dla przekroju przez rysę),

gdzie z kolei:

ζ – współczynnik zależny od p_1 (wg załącznika D do normy),
 σ_{sr} – naprężenie w zbrojeniu rozciągającym, obliczone dla przekroju przez rysę dla obciążenia powodującego zarysowanie.

Korzystamy przy tym z zależności, że $\sigma_{sr} / \sigma_s = M_{cr} / M_{Sd,r}$ gdzie $M_{cr} = W_c f_{ctm}$:

• dla rys ukośnych:

$$w_k = 4 \tau^2 \lambda / \rho_w E_s f_{ck} \quad (11)$$

gdzie:

$$\tau = V_{Sd} / b_w d \quad (12)$$

$$\lambda = \beta_1 \Phi / 3 \rho_{w3} \quad (13)$$

• dla ugięcia elementu zarysowanego:

$$a_{/\infty, to/} = \alpha_k M_{Sd} l_{eff}^2 : B_{/\infty, to/} = a_{lim} \quad (14)$$

gdzie sztywność:

$$B_{/\infty, to/} = E_{c,eff} I_{II} : [1 - \beta_1 \beta_2 (\sigma_{sr} : \sigma_s)^2 (1 - I_{II} / I_I)] \quad (15)$$

z kolei z załącznika E2 do normy mamy, że :

$E_{c,eff} = E_{cm} : (1 + \Phi_{/\infty, to/})$, gdzie $\Phi_{/\infty, to/}$ z tablicy 3, I_I i I_{II} – momenty bezwładności dla fazy I (przekroju niezarysowanego) i fazy II (przekroju w pełni zarysowanego).

Momenty te obliczamy jak poniżej (wg ww. pracy M. Knauffa):

Faza I

$$h/b_w d^2 = H^3/12 + H(0,5H - \xi)^2 + \alpha_1 (1 - \xi)^2 + FT^3/12 + FT(\xi - 0,5)^2 \quad (16)$$

gdzie:

$$\xi = (0,5H^2 + \alpha_1 + \Delta S) : (H + \alpha_1 + \Delta A) \quad (17)$$

$$H = h/d, \quad F = (b_{eff} - b_w) : b_w, \quad T = h_1/d,$$

$$\Delta S = 0,5 FT^2, \quad \Delta A = FT, \quad \alpha_1 = \alpha_s A_{st} / b_w d, \quad \alpha_s = E_s / E_{c,eff}$$

Faza II

Sprawdzamy, czy przekrój jest pozornie teowy z warunku:

$$\xi_1 = \sqrt{A_1^2 + 2A_2} - A_1 < T \text{ (przekrój pozornie teowy)} \quad (18)$$

$$> T \text{ (przekrój teowy) ,}$$

gdzie:

$$A_1 = \alpha_1 + FT, \quad A_2 = \alpha_1$$

Dla przekroju pozornie teowego mamy:

$$\alpha_1 = \alpha_s A_{st} / b_{eff} d = A_1 = A_2 \rightarrow \xi_2 = \sqrt{A_1^2 + 2A_2} - A_1 \quad (19)$$

wtedy

$$I_{II} / b_w d^3 = \xi_2^3 / 3 + \alpha_1 (1 - \xi_2)^2 \quad (20)$$

Natomiast dla przekroju teowego:

$$I_{II} / b_w d^3 = \xi_1^3 / 3 + \alpha_1 (1 - \xi_1)^2 + FT^3 / 12 + FT(\xi_1 - 0,5T)^2 \quad (21)$$

Przy obliczaniu ugięcia musimy pamiętać, że dopuszczalne ugięcie a_{lim} jest inne dla różnych zakresów rozpiętości l_{eff} według tabeli 10 w normie.

3.3. Stropy sprężone

SGN tych stropów sprawdzamy podobnie jak stropów żelbetowych, lecz korzystamy z nieco innych wzorów, a mianowicie:

• dla zginania:

$$A_p f_{pd} / b_{eff} \alpha f_{cd} \quad (22)$$

$$\omega = x/d \rightarrow \mu_{cs} \text{ (z tablic prof. M. Kamińskiej)}$$

$$M_{Rd} = \mu_{cs} b_{eff} d^2 \alpha f_{cd} = M_{Sd} \quad (3)$$

- dla ścinania bez zbrojenia poprzecznego:

$$V_{Rd1} = (k \tau_{Rd} 1,2+0,15 \sigma_{cp}) b_w d = V_{Sd} \quad (23)$$

gdzie:

$$\tau_{Rd} \text{ z tablic zależne od } f_{ck}$$

$$\sigma_{cp} = N_{Sd}/A_{cr}$$

$$N_{Sd} = N_{pd} = F_{pd} = 0,65 F_{pk} \text{ gdyż } \sigma_{pmt, lim} = 0,65 f_{pk} \quad (24)$$

gdzie z kolei:

$\sigma_{pmt, lim}$ – to graniczna wartość w ciągnach sprężających po uwzględnieniu strat całkowitych wg normy.

W SGU natomiast sprawdzamy możliwość pojawienia się rys prostopadłych, ukośnych i ugięcia:

- możliwość pojawienia się rys prostopadłych w konstrukcjach sprężonych jest w granicznym przypadku, gdy:

$$M_{Sd} = M_{cr} = (\sigma_{cp} + f_{ctm}) W_{cs} \quad (25)$$

przy czym:

$$W_{cs} = W_c + \alpha A_p z_{cp} \quad (26)$$

gdzie :

$$\alpha = E_s/E_{cm}$$

$$z_{cp} = 0,5 h - a,$$

$$\sigma_{cp} = N_{pd}/A_{cs} + N_{pd} z_{cp}/W_{cs} \quad (27)$$

- możliwość pojawienia się rys ukośnych zachodzi wtedy, gdy spełniony jest graniczny warunek:

$$\sigma_{t, max} = f_{ctm} \quad (28)$$

gdzie:

$$\sigma_{t, max} = (\sigma_x + \sigma_y) : 2 - \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y) : 2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (29)$$

$$\tau_{xy} = V_{Sd} S_{co}/I_{cs} b_w \quad (30)$$

- przy sprawdzaniu ugięcia mamy do czynienia z elementem niezarysowanym, a więc:

$$a_{/\infty, to/} = a_{lim} = \alpha_k M_{Sd} l_{eff}^2/B_{/\infty, to/} - \alpha_p N_{pd} z_{cp} l_{eff}^2/E_{c, eff} I_{cs} \quad (31)$$

gdzie:

$$B_{/\infty, to/} = E_{c, eff} I_{cs} \quad (32)$$

4. Wzory do obliczeń

Najłatwiej sprawdzalnym i transparentnym sposobem na przedstawienie SG przedmiotowych stropów jest obliczenie zależności między obciążeniem q (w przypadku ugięcia q_d) i rozpiętością l_{eff} i sporządzenie nomogramów.

W tym celu przekształciłem autorsko (co zwłaszcza w SGU jest operacją nieco skomplikowaną) niektóre z powyższych

wzorów, aby otrzymać je w postaci funkcji $q - l_{eff}$ (lub $q_d - l_{eff}$ w przypadku ugięcia) dla wszystkich rozpatrywanych SG. Efekt ten uzyskałem w SGN, przyrównując nośności obliczeniowe przekroju na zginanie i ścinanie do odpowiadających im wielkości statycznych wywołanych obciążeniem obliczeniowym.

W SGU w tym samym celu przyrównałem wielkości (zarysowanie oraz ugięcie) do odpowiadających im wielkości granicznych.

4.1. Stropy żelbetowe

SGN

Dla zginania z wzorów (3) i (4) oraz granicznego związku $M_{Rd} = M_{Sd}$ otrzymamy:

$$q = 8 \mu_{cs} d^2 \alpha f_{cd}/l_{eff} [kN/m^2] \quad (33)$$

Podobnie dla ścinania otrzymamy:

- dla nośności $V_{Rd1} = V_{Sd}$ z wzorów (5) i (8):

$$q_1 = 2 k \tau_{Rd} (1,2+40\rho_l) b_w d : b_{eff} l_{eff} \quad (34)$$

- dla nośności $V_{Rd2} = V_{Sd}$ z wzorów (6) i (8):

$$q_2 = 2 b_w z v f_{cd} : b_{eff} l_{eff} (ctg\theta + tg\theta) \quad (35)$$

- dla nośności $V_{Rd3} = V_{Sd}$ z wzorów (7) i (8):

$$q_3 = 2 A_{sw} z f_{ywd} ctg\theta : s b_{eff} l_{eff} \quad (36)$$

Jak wynika z moich licznych obliczeń, miarodajny jest związek (36).

SGU

Dla rys prostopadłych przy $w_k = w_{lim}$ z m.in. wzorów (9) i (10) mamy:

$$q^2 l_{eff}^2 - C1 q l_{eff}^2 - C2 = 0, \text{ dla } q > 0 \quad (37)$$

gdzie:

$$C1 = 8 w_k \zeta A_s E_s d : \beta s_{rm}, \text{ przy czym } w_k \text{ w [mm]} \quad (38)$$

$$C2 = \beta_1 \beta_2 (8 M_{cr})^2 \quad (39)$$

Dla rys ukośnych przy $w_k = w_{lim}$ z wzorów (11), (12) i (13) mamy:

$$q = C3 : b_{eff} l_{eff} \quad (40)$$

gdzie:

$$C3 = 4 b_w d \sqrt{w_k \rho_w E_s f_{ck} : \lambda}, \text{ przy czym } w_k \text{ w [m]} \quad (41)$$

Dla ugięcia elementu zarysowanego z wzorów (14) i (15):

$$q_d^2 l_{eff}^4 - f'' q_d^2 l_{eff}^2 - g'' = 0, \text{ dla } q_d > 0 \quad (42)$$

gdzie: f'' w trzech wariantach:

$$C4 = 0,005E_{c,eff} I_{II} : 0,125^2, \text{ dla } a_{lim} = 0,005l_{eff}, \text{ przy } l_{eff} \leq 6,0 \text{ m} \quad (43)$$

$$C4 = 0,03E_{c,eff} I_{II} : 0,125^2 l_{eff}, \text{ dla } a_{lim} = 0,03 \text{ m}, \text{ przy } 6,0 \text{ m} < l_{eff} \leq 7,5 \text{ m} \quad (44)$$

$$C4 = 0,004E_{c,eff} I_{II} : 0,125^2, \text{ dla } a_{lim} = 0,02l_{eff}, \text{ przy } l_{eff} > 7,5 \text{ m} \quad (45)$$

$$C5 = 64 \beta_{II} \beta_2 M_{cr}^2 (1 - I_{II}/I_1) \quad (46)$$

4.2. Stropy sprężone

SGN

Dla zginania obowiązuje ten sam wzór (33) jak w stropach żelbetowych.

Dla ścinania po przekształceniu wzoru (23) dla $V_{Sd} = V_{Rd1}$ otrzymamy:

$$q = 8 V_{Rd1} : b_{eff} l_{eff} = 8(1,2 k \tau_{Rd} + 0,15 \sigma_{cp}) b_w d : b_{eff} l_{eff} \quad (47)$$

SGU

Dla możliwości pojawienia się rys prostopadłych z warunku $M_{cr} = M_{Rd}$ oraz po przekształceniu wzoru (25) mamy:

$$q = 8 M_{cr} : b_{eff} l_{eff}^2 \quad (48)$$

Dla możliwości pojawienia się rys ukośnych przy $\sigma_{t,max} = f_{ctm}$ oraz z wzorów (28), (29) i (30) będzie:

$$q = C6 : b_{eff} l_{eff} \quad (49)$$

gdzie:

$$C6 = I \{ 8 I_{cs} b_w \sqrt{(0,5\sigma_{cp} - f_{ctm})^2 - 0,25\sigma_{cp}^2} : l_{eff} S_{co} \} I \quad (50)$$

jako wartość bezwzględna!

Dla ugięcia z wzorów (31) i (32) przy $a_{/∞, to/} = a_{lim}$ otrzymamy:

$$q_d = (C7 l_{eff}^2 + C8) : C9 b_{eff} l_{eff}^4 \quad (51)$$

gdzie:

$$C7 = 0,125 N_{pd} z_{cp}, N_{pd} = 0,65 F_{pk} \quad (52)$$

$$C8 = a_{lim} E_{c,eff} I_{cs} \quad (53)$$

$$C9 = 0,125$$

przy czym: a_{lim} przyjmuje wartości jak dla warunków określonych we wzorach (43), (44) i (45).

5. Podsumowanie

- Wszystkie oznaczenia we wzorach od (33) do (53), poza q , q_d i l_{eff} są wielkościami liczbowymi z zachowaniem odpowiednich mian.
- Użytkowa wartość niniejszego artykułu polega na tym, że można dzięki podanej metodzie obliczeń sprawdzić istniejące stropy gęstożebrowe i projektować nowe.

Niniejsze opracowanie służy do uproszczonego obliczania gęstożebrowych stropów żelbetowych i sprężonych oraz sporządzania wykresów dla SG w funkcji obciążenia i rozpiętości. Bez powyższych wzorów byłoby to niezwykle skomplikowane.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bednarek J. P., Czkwianianc A., Żelbetowe stropy gęstożebrowe w świetle PN-B-03264:1999, Przegląd Budowlany 7-8/2001
- [2] Kamińska M., Przykłady projektowania konstrukcji według Eurokodów, praca zbiorowa, rozdział 3 poz. 3.1.1., Łódź, 2016
- [3] Knauff M., Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2, praca zbiorowa, Tom 2, Projekt badawczy KBN, Warszawa, 1997
- [4] Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2, praca zbiorowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996

Recenzenci współpracujący z miesięcznikiem „Przegląd Budowlany”

prof. dr hab. inż. Marian Abramowicz, prof. dr hab. inż. Tadeusz Biliński,
 prof. dr hab. inż. Jan Bień, prof. dr hab. inż. Wiesław Buczkowski,
 dr hab. inż. Tomasz Z. Błaszczynski, prof. dr hab. inż. Kazimierz Furtak,
 dr inż. Maciej Gruszczyński, dr hab. inż. Wiesława Głodkowska, dr inż. Robert Geryło,
 prof. dr hab. inż. Barbara Goszczyńska, prof. dr hab. inż. Kazimierz Gwizdała,
 dr hab. inż. Bożena Hoła, dr inż. Piotr Ignatowski, prof. dr hab. inż. Józef Jasiczak,
 prof. dr hab. inż. Mieczysław Kuczma, dr inż. Kazimierz Konieczny, dr inż. Paweł A. Król,
 dr hab. inż. Paweł Lewiński, dr hab. inż. Wiesław Ligęza,
 dr hab. inż. Roman Marcinkowski, prof. dr hab. inż. Bogdan Nazarewicz,
 dr hab. inż. Maciej Niedostatkiwicz, prof. dr hab. inż. Piotr Noakowski,
 prof. dr inż. Andrzej Nowak, dr hab. inż. Beata Nowogońska, prof. dr hab. Janusz Olejnik,
 prof. dr hab. inż. arch. Janusz Rębielak, prof. dr hab. inż. Leonard Runkiewicz,
 doc. dr inż. Wojciech Roszak, dr hab. inż. Krzysztof Schabowicz,
 mgr inż. Jan Sieczkowski, dr hab. inż. Bohdan Stawiski, dr hab. inż. Maciej Szumigała,
 dr inż. Anna Szymczak-Graczyk, prof. dr hab. inż. Adam Zybura.