

TRAJEKTORIE KRYTYCZNEGO NAPRĘŻENIA ŚCINANIA WEDŁUG HIPOTEZY WYŁĘŻENIA COULOMBA-MOHRA

Streszczenie

W artykule przedstawiono sformułowanie zagadnienia wyznaczenia trajektorii krytycznego naprężenia ścinania zgodnego z klasyczną hipotezą Coulomba-Mohra (CM) w odniesieniu do zagadnień płaskich. W zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego otrzymano sformułowanie dla granicznych przypadków hipotezy Treski oraz Galileusza-Rankine'a. Zagadnienie wyznaczania trajektorii sprowadza się do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych definiujących rodziny trajektorii. Badane kierunki krytycznego ścinania zgodne z zastępczym naprężeniem ścinania według hipotezy CM są obrócone względem kierunków naprężeń głównych jak również kierunków maksymalnego ścinania. Uzyskane trajektorie przydatne są w jakościowym oszacowaniu kierunków początkowego ścinania albo pęknięcia w materiałach i w projektowaniu elementów konstrukcji.

WSTĘP

W wielu materiałach stosowanych w budownictwie takich jak: metale, betony, grunty, skały do szacowania wyłężenia może być stosowana klasyczna hipoteza Coulomba-Mohra (CM). Definicja tej hipotezy wytrzymałościowej zawiera dwa parametry materiałowe, przy czym najczęściej stosowanymi są kohezja i kąt tarcia wewnętrznego [2]. Pozwala ona na dość szeroki zakres stosowalności, zaś w przypadkach granicznych kąta tarcia wewnętrznego hipoteza CM redukuje się do kryteriów Treski (T) albo Galileusza-Rankine'a (GR), czyli odpowiednio maksymalnego ścinania albo maksymalnego naprężenia głównego. Warunek wyłężenia może być traktowany jako końcowy stan sprężysty, po przekroczeniu którego następuje uplastycznienie materiału. Plastyczne płynięcie (również pęknięcie) oparte na stowarzyszonym prawie płynięcia w początkowej fazie uplastycznienia jest w dużej mierze zgodne z trajektoriami charakterystycznych naprężeń wg wymienionych hipotez [1, 2, 3].

W pracy rozpatrujemy liniowo sprężyste zagadnienia płaskie z materiałów izotropowych w celu wyznaczenia trajektorii charakterystycznych naprężeń związanych z końcowym stanem sprężystym albo wyłężeniem zgodnie z hipotezą CM, T lub GR. W tym celu formułujemy zagadnienie na kierunki krytycznego naprężenia ścinania dla warunku CM i wyprowadzamy równania różniczkowe na poszukiwane trajektorie. Dalej rozpatrujemy jednorodnie tarcze (w szczególności belki) w celu ilustracji zagadnienia wyznaczenia trajektorii naprężenia krytycznego wg założonych hipotez. Znalezienie charakterystycznych naprężeń jest zadaniem algebraicznym, natomiast znalezienie kierunków w obszarze zadania sprowadza się w większości przypadków do numerycznego całkowania nieliniowych równań różniczkowych z zadanymi warunkami początkowymi. Należy podkreślić, że zagadnienie jest dość złożone ze względu na różnego rodzaju osobliwości i trudno go zalgorytmizować [4]. Z reguły programy numeryczne bazujące na metodzie elementów skończonych zawierają tylko możliwość znajdowania wartości własnych stanu naprężenia, zaś kierunki własne są znajdowane algebraicznie tylko w punktach całkowania. Nie otrzymuje się wobec tego trajektorii naprężeń charakterystycznych. Stosując program Mathematica [5] do obliczeń symbolicznych i numerycznych wyznaczamy trajektorie pól naprężenia krytycznego ścinania w wybranych przykładach belek i tarcz w płaskim stanie naprężenia bądź odkształcenia.

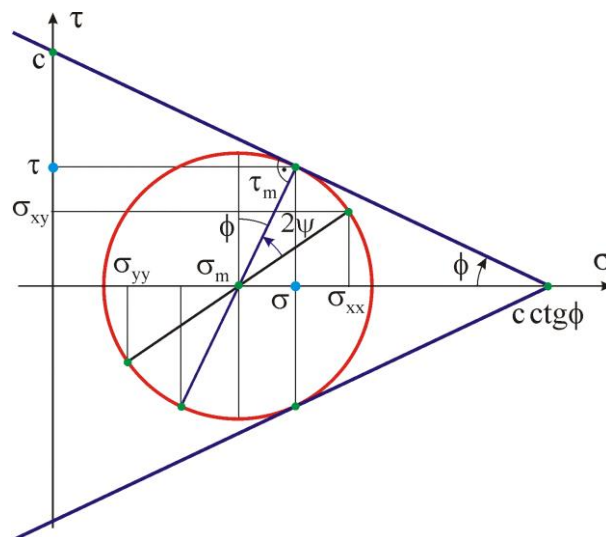
1. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE TRAJEKTORII

1.1. Kryterium wyłężenia w zagadnieniach płaskich

Hipotezę CM modelującą stan graniczny w ośrodkach sypkich kalibruje się dwoma parametrami materiałowymi [2]. W tym celu przeprowadza się dwa eksperymenty przy różnych stanach naprężenia, a następnie dla każdego nich określa się maksymalne naprężenie ścinające i związane z nim naprężenie normalne wykorzystując konstrukcję kół Mohra, **Rys.1**. Wykreślając styczną do uzyskanych największych kół Mohra otrzymujemy prostą, która może być zapisana za pomocą dwóch parametrów $c \geq 0$ i $0 \leq \Phi \leq \pi/2$:

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \Phi, \quad (1)$$

gdzie parametr c nazywamy jest kohezją (spójnością), zaś Φ kątem tarcia wewnętrznego.



Rys. 1. Kryterium Coulomba-Mohra w płaszczyźnie krytycznego ścinania oraz największe z kół Mohra

Stosując maksymalne naprężenie ścinające τ_m (promień największego koła Mohra) i związane z nim naprężenie normalne σ_m (środek koła Mohra) mamy zależności:

$$\tau = \tau_m \cos \Phi, \quad \sigma = \sigma_m + \tau_m \sin \Phi, \quad (2)$$

zaś hipotezę (1) zapisujemy obecnie następująco:

$$\tau_m + \sigma_m \sin \Phi = c \cos \Phi. \quad (3)$$

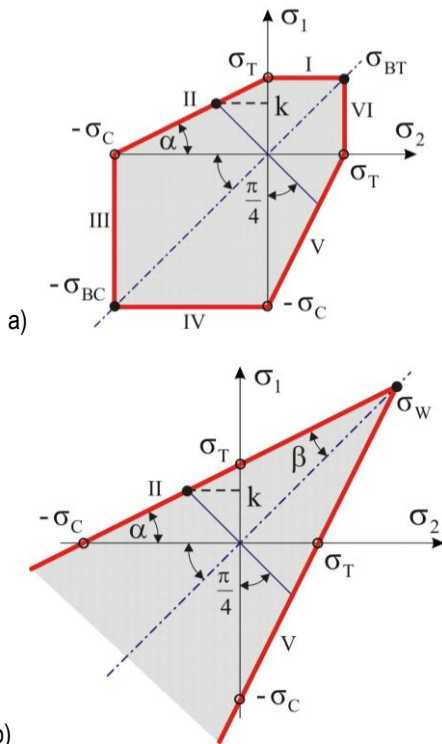
Wykorzystując ekstremalne, uporządkowane naprężenia główne $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, zależność (3) możemy przedstawić w postaci:

$$\sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \Phi = 2c \cos \Phi. \quad (4)$$

W przypadku gdy $\Phi = 0$, z (4) uzyskamy hipotezę Treski (maksymalnego ścinania), gdzie $c = k$ jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu. Gdy przyjmiemy $\Phi = \pi/2$, to z (4) otrzymamy kryterium Galileusza-Rankine'a, czyli maksymalnego naprężenia głównego.

Gdy rozpatruje się nieuporządkowane naprężenia główne $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, to kryterium CM składa się z sześciu równań definiujących płaty płaszczyzn składających się na tę powierzchnię plastyczności w przestrzeni naprężeń głównych [2]. W przypadku redukcji (4) do płaskiego stanu naprężenia (przyjmując np. $\sigma_3 = 0$), uzyskujemy zależności:

$$\begin{aligned} f_I &= \sigma_1(1 + \sin \Phi) - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2, \\ f_{II} &= \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2, \\ f_{III} &= -\sigma_2(1 - \sin \Phi) - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2, \\ f_{IV} &= -\sigma_1(1 - \sin \Phi) - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1, \\ f_V &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1, \\ f_{VI} &= \sigma_2(1 + \sin \Phi) - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1. \end{aligned} \quad (5)$$



Rys. 2. Hipoteza Coulomba-Mohra dla: a) płaskiego stanu naprężenia (PSN), b) płaskiego stanu odkształcenia (PSO).

Stosując uporządkowane naprężenia główne wystarczy rozpatrywać trzy pierwsze równania z (5). Zauważmy, że z równań płatów f_I , f_{VI} i f_{III} , f_{IV} wynikają odpowiednio wzory na wytrzymałości lub granice plastyczności w testach jednoosiowego rozciągania i ścinania, tj.

$$\sigma_T = \frac{2c \cos \Phi}{1 + \sin \Phi}, \quad \sigma_C = \frac{2c \cos \Phi}{1 - \sin \Phi} \quad \text{oraz} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_T}{\sigma_C} = \frac{1 - \sin \Phi}{1 + \sin \Phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right),$$

gdzie kąt α spełnia ograniczenie $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, por. **Rys.2a**. Dla $\alpha = 0$ uzyskujemy kryterium GR, natomiast dla $\alpha = \pi/4$ otrzymujemy warunek T.

W przypadku redukcji (4) do płaskiego stanu odkształcenia (plastycznego płynięcia), uzyskujemy dwie istotnie różne zależności:

$$\begin{aligned} f_{II} &= \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2, \\ f_V &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Stosując uporządkowane naprężenia główne wystarczy rozpatrywać pierwsze równanie w (7). Zauważmy, że punkt przecięcia płatów f_{II} i f_V określa położenie wierzchołka, tj. $\sigma_w = c \operatorname{ctg} \Phi$ oraz zachodzi związek $\operatorname{tg} \beta = \sin \Phi$, gdzie kąt β spełnia ograniczenie $0 \leq \beta \leq \pi/4$ i zachodzi również $\alpha + \beta = \pi/4$, por. **Rys.2b**. Dla $\beta = \pi/4$ uzyskamy kryterium GR, natomiast dla $\beta = 0$ mamy warunek T.

1.2. Równania różniczkowe trajektorii krytycznego ścinania

W punkcie styczności koła Mohra i prostej warunku CM (**Rys.1**) o współrzędnych $(\sigma; \tau)$, stan naprężenia wyrażony jest reprezentacją:

$$\begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \sigma - 2\tau_m \sin \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & \sigma_m \\ \sigma_m & \sigma_m \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Reprezentacja (8) ma zastosowanie do dowolnego płata (5) i (7) z odpowiednią interpretacją dwóch naprężeń głównych. Korzystając z (1) i (2) oraz na podstawie reprezentacji (8) stanu naprężenia przy eliminacji c i σ , uzyskamy związek:

$$\sigma_m - \sigma_{II} = 2\sigma_m \operatorname{tg} \Phi, \quad (9)$$

który zachodzi przy spełnieniu warunku wyężenia CM dla dowolnej wartości kohezji. Równanie (9) zastosujemy do wyznaczenia równania trajektorii krytycznego naprężenia ścinania τ określonego warunkiem (1). W tym celu podstawiamy do (9) wzory transformacyjne o postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \cos^2 \psi \sigma_{xx} + 2\cos \psi \sin \psi \sigma_{xy} + \sin^2 \psi \sigma_{yy}, \\ \sigma_{II} &= (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \sigma_{xx} - \cos \psi \sin \psi (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_{II} = \sin^2 \psi \sigma_{xx} - 2\cos \psi \sin \psi \sigma_{xy} + \cos^2 \psi \sigma_{yy},$$

a po przekształceniach otrzymujemy następujące równanie na charakterystyczne kierunki ścinania:

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2\sigma_{xy} \operatorname{tg} \Phi) \\ + 2 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{tg} \Phi + 2\sigma_{xy}] \operatorname{tg} \psi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Do badania przypadków szczególnych wygodnie jest rozpatrywać (11) w innej postaci:

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos \Phi - 2\sigma_{xy} \sin \Phi] \\ + 2 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \Phi + 2\sigma_{xy} \cos \Phi] \operatorname{tg} \psi = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

W przypadku gdy $\Phi = 0$, z (12) uzyskamy równanie:

$$(1 - \operatorname{tg}^2 \psi) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + 4\sigma_{xy} \operatorname{tg} \psi = 0 \quad (13)$$

odpowiednie dla hipotezy Treski. Natomiast gdy $\Phi = \pi/2$, to z (12) otrzymamy równanie:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{tg} \psi - (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) \sigma_{xy} = 0 \quad (14)$$

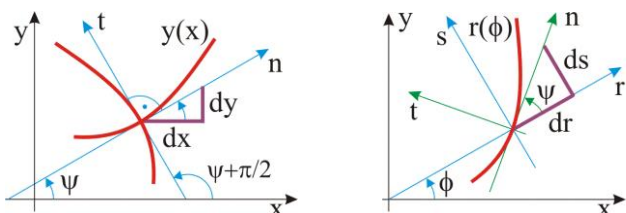
dla kryterium maksymalnego naprężenia głównego GR.

Definiując szukaną funkcję trajektorii w postaci (**Rys.3**):

$$y(x), \text{ mamy } \operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}, \quad (15)$$

czyli otrzymujemy równanie różniczkowe krytycznego ścinania dla warunku CM (11):

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2\sigma_{xy} \operatorname{tg} \Phi) \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] \\ & - 2 \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{tg} \Phi + 2\sigma_{xy} \right] \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$



Rys. 3. Trajektorie i zależności różniczkowe we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych

W przypadkach szczególnych (13) i (14) uzyskujemy odpowiednio równania różniczkowe:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] - 4\sigma_{xy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad (17)$$

dla kryterium Treski oraz:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \left(\frac{dy}{dx} \right) + \sigma_{xy} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (18)$$

dla warunku GR. Równanie różniczkowe (18) odpowiada równaniu trajektorii naprężeń głównych [4].

Postępując analogicznie równanie na trajektorie (11) można także sformułować we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} & (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - 2\sigma_{r\phi} \operatorname{tg} \Phi) \\ & + 2 \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{tg} \Phi + 2\sigma_{r\phi} \right] \operatorname{tg} \psi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Stosując współrzędne biegunowe (r, ϕ) poszukujemy trajektorii w postaci funkcji (**Rys.3**),

$$r(\phi), \text{ to } \operatorname{ctg} \psi = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{rd\phi}, \quad (20)$$

skąd otrzymujemy równanie różniczkowe do wyznaczania trajektorii naprężeń krytycznego ścinania:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - 2\sigma_{r\phi} \operatorname{tg} \Phi) \left[\left(\frac{dr}{rd\phi} \right)^2 - 1 \right] \\ & + 2 \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{tg} \Phi + 2\sigma_{r\phi} \right] \left(\frac{dr}{rd\phi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

W przypadkach szczególnych analogicznych do (17) i (18) uzyskujemy równanie różniczkowe trajektorii maksymalnego ścinania:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \left[\left(\frac{dr}{rd\phi} \right)^2 - 1 \right] + 4\sigma_{r\phi} \left(\frac{dr}{rd\phi} \right) = 0 \quad (22)$$

dla kryterium T oraz równanie różniczkowe trajektorii maksymalnego naprężenia głównego:

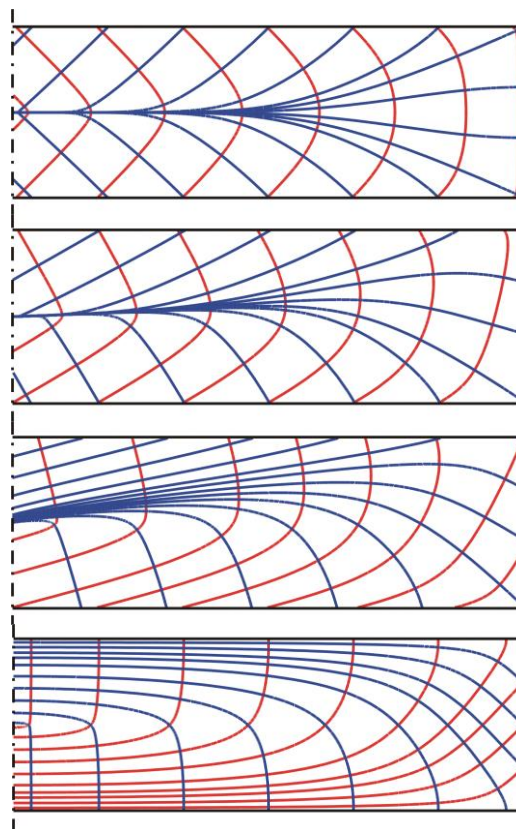
$$\sigma_{r\phi} \left[\left(\frac{dr}{rd\phi} \right)^2 - 1 \right] - (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) \left(\frac{dr}{rd\phi} \right) = 0, \quad (23)$$

tj. dla warunku GR.

Rozwiązując wyprowadzone równania kwadratowe (16)-(18) lub (21)-(23) względem pochodnych otrzymujemy odpowiednie formy równań do całkowania numerycznego. Poszukiwanie trajektorii sprowadza się więc do rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami początkowymi dla każdej krzywej z rodziny. Stosując program Mathematica wykonano obliczenia oraz wyniki przedstawiono graficznie. Zauważmy, że np. dla przypadku równania (16) mamy linie lub punkty osobliwości związane z zerowaniem się współczynnika stojącego przy kwadracie pochodnej, tj. $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2\sigma_{xy} \operatorname{tg} \Phi$. Przy ustaleniu warunków początkowych pomocne jest znalezienie wykresu takich linii. Należy zaznaczyć, że ze względu na osobliwości występujące w równaniu (16) poszukiwano także rozwiązań równania analogicznego do (16) na funkcję o postaci $x(y)$.

2. PRZYKŁADY WYZNACZANIA TRAJEKTORII

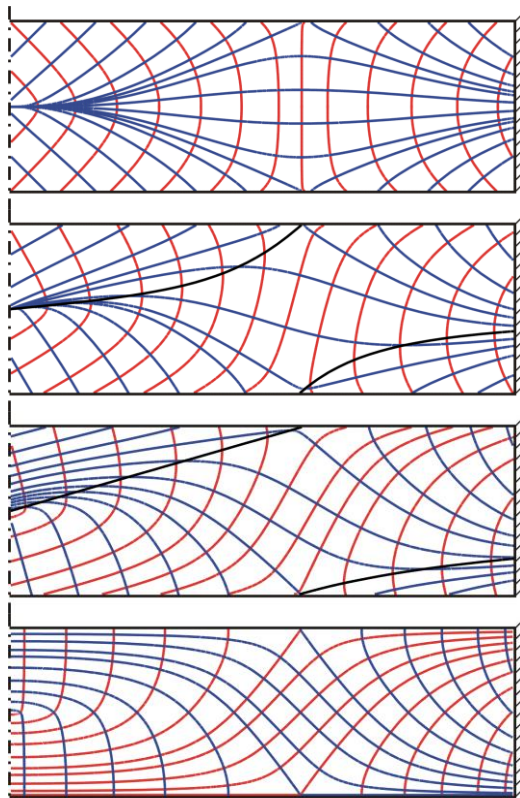
W punkcie tym podamy kilka prostych przykładów wyznaczenia trajektorii krytycznego ścinania w izotropowych belkach w płaskim stanie naprężenia oraz tarczy płaskim stanie odkształcenia. Rozwiązania zadań w naprężeniach są uzyskane w kartezjańskim układzie współrzędnych i następnie znajduje się trajektorie.



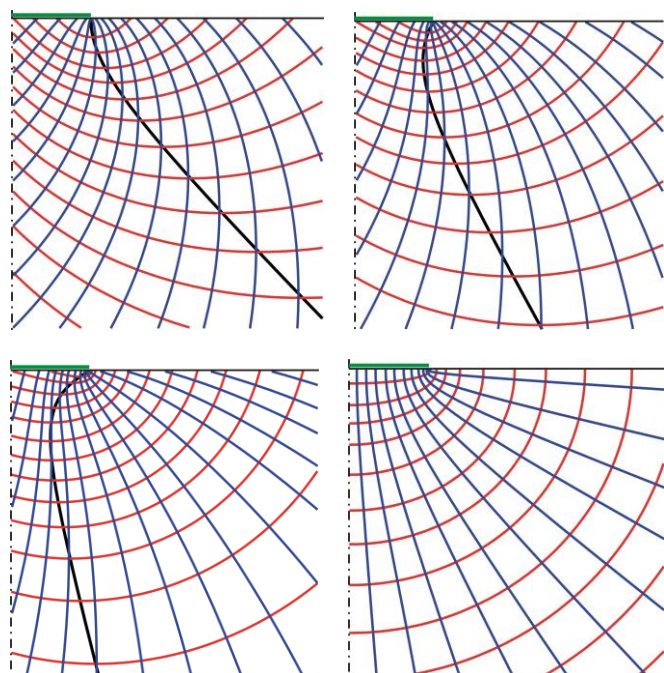
Rys. 4. Trajektorie w belce swobodnie podpartej na końcach i obciążonej równomiernie, kolejno dla $\Phi = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$

Jako pierwszą rozpatrzono jednorodną belkę swobodnie podpartą na końcach i obciążoną równomiernie na całej długości. Na **Rys.4** przedstawiono trajektorie krytycznego ścinania (dla połowy belki) zgodnie z przewidywaniem kryterium CM dla czterech wartości kąta tarcia wewnętrznego $0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$. Analogiczne wyniki pokazano również dla belki obustronnie utwierdzonej i obciążonej równomiernie na całej długości, **Rys.5**. W przypadku $\Phi = 0^\circ$ trajektorie krytycznego ścinania pokrywają się z trajektoriami maksymalnego ścinania, natomiast dla $\Phi = 90^\circ$ trajektorie krytycznego

ścianania pokrywają się z trajektoriami naprężeń głównych. Ponadto pokazano wyniki dla dwóch przypadków pośrednich w celu zaobserwowania modyfikacji w układzie trajektorii. W belkach betonowych lub słabo zbrojonych w strefach z dominującym rozciąganiem rozwój spękania naśladuje przebieg trajektorii naprężenia głównego, natomiast gdy dominuje stan ściskania kierunek pęknięcia zbliża się do trajektorii krytycznego ścinania [1, 3].



Rys. 5. Trajektorie w belce utwierdzonej obustronnie i obciążonej równomiernie, kolejno dla $\Phi = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$



Rys. 6. Trajektorie w półpłaszczyźnie obciążonej równomiernie i prostopadle na części brzegu, kolejno dla $\Phi = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$

Uogólnione zadanie Flamanta jest kolejnym przykładem, który dotyczy zadania płaskiego stanu odkształcenia. Na **Rys.6** pokazano wykresy krytycznego ścinania wg hipotezy CM, przy czym na niektórych rysunkach zamieszczono wykresy linii osobliwości. Zadanie to ma duże znaczenie w mechanice gruntów do modelowania oddziaływania budowli na podłoże gruntowe. W przypadku długich fundamentów rozwiązanie w postaci trajektorii krytycznego ścinania jest pomocne w przewidywaniu schematów zniszczenia i w efekcie przewidywania nośności granicznej podłoża [2, 3].

PODSUMOWANIE

W pracy podano trajektorie dla prostych przykładów izotropowych belek i tarczy, które jedynie ilustrują omawiane zagadnienie znalezienia trajektorii krytycznych naprężeń ścinania według hipotezy CM. Zwróćmy szczególną uwagę na jakościowe różnice w otrzymanych rozwiązaniach w funkcji kąta tarcia wewnętrznego materiału. W ogólności zagadnienie jest znacznie bardziej złożone, gdyż w praktyce inżynierskiej stosuje się belki i tarcze niejednorodne i ortotropowe, np. żelbetowe [1, 3]. Znalezienie trajektorii naprężeń głównych, naprężeń maksymalnego ścinania lub krytycznego ścinania w płaskich zadaniach jest pomocne do prawidłowego wymiarowania zbrojenia [1, 3]. Na przykład wprowadzenie zbrojenia w tarczach modyfikuje rozkłady naprężeń oraz ich trajektorie [4]. Należy podkreślić, że obecnie zagadnienie to nie jest ujęte w programach metody elementów skończonych, które problem powyższy kompleksowo rozwiązują. Jeżeli znane jest rozwiązanie analityczne zadania to droga postępowania przy wyznaczaniu trajektorii jest łatwiejsza, ale ze względu na osobliwości rozwiązań i nieliniowość zagadnienia każde zadanie należy badać indywidualnie.

BIBLIOGRAFIA

1. Godycki-Ćwirko T., *Mechanika betonu*, Arkady, Warszawa 1982.
2. Izbicki R., Mróz Z., *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*, PWN, Warszawa-Poznań 1976.
3. Nielsen M.P., Hoang L.C., *Limit analysis and concrete plasticity*, CRC Press 2011.
4. Szwed A., Jemiolo S., Gajewski M., O wyznaczeniu trajektorii wartości własnych stanu naprężenia i odkształcenia w tarczach anizotropowych, *Proc. T.F.C.E.*, 2000, str. 311-318.
5. *Mathematica*, <http://www.wolfram.com>.

CRITICAL SHEAR STRESS TRAJECTORIES FOR COULOMB-MOHR STRENGTH CRITERION

Abstract

Paper discusses formulation of differential equations for trajectories of critical shear stress according the Coulomb-Mohr strength criterion. Selected examples of boundary valued problems in plane stress and strain are presented to illustrate application of the derived equations for trajectories.

Autor:
dr **Aleksander Szwed** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, Instytut Inżynierii Budowlanej, a.szwed@il.pw.edu.pl