ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

W. PLEŚNIAK (Kraków)

Czebyszew, Weierstrass, Jackson, Bernstein i ich kontynuatorzy

Aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami absorbowała najwybitniejszych matematyków przełomu XIX i XX wieku. Początek historii tej dyscypliny kojarzony jest z dziełem Pafnutija Lwowicza Czebyszewa (1821–1894), który już w roku 1853 udowodnił

TWIERDZENIE 1. *Niech* $T_n(x) = \cos n \arccos x$ *dla* $x \in [-1,1]$. *Wtedy dla wszystkich wielomianów postaci*

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{$*$}$$

mamy $\frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|_{[-1,1]} \leqslant \|p\|_{[-1,1]}$.

Funkcja $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ jest wielomianem postaci $(*)$, więc Twierdzenie 1 rozwiązuje problem aproksymacji jednostajnej funkcji $f(x) = x^n$ wielomianami stopnia $n-1$. Wielomiany $T_n(x) = \cos n \arccos x$ noszą dzisiaj nazwę *wielomianów Czebyszewa*, a normę $\|h\|_{[a,b]} = \max\{|h(x)| : x \in [a,b]\}$ nazywa się *normą Czebyszewa*.

Możliwość aproksymacji jednostajnej dowolnej funkcji ciągłej wielomianami wykazał w 1885 roku Karl Weierstrass (1815–1897). Jego klasyczny wynik głosi, że

TWIERDZENIE 2. *Każdą funkcję ciągłą* f *na przedziale* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *można jednostajnie aproksymować na* $[a,b]$ *wielomianami algebraicznymi, co oznacza, że do każdej funkcji* f *i do każdej liczby* $\epsilon > 0$ *można dobrać wielomian* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *taki, że*

$$\|f - p\|_{[a,b]} < \epsilon.$$

Twierdzenie Weierstrassa pełni ważną rolę w matematyce. Nic też dziwnego, że jego kolejnych dowodów dostarczyły takie znamienitości, jak Picard (1891), Volterra (1897) Lerch (1903), Runge (1885a, 1885b), Lebesgue

(1898), Mittag-Leffler (1900). Dość zaskakujący dowód twierdzenia Weierstrassa, bo wykorzystujący nierówność Bienaymé-Czebyszewa z teorii prawdopodobieństwa:

$$\operatorname{Prob}(|w(x) - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\operatorname{var}(w(x))}{\delta^2},$$

gdzie $w(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$, a v_i są niezależnymi zmiennymi losowymi, które przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem x i wartość 0 z prawdopodobieństwem $1 - x$, pochodzi od Bernsteina (1912). Jego metoda pozwoliła dodatkowo wskazać wielomiany aproksymujące zadaną funkcję f i oszacować szybkość aproksymacji:

TWIERDZENIE 3. *Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1]$, to*

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}| \leqslant \frac{3}{2}\omega_f(\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

gdzie $\omega_f(\delta)$ jest modułem ciągłości funkcji f.

Podobny rezultat można uzyskać stosując twierdzenie Korowkina (1959), według którego ciąg operatorów L_n liniowych, ciągłych i dodatnich w przestrzeni Banacha $C_{\mathbb{R}}([a, b])$ jest zbieżny do identyczności wtedy (i tylko wtedy), gdy jest zbieżny do identyczności na trzech funkcjach: $f(x) \equiv 1$, $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$.

Twierdzenie 2 można też sformułować tak: *skończone kombinacje liniowe funkcji z ciągu $\{1, x, x^2, \dots\}$ są gęste w przestrzeni Banacha $C([a, b])$ funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ z normą Czebyszewa.* Jednym z piękniejszych uogólnień tego twierdzenia jest rezultat Müntza z 1914 roku:

TWIERDZENIE 4. *Jeśli $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ jest rosnącym do nieskończoności ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to skończone kombinacje liniowe funkcji z ciągu $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$ są gęste w $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.*

Jest jasne, że twierdzenie Weierstrassa jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Müntza (z wykładnikami $\lambda_n = n$ dla $n = 1, 2 \dots$). Tak więc twierdzenie Müntza kojarzy dwa na pozór odległe od siebie fakty: zagwarantowaną przez twierdzenie Weierstrassa jednostajną aproksymację wielomianami funkcji ciągłych i rozbieżność szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Twierdzenie Weierstrassa ma też swój odpowiednik wielowymiarowy. Jest nim następujące twierdzenie, wynikające z twierdzenia Stone'a (1948):

TWIERDZENIE 5 (Stone'a-Weierstrassa). *Każdą funkcję ciągłą na podzbiorze zwartym K przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można aproksymować jednostajnie na K wielomianami (algebraicznymi).*

Podobny do rozwiązanego przez twierdzenie Weierstrassa problem aproksymacji wielomianowej funkcji ciągłych w dziedzinie zespolonej jest znacznie trudniejszy. Wynika to z pewnej „sztywności” funkcji analitycznych:

1^o jeśli funkcja f jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na zbiorze zwartym $K \subset \mathbb{C}$, to f musi być analityczna we wnętrzu zbioru K;

2^o jeśli nawet zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}$ ma puste wnętrze, ale zbiór $\mathbb{C} \setminus K$ nie jest spójny, to nie każdą funkcję ciągłą na K da się na tym zbiorze jednostajnie aproksymować wielomianami (przykład: $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i $f(z) = \frac{1}{z}$).

Trudny problem aproksymacji w dziedzinie zespolonej rozwiązał ostatecznie w roku 1951 Mergelian:

TWIERDZENIE 6. *Niech K będzie podzbiorem zwartym płaszczyzny $\mathbb{C}$. Każdą funkcję ciągłą na K, analityczną we wnętrzu zbioru K, można przybliżać jednostajnie na K wielomianami wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{C} \setminus K$ jest zbiorem spójnym (mówimy wtedy, że zbiór K „nie rozcina” płaszczyzny $\mathbb{C}$).*

Powróćmy do aproksymacji wielomianowej na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Niech dalej $\mathcal{P}_n$ oznacza przestrzeń wielomianów algebraicznych stopnia $\leqslant n$. Dla $f \in C([a, b])$, niech

$$E_n(f) = \operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_n) := \inf\{\|f - p\|_{[a,b]} : p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Możemy teraz jeszcze inaczej wypowiedzieć twierdzenie Weierstrassa:

$$\textit{Jeśli } f \in C([a, b]), \quad \textit{to} \quad \lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

Stwierdzenie to nie dostarcza jednak żadnej informacji o szybkości, z jaką ciąg $\{\operatorname{dist}(f, P_n)\}$ zmierza do zera. Okazuje się, że zbieżność ta jest tym lepsza, im bardziej regularna jest funkcja f. Wykazał to Dunham Jackson (1888-1946) w swojej słynnej dysertacji (1911), napisanej w Getyndze pod kierunkiem Landaua. Warto w tym miejscu dodać, że znacznie później, bo w 1938 roku S.N. Bernstein pokazał, że każda szybkość zbieżności do zera słabo malejącego ciągu $\{E_n(f)\}$ jest zrealizowana w klasie funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$. Jest to treścią jego znanego twierdzenia „o letargu”:

TWIERDZENIE 7. *Dla każdego słabo malejącego i zbieżnego do zera ciągu $\{\epsilon_n\}$ liczb nieujemnych istnieje funkcja $f \in C([a, b])$ taka, że $E_n(f) = \epsilon_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$.*

Wyniki Jacksona dały początek działowi teorii aproksymacji zwanemu *konstruktywną teorią funkcji.* Teorię tę tworzyło wielu wybitnych matematyków. Spośród największych należy – obok Jacksona – wymienić Bernsteina, de la Vallée Poussina i Lebesgue'a. Szczególne zasługi dla rozwoju konstruktywnej teorii funkcji ma ten pierwszy, Siergiej Natanowicz Bernstein (1880–1968). Jemu to zawdzięczamy przepiękne charakteryzacje funkcji klasy C^∞ i funkcji analitycznych przy pomocy aproksymacji wielomianowej. Oto one:

TWIERDZENIE A Bernsteina (1911). *Funkcja f określona na przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^k E_n(f) = 0.$$

TWIERDZENIE B Bernsteina (1911). *Funkcja f określona na przedziale $[a,b]$ jest analityczna (w otoczeniu tego przedziału) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)} < 1.$$

W dowodach obu powyższych twierdzeń ważną rolę pełnią dwie klasyczne nierówności wielomianowe, które mają swoje odrębne historie. W przypadku Twierdzenia A jest to słynna

NIERÓWNOŚĆ MARKOWA (1889). *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}_n$ mamy*

$$|P'(x)| \leqslant n^2 \|P\|_{[-1,1]} \quad \text{dla } x \in [-1,1].$$

Nierówność ta jest optymalna, dla wielomianów Czebyszewa T_n mamy bowiem $|T_n'(\pm 1)| = n^2$ oraz $\|T_n\|_{[-1,1]} = 1$.

Dla wielomianów stopnia drugiego nierówność taką wykazał wcześniej Dmitrij Iwanowicz Mendelejew (1834–1907), który jej potrzebował do badań nad ciężarem właściwym roztworu w zależności od stężenia substancji rozpuszczanej. Mendelejew zainteresował w roku 1887 swoim oszacowaniem pochodnej wielomianu kwadratowego Andrieja Andriejewicza Markowa (1856–1922), który uznał problem za niezwykle ciekawy i po dwóch latach podał jego ogólne rozwiązanie. Piękno nierówności Markowa leży w jej zaskakująco prostej formie oraz w jej przydatności w rozwiązywaniu innych problemów, nie tylko czysto matematycznych. Z praktycznych zastosowań tej nierówności, oprócz wspomnianych już doświadczeń Mendelejewa, warto wymienić następujące zagadnienia: *minimalizacja czasu odpowiedzi wzmacniacza, zdolność rozdzielcza przyrządu optycznego, średnica plamki światła rozproszonego przyrządu optycznego.*

Więcej na ten temat można znaleźć w monografii Arsaca (1961) i w pracy Boasa (1969).

Stosując k-krotnie nierówność Markowa łatwo dostajemy oszacowanie dla wyższych pochodnych wielomianu $P \in \mathcal{P}_n$:

$$\|P^{(k)}\|_{[-1,1]} \leqslant n^2(n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2 \|P\|_{[-1,1]},$$

które jednak nie jest optymalne. Dokładne oszacowanie zawdzięczamy bratu A.A. Markowa, W.A. Markowowi (1892):

$$\begin{aligned}\|P^{(k)}\|_{[-1,1]} &\leqslant T_n^{(k)}(1) \cdot \|P\|_{[-1,1]} = \\ &= \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3 \cdots (2k-1)} \|P\|_{[-1,1]}.\end{aligned}$$

Dowód tej nierówności jest jednak znacznie trudniejszy (zob. np. Borwein-Erdélyi (1995)).

W dowodzie Twierdzenia B wykorzystuje się inną słynną nierówność. Jest nią

NIERÓWNOŚĆ BERNSTEINA (1911). *Dla dowolnego wielomianu* $P \in \mathcal{P}_n$ *i dla dowolnego* $R > 1$,

$$|P(z)| \leqslant R^n \|P\|_{[-1,1]} \qquad z \in \mathcal{E}_R,$$

gdzie $\mathcal{E}_R$ *jest elipsą o ogniskach w punktach* 1 *i* -1 *i o półosiach* $\frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$, $\frac{1}{2}(R + \frac{1}{R})$.

Zauważmy, że każdy punkt z płaszczyzny $\mathbb{C}$ należy do pewnej elipsy $\mathcal{E}_R$, przy dostatecznie dużym $R > 1$ (zależnym od z). Zatem nierówność Bernsteina szacuje wzrost wartości bezwzględnej wielomianu na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$ w zależności od oszacowania jego wartości na przedziale $[-1, 1]$.

Oba przytoczone wyżej twierdzenia Bernsteina, jak również nierówności Markowa i Bernsteina, na których dowody tych twierdzeń się opierają, były od lat obiektem intensywnych badań i doczekały się licznych uogólnień idących w różnych kierunkach, w szczególności na przypadek wielu zmiennych. Duży udział w rozwoju tej dziedziny badawczej ma szkoła krakowska, której początek dał Franciszek Leja (1885–1979). Jego dzieło przybliży Czytelnikowi najlepiej artykuł Siciaka (1982). Z wielu osiągnięć Leji wymieńmy tu jedynie słynny *lemat wielomianowy* z roku 1933, który dostarcza jednostajnego oszacowania w otoczeniu dostatecznie regularnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$ dla rodziny wielomianów μ-prawie wszędzie punktowo ograniczonej na K (przy odpowiedniej mierze μ) oraz metodę punktów ekstremalnych i funkcji ekstremalnej L_K, skojarzonej ze zbiorem zwartym $K \subset \mathbb{C}$, której logarytm jest (uogólnioną) funkcją Greena G_K dla składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{C} \setminus K$ z (logarytmicznym) biegunem w nieskończoności (zob. Leja (1957)).

Najbardziej znane uogólnienia Twierdzenia B dla funkcji zmiennej zespolonej pochodzą od Gábora Szegö (1895-1985) (1921) i Josepha Leonarda Walsha (1895-1973) (1926). Najogólniejszą wersję tego twierdzenia uzyskali Walsh i Russell (1934). Zgodnie z nią, Twierdzenie B pozostaje prawdziwe, jeśli odcinek $[-1, 1]$ zastąpimy podzbiorem zwartym K płaszczyzny $\mathbb{C}$, dla którego funkcja Greena G_K jest ciągła na K (stąd w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$) (zob. też Walsh (1960)). Wielowymiarowy model tej teorii stworzył Józef Siciak. W języku swojej funkcji ekstremalnej

$\Phi_K(z) = \sup\{|p(z)|^{1/\deg p};\ p$ jest wielomianem, $\deg p \geqslant 1,\ \|p\|_K \leqslant 1\}$, skojarzonej ze zbiorem zwartym K w $\mathbb{C}^n$, Siciak (1962) sformułował i udowodnił wersję Twierdzenia B Bernsteina w $\mathbb{C}^n$. Dzięki stworzonej pod koniec lat 70. XX wieku przez Erika Bedforda i B. Allana Taylora teorii pluripotencjału w $\mathbb{C}^n$, opartej na *zespolonym operatorze Monge'a-Ampère'a*, logarytm funkcji ekstremalnej Siciaka okazał się wielowymiarowym odpowiednikiem wspomnianej wyżej funkcji Greena G_K. Fakt ten leży u podstaw wielu zastosowań funkcji ekstremalnej Siciaka w analizie. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w artykule Pleśniaka (2003a). Dodajmy, że świetnym wprowadzeniem w teorię pluripotencjału jest monografia Klimka (1991), jednego z uczniów Siciaka. Warto też odnotować, że Twierdzenie B (w wielowymiarowej wersji Siciaka) ma swój odpowiednik w przestrzeniach Orlicza dla par (K, μ), dla których zachodzi lemat wielomianowy Leji (Pleśniak 1985).

Naturalną przeszkodą w poszukiwaniu dostatecznie ogólnych, wielowymiarowych wersji nierówności Markowa i Twierdzenia A Bernsteina były zbiory o zerowych (zewnętrznych) ostrzach. Zerner (1969) pierwszy zauważył, że gdy zbiór w $\mathbb{R}^2$ ma zbyt płaskie ostrze (np. ostrze pomiędzy osią $y = 0$ i wykresem funkcji $y = \exp(-1/x)$, $x > 0$), to gradienty wielomianów o normie wspólnie ograniczonej na tym zbiorze nie można jednostajnie oszacować na tym zbiorze przez skończoną potęgę stopni wielomianów. Praca Goetghelucka (1980), dostarczająca dokładnego oszacowania pochodnych cząstkowych wielomianu dwóch zmiennych na zbiorze $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x^p, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, była punktem wyjścia dla Pawłuckiego i Pleśniaka (1986) do badań nad wielowymiarowymi wersjami nierówności Markowa i Twierdzenia A Bernsteina na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^n$ o ostrzach wielomianowych, w szczególności na zbiorach subanalitycznych (w sensie Hironaki-Łojasiewicza). Wykazali oni ponadto (Pawłucki-Pleśniak (1988), Pleśniak (1990)), że nierówność Markowa pozwala w stosunkowo prosty sposób skonstruować liniowy i ciągły operator przedłużający dżety Whitneya funkcji klasy C^∞ na zbiorze zwartym Markowa $K \subset \mathbb{R}^n$ do funkcji klasy C^∞ na całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wzmocniło to istotnie poprzednie rezultaty w tym zakresie uzyskane przez kilku znamienitych matematyków (Mityagina, Seeleya, Steina, Tidtena i Bierstone'a). Oryginalność podejścia do tych zagadnień, zaproponowanego przez Pawłuckiego i Pleśniaka, polega głównie na skojarzeniu metod badawczych dwóch wybitnych krakowskich szkół matematycznych: szkoły geometrii subanalitycznej stworzonej przez Stanisława Łojasiewicza i szkoły analizy zespolonej Józefa Siciaka. Więcej szczegółów na ten temat znajdzie Czytelnik w przeglądowej pracy Pleśniaka (1998).

Wielowymiarowych przykładów zbiorów Markowa dostarczają nie tylko teoria funkcji ekstremalnej Siciaka i geometria subanalityczna Hironaki-Łojasiewicza, ale także inne ważne działy współczesnej analizy, np. dynamika zespolona (Kosek (1997), Klimek-Kosek (2003)) i struktury o-minimalne, które są daleko idącym uogólnieniem geometrii subanalitycznej (Pleśniak (2003b), Pierzchała (2003a, 2003b)). Dodajmy na koniec, że w ostatnich latach burzliwie rozwija się też teoria nierówności Markowa na (niżej wymiarowych) zbiorach semi-algebraicznych i krzywych transcendentalnych

(Bos-Levenberg-Milman-Taylor (1998), Baran-Pleśniak (2000a, 2000b), Kosek (2000), Pleśniak (2002), Bos-Brudnyĭ-Levenberg-Totik (2003), Coman-Poletski (2003)). Wszystko to świadczy o sile i pięknie klasycznej nierówności Markowa, którą z tej racji pozwoliłem sobie nazwać w wykładzie dla uczestników Ogólnopolskich Warsztatów dla Młodych Matematyków w Krakowie, we wrześniu 2002 roku, Sędziwą Damą o Niesłabnącym Powabie.

A oto alegoria owej Damy według słuchaczy wspomnianego wykładu, Joanny Gawryckiej i Anny Ratajczak z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu i Kuby Pochrybniaka z Uniwersytetu Warszawskiego:

Literatura

J. A r s a c (1961), *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, Paris.

M. B a r a n and W. P l e ś n i a k (2000a), *Polynomial inequalities on algebraic sets*, Studia Math. **141**, 209–219.

M. B a r a n and W. P l e ś n i a k (2000b), *Characterization of compact subsets of algebraic varieties in terms of Bernstein type inequalities*, Studia Math. **141**, 221–234.

S. N. B e r n s t e i n (1911), *Sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **152**.

S. N. Bernstein (1912a), *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Prace Tow. Matem. w Charkowie **13** , 1–2.

S. N. Bernstein (1912b) , *O najlepszym przybliżeniu funkcji ciągłych wielomianami danego stopnia*, Prace Tow. Matem. w Charkowie (po rosyjsku).

S. N. Bernstein (1938), *O odwrotnym problemie teorii najlepszej aproksymacji funkcji ciągłych*, Dzieła zebrane, t. II, 292–294 (po rosyjsku).

R. P. Boas (Jr.) (1969), *Inequalities for the derivatives of polynomials*, Math. Mag. **42**, 165–174.

P. Borwein and T. Erdélyi (1995), *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer-Verlag New York, Inc.

L. Bos, A. Brudnyĭ, N. Levenberg and V. Totik (2003), *Tangential Markov Inequalities on Transcendental Curves*, Constr. Approx. **19**, 339–354.

L. Bos, N. Levenberg, P. Milman and B. A. Taylor (1998), *Tangential Markov inequalities on real algebraic varieties*, Indiana Univ. J. Math. **47**, 1257–1271.

D. Coman and E. A. Poletsky (2003), *Bernstein-Walsh inequalities and the exponential curve in* $\mathbb{C}^2$, Proc. Amer. Math. Soc. **131 (3)**, 879–887.

P. L. Czebyszew (1853), *Teoria mechanizmów znanych pod nazwą równoległoboków*, Soczinienia t. I, 111–143 (po rosyjsku).

P. L. Czebyszew (1859) , *Pytania o minima, związane z przybliżoną reprezentacją funkcji*, Soczinienia t. I, 273–378 (po rosyjsku).

P. L. Czebyszew (1881), *O funkcjach mało różniących się od zera dla pewnych wartości zmiennej*, Soczinienia t. II, 335–356 (po rosyjsku).

P. Goetgheluck (1980), *Inégalité de Markov dans les ensembles efillés* , J. Approx. Theory **30**, 149–154.

D. Jackson (1911), *Über Genauigkeit der Anäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen grades und trigonometrische Summengegebener Ordnung, Diss. Göttingen.*

D. Jackson (1930), *The theory of approximation*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XI.

M. Klimek (1991), *Pluripotential Theory*, Oxford Univ. Press, London.

M. Klimek and M. Kosek (2003), *Composite Julia sets generated by infinite polynomial arrays*, Bull. sci.math. **127**, 885–897.

P. P. Korowkin (1959), *Operatory liniowe i teoria aproksymacji* , Fizmatgiz (po rosyjsku). Tłum. angielskie: Hindustan Publ. Corp. (1960).

M. Kosek (1997), *Hölder Continuity Property of filled-in Julia sets in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **125(7)**, 2029–2032.

M. Kosek (2000), *Iteration of polynomial mappings on algebraic sets*, Complex Variables: Theory and Application, **43**, 187–197.

H. Lebesgue (1898), *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. sci. math. **22**, 278–287.

H. Lebesgue (1909), *Sur les intégrales singulières*, Ann. de la Faculté des Sci. de l'Université de Toulouse.

F. Leja (1957), *Teoria funkcji analitycznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

M. Lerch (1903), *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*, Acta Math. **27**, 339–352.

A. A. Markow (1889), *Über eine von D.I. Mendelejeff gestellte Frage*, Izw. Akad. Nauk, Sankt Petersburg **62**, 1–24.

W. A. Markow (1892), *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*, Math. Ann. **77** (1916), 213–258.

S. N. Mergelian (1951), *O przedstawieniu funkcji na zbiorach domkniętych przy pomocy szeregów wielomianów* , Dokl. Akad. Nauk SSSR **78**, 405–408 (po rosyjsku).

G. Mittag-Leffler (1900), *Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle*, Rendiconti circ. mat. Palermo **14**, 217–224.

C. H. Müntz (1914) , *Über den Approximationssatz von Weierstrass* , H.A. Schwarz Fest-schrift, Math. Abh. (1914), 303–312, Berlin, Springer.

W. Pawłucki and W. Pleśniak (1986), *Markov's inequality and C^∞ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. **275**, 467–480.

W. Pawłucki and W. Pleśniak (1988), *Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps*, Studia Math. **88**, 279–287.

E. Picard (1891), *Sur la représentation approchée des fonctions*, C.R. Acad. Sci. Paris **112**, 183–186.

R. Pierzchała (2003a), *UPC conditions in some o-minimal structures*, Institute of Mathematics, Jagiellonian University, preprint.

R. Pierzchała (2003b), *Characterization of plane UPC sets definable in polynomially bounded o-minimal structures*, Institute of Mathematics, Jagiellonian University, preprint.

W. Pleśniak (1985), *Leja's type polynomial conditions and polynomial approximation in Orlicz spaces*, Ann. Pol. Math. **46**, 268–278.

W. Pleśniak (1990), *Markov's inequality and the existence of an extension operator for C^∞ functions*, J. Approx. Theory **61**, 106–117.

W. Pleśniak (1998), *Recent Progress in Multivariate Markov Inequality* In: Approximation Theory, In Memory of A.K. Varma (N.K. Govil and alt., ed.), Marcel Dekker, New York, 449–464.

W. Pleśniak (2002), *An estimate from below of a generalized Bernstein exponent*, Institute of Mathematics, Jagiellonian University, preprint.

W. Pleśniak (2003a), *Siciak's extremal function in complex and real analysis*, Ann. Polon. Math. **80**, 37–46.

W. Pleśniak (2003b), *Pluriregularity in polynomially bounded o-minimal structures*, Univ. Iagel. Acta Math. **41**, 205–214.

C. Runge (1885a), *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta Math. **6**, 229–245.

C. Runge (1885b), *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen*, Acta Math. **7**, 387–392.

J. Siciak (1962), *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex numbers* , Trans. Amer. Math. Soc. **105**, 322–357.

J. Siciak (1982), *Franciszek Leja (1885-1979)*, Wiadom. Mat. **24.1**, 65–90.

M. H. Stone (1948), *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Magazine **21**, 167–184 i 237–254.

G. Szegö (1921), *Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebener Kurve der komplexen Ebene gehören*, Math. Zeitschr. **23**, 218–270.

Ch. J. (de la) Vallée Poussin (1910), *Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle*, Bull. Acad. Belgique **12**, 808–844.

Ch. J. (de la) Vallée Poussin (1911), *Sur la méthode de l'approximation minimum*, Soc. Scient. Bruxelles, Annales **35**, 1–16.

Ch. J. (de la) Vallée Poussin (1918), *Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné*, C.R. Acad. Sci Paris **166**, 799–802.

Ch. J. (de la) Vallée Poussin (1919), *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Gauthier Villars (II wydanie w roku 1952).

V. Volterra (1897), *Sul principio di Dirichlet*, Rendiconti circ. mat. Palermo **11**, 83–86.

J. L. Walsh (1926), *Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen*, Math. Ann. **96**, 430–436.

J. L. Walsh (1960), *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. XX.

J. L. Walsh and H. G. Russell (1934), *On the convergence and overconvergence of sequences of polynomials of best simultaneous approximation to several functions analytic in distinct regions*, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 13–28.

K. Weierstrass (1885), *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss., Berlin (1885), 633–639 i 789–805.

M. Zerner (1969), *Développement en séries de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **268**, 218–220.