



MODEL DYNAMIKI ZRZUTU BOMBY W WARUNKACH TURBULENCJI *MODEL OF BOMB AIRDROP DYNAMICS AT TURBULENCE CONDITIONS*

Grzegorz KOWALECZKO, Mariusz PIETRASZEK, Krzysztof GRAJEWSKI
Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa
Air Force Institute of Technology, 6 Ksiecicia Boleslawa St., 01-494 Warsaw, Poland
Auhtor's e-mail address: grajek@itwl.pl

DOI 10.5604/01.3001.0012.6812

Streszczenie: Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie częściowych wyników badań symulacyjnych prowadzonych aktualnie w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych. Badania te dotyczą dynamiki lotu ćwiczebnej bomby lotniczej LBCw-10, która została opracowana w ITWL, a obecnie podlega modernizacji. Symulacje wykonano wykorzystując autorskie oprogramowanie opracowane na potrzeby tych badań. W artykule przedstawiono klasyczny model ruchu przestrzennego bomby oraz podano podstawowe dane tego obiektu. Dokładnie opisano sposób obliczania oddziaływań aerodynamicznych uzupełniając ten opis o przykładowe charakterystyki aerodynamiczne, które otrzymano wykorzystując komercyjne oprogramowanie PRODAS. Dodatkowo przedstawiono sposób uwzględnienia zmienności pola wiatru, a w szczególności turbulencji atmosfery. Zastosowano stochastyczny model pola wiatru. Pokazano przykładowe wyniki obliczeń, które zostaną wykorzystane w procesie modernizacji bomby polegającym na wprowadzeniu aktywnego sterowania torem lotu.

Słowa kluczowe: bomba korygowana, symulacja numeryczna, turbulencja atmosfery, model dynamiki lotu

1. Wstęp

Podstawowym sposobem prowadzenia badań nowoprojektowanych bomb są badania poligonowe, które pozwalają określić ich różnorodne charakterystyki. Istotnym etapem prac badawczych, poprzedzającym badania poligo-

Abstract: The purpose of this article is to present partial results of simulation tests currently conducted at the Air Force Institute of Technology. These tests concern the flight dynamics of the LBCw-10 aircraft bomb, which was developed at ITWL and is currently undergoing modernization. Simulations were carried out using proprietary software developed for the needs of these studies. The article presents a classic model of spatial motion of a bomb and basic data of this object. The method of calculating aerodynamic forces is described in detail, complementing this description with exemplary aerodynamic characteristics, which were obtained using commercial PRODAS software. Additionally, the method of taking into account the variability of the wind field, and in particular the turbulence of the atmosphere is presented. A stochastic wind field model was used. Illustrative results of calculations are shown, which will be used in the process of bomb modernization involving the use of active flight path control.

Keywords: guided bomb, numerical simulation, turbulence of the atmosphere, flight dynamics model

1. Introduction

Trials on the proving range belong to basic ways of investigation for newly designed bombs as they can identify their different characteristics. Simulating studies are an essential stage of the investigations

nowe, są badania symulacyjne. Wyniki przeprowadzonych symulacji są podstawą do oszacowania podstawowych „osiągów” bomb. Zaliczyć do nich można np. donośność zrzutu oraz czas charakterystyczny, które w powiązaniu z warunkami początkowymi zrzutu (prędkość, wysokość, kąt zrzutu) dają wiedzę na temat projektowanego obiektu balistycznego. Podstawową zaletą takiego podejścia jest też możliwość szybkiej oceny wprowadzanych zmian konstrukcyjnych na osiągi.

Aby móc w pełni wykorzystać potencjał metod obliczeniowych najlepiej symulacje wykonywać wykorzystując samodzielnie opracowane oprogramowanie. Dzięki temu dostęp do kodów źródłowych pozwala na ich szybką modyfikację, która uwzględnia wprowadzane zmiany konstrukcyjne. Łatwo też wychwycić ograniczenia stosowanych metod symulacyjnych, ograniczenia zastosowanego modelu matematycznego oraz przeanalizować źródło błędów, które mogą pojawiać się w wynikach obliczeń. Stosowanie oprogramowania komercyjnego wymaga znacznych nakładów finansowych i jednocześnie nie pozwala na elastyczność obliczeń, która jest szczególnie istotna na etapie tworzenia nowych obiektów. Zakupione oprogramowanie nie pozwala na ingerencję w kody źródłowe. Jest ono często oparte na nie do końca czytelnie zdefiniowanych modelach matematycznych i nakłada liczne ograniczenia na prowadzone obliczenia.

Powyższe spostrzeżenia były podstawą do podjęcia decyzji o opracowaniu autorskiego oprogramowania dotyczącego zaprojektowanej w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych ćwiczebnej bomby lotniczej LBCw-10, która jest aktualnie modernizowana poprzez wprowadzenie możliwości aktywnego, automatycznego sterowania. Modernizacja ta pozwoli na korekcję toru lotu bomby [8, 9]. W szczególności planuje się możliwość osiągnięcia celów położonych w różnych miejscach na powierzchni Ziemi. W tym celu należy dobrze poznać możliwości „zasięgowe” modernizowanej bomby korygowanej oznaczonej jako LBCw-10K. Aby zasadniczo obniżyć koszty prac modernizacyjnych opracowano program symulacyjny, który został napisany w języku Fortran. Bazuje on na klasycznym modelu ruchu bryły sztywnej, na którą oddziałują siły bezwładności, siła grawitacji oraz siły aerodynamiczne [3, 4, 5]. Model ten opisuje ruch prze-

before the range tests. Results of performed simulations are a basis for estimation of main “performance” of the bombs. It includes for instance the range of airdrop and the specific time which related to the initial conditions of the dropping (velocity, elevation, angle of dropping) provide information on the designed ballistic object. A possibility for a rapid evaluation of introduced designing changes on the performance is a basic advantage of such approach.

The potential of calculating methods may be exploited in the best way if an independently developed computer code is used. It may be quickly modified to account the introduced designing changes as the access to source codes is secured. Moreover it is easy to identify the limitations of used simulating methods, mathematical models and to analyse the source of errors which may occur in the results of calculations. The use of commercial software requires serious financial resources at a limited flexibility of calculations which is especially important at the stage when new solutions are developed. The purchased software prevents any intervention into the source codes. It is often based on illegible mathematical models and imposes numerous limitations for performed calculations.

The above comments were a reason for making a decision to develop own software dedicated to a practising aircraft bomb LBCw-10 which was developed in the Air Force Institute of Technology and now is upgraded to get the capacities of active, automatic control. This upgrading provides a correction of the bomb flying path [8, 9]. It is especially focused on a possibility for reaching the targets placed on different Earth surface sites. For this reason it is essential to recognise well the “range” capacities of being upgraded controlled bomb marked as LBCw-10K. In order to reduce significantly the costs of upgrading project the simulating computer code was developed in Fortran language. It is based on a classical model of movement for a solid body subjected to actions of inertia, gravity and aerodynamical forces [3, 4, 5]. The model describes a spatial displacement of

strzenny bomby - zrezygnowano z proponowanych w literaturze uproszczeń polegających często na zmniejszeniu liczby stopni swobody obiektu balistycznego [1, 2, 10, 11, 12, 20]. Pozwala na to moc obliczeniowa współczesnych komputerów. Również siły aerodynamiczne wyznaczano stosując w miarę możliwości nieuproszczone formuły obliczeniowe. Charakterystyki aerodynamiczne wyznaczono wykorzystując oprogramowanie PRODAS [16] oraz uwzględniając charakterystyki aerodynamiczne otrzymane w wyniku badań w tunelu aerodynamicznym Wojskowej Akademii Technicznej (niepublikowane).

Efekty symulacji są na bieżąco walidowane poprzez porównanie ich z rezultatami przeprowadzonych już prób poligonowych oraz z wynikami symulacji trajektorii przy pomocy programu PRODAS. Pozwala to też na „dostrojenie” opracowanego programu komputerowego.

Podjęto również decyzję o uzupełnieniu kodów obliczeniowych o model pola wiatru, który oddziałuje na zrzucaną bombę [6, 7, 14, 17, 18]. Jest to ważne ze względu na możliwość istotnego wpływu wiatru na tor lotu bomby. Model ten umożliwi uwzględnienie wiatru „stałego” którego prędkość zależy tylko od wysokości oraz składowej turbulentnej. W tym drugim przypadku zastosowano stochastyczny model pola wiatru dający wyniki o charakterze stochastycznym. Według wiedzy autorów takie podejście nie jest często stosowane w analizach z zakresu balistyki zewnętrznej, i szerzej mechaniki lotu. Opracowując moduł obliczeniowy pola turbulencji wykorzystano doświadczenia w tym zakresie jednego z autorów niniejszej publikacji.

W zamysłu autorów niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie fragmentu badań i prac modernizacyjnych bomby lotniczej prowadzonych w ITWL. Ponieważ jest to pierwsza publikacja dotycząca tych prac postanowiono przedstawić w niej dokładny opis zastosowanego modelu matematycznego ruchu bomby uwzględniając zarówno część „bezwładnościową” jak i część dotyczącą sił zewnętrznych. Zaprezentowanie w jednym miejscu możliwie pełnego modelu matematycznego pozwoli na merytoryczne przedstawienie kolejnych wyników badań i skupienie się w następnych publikacjach na analizie wpływu wprowadzanych zmian konstrukcyjnych (w szczególności aktywnego systemu sterowania)

the bomb – the simplifications proposed in literature were omitted as they often reduce the number of freedom degrees for a ballistic object [1, 2, 10, 11, 12, 20]. It is allowed by computation power of present computers. The aerodynamical forces were also identified by using mostly complete calculating formulae. The aerodynamic characteristics were identified by using the computer code PRODAS [16] and by accounting the aerodynamic characteristics received as a result of tests performed in the aerodynamic tunnel in the Military University of Technology (unpublished).

Effects of conducted simulations are constantly validated by comparing them with the results of range trials which have been already performed and the results of trajectory simulations exploiting the PRODAS software. It provides also an “adjustment” of the developed computer code.

Moreover a decision was made to complement the calculating codes by a model of wind field acting against the dropped bomb [6, 7, 14, 17, 18]. It is important as the wind may significantly affect the flying path of the bomb. The model accounts both the “steady” wind depending only on the altitude and also a turbulent component. In the second case a stochastic model of the wind field was deployed to get results of stochastic character. According to opinion of authors such approach is rather rarely used at analyses of external ballistics and wider aspects of flight mechanics. The experience accumulated by one of the authors of the present publication was used at development of calculating module for the field of turbulence.

Present paper is aimed to show a part of tests and upgrading work on the aircraft bomb conducted in the AFIT. As it is a first publication concerning this work then it was decided to present a detailed description of used mathematical model of bomb movement accounting both the “inertial” and external forces as well. Such presentation of a possibly complete mathematical model may allow a more comprehensive description of successive test results and focusing the next publications on studying the impact of introduced design changes (especially the active

na właściwości dynamiczne bomby. Należy podkreślić, że nie jest celem niniejszej publikacji dokładna analiza stosowanych w przeszłości i obecnie modeli ruchu bomby. Takie porównania można znaleźć w szeregu różnych artykułów i książek.

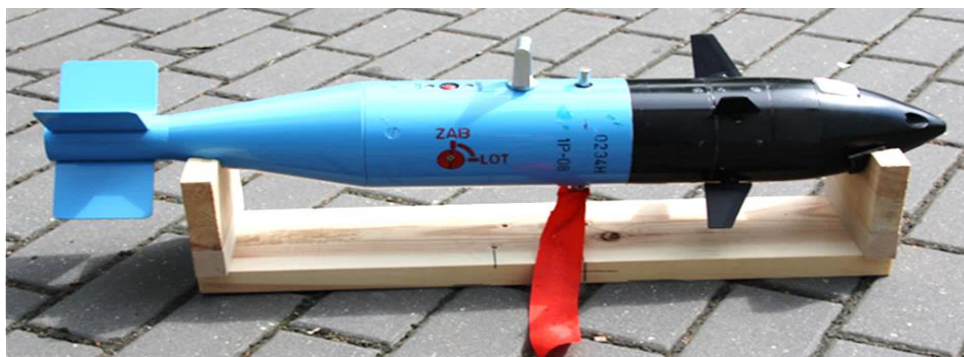
2. Podstawowe dane bomby LBĆw -10K

Lotnicza ćwiczebna bomba korygowana LBĆw-10K przeznaczona jest do szkolenia personelu latającego w bombardowaniu z użyciem bomb z laserowym układem korekcji lotu. Pokazano ją na rysunku 1. Została ona opracowana na bazie bomby LBĆw-10. Modyfikacja polega na zabudowaniu na korpusie bomby dwóch par sterów, które pozwalają na aktywną korekcję toru lotu. W przedniej części bomby umieszczono też cztery detektory pozwalające na wykrycie podświetlonego laserem celu. Wewnątrz korpusu umieszczono układy przeliczające i wykonawcze wypracowujące sygnały sterujące wychyleniem sterów.

control system) on dynamic characteristics of the bomb. It has to be stressed that a detailed analysis of bomb movement models used in the past and now is not any purpose of this publication. Such comparisons may be found in numerous papers and books.

2. Basic Data of LBCw -10K Bomb

The practising controlled air bomb LBCw-10K is designated for training the flight personnel on bombing by using the bombs with laser controlled flight path. It is shown in Fig. 1. It was developed on the base of LBCw-10 bomb. The modification concerns the integration of two couples of steering fins on the bomb frame to provide active correction of the flight path. Moreover in the front part of the bomb four detectors were integrated for detection of a target illuminated by laser. Inside of the frame the recalculating and executive units are imbedded to work out the signals controlling the inclinations of steering fins.



Rys. 1. LBĆw-10K – widok ogólny

Fig. 1. LBCw-10K – general view

Podstawowe dane techniczne i możliwości taktyczno-techniczne bomby są następujące:

- długość 850 mm,
- średnica korpusu 109,7 mm,
- rozpiętość stabilizatorów 212 mm,
- masa 15,5 kg,
- system naprowadzania laserowy,
- kąt wizowania $\pm 15^\circ$,
- napęd sterów elektryczny,
- prędkość maksymalna opadania 329 m/s,

The main tactical-technical performance of the bomb are presented below:

- Length 850 mm,
- Diameter of frame 109.7 mm,
- Size of stabilisers 212 mm,
- Weight 15.5 kg,
- Guiding system laser type,
- Scanning angle $\pm 15^\circ$,
- Drive of steering fins electric,
- Max. dropping velocity 329 m/s,

– czas charakterystyczny¹ 20,8 s.

– Specific time² 20.8 s.

3. Model ruchu bomby korygowanej

3.1. Założenia

W celu analizy dynamiki ruchu bomby przyjęto założenia dotyczące jej charakterystyk masowych i geometrycznych. Pokrywają się one z założeniami stosowanymi w mechanice ogólnej w odniesieniu do bryły sztywnej, z uwzględnieniem specyfiki geometrii badanego obiektu. W szczególności założono, że:

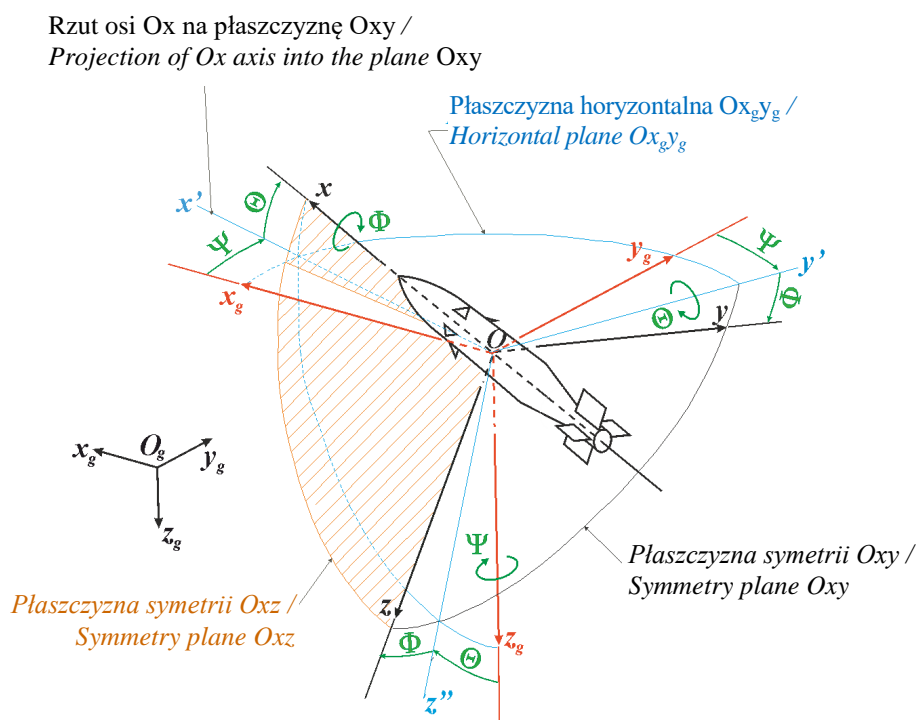
- 1) bomba jest bryłą sztywną o stałej masie i momentach bezwładności oraz o niezmiennym położeniu środka masy;
- 2) bomba ma 6 stopni swobody - trzy określają położenie jej środka masy w przestrzeni zaś trzy pozostałe definiują jej przestrzenną konfigurację względem układu inercyjnego;
- 3) korpus bomby jest osiowo-symetryczny;

3. Controlled Bomb Motion Model

3.1. Assumptions

Following assumptions were taken for bomb's weight and geometric characteristics to analyse the dynamics of its movement. They are in line with the assumptions used in general mechanics for the solid body. It was particularly assumed that:

- 1) The bomb is a rigid body with constant weight and moment of inertia and centre of the weight;
- 2) The bomb has 6 degrees of freedom – three of them define the position of its weight centre and three remaining ones define its spatial orientation against the inertial system;
- 3) The bomb frame has axial symmetry;



Rys. 2. Układy współrzędnych $O_g x_g y_g z_g$, $O x y z$ i $O x' y' z'$ oraz kąty transformacji
 Fig. 2. Systems of coordinates $O_g x_g y_g z_g$, $O x y z$ and $O x' y' z'$ and angles of transformation

¹ Czas charakterystyczny, to czas upadku z wysokości 2000 metrów przy zrzucie poziomym z prędkością 40 m/s w warunkach atmosfery wzorcowej.

² Specific time is a time for falling from elevation of 2000 m at horizontal dropping with velocity of 40 m/s in conditions of Standard Atmosphere.

- 4) płaszczyznami symetrii geometrycznej, masowej i aerodynamicznej są płaszczyzny Oxy i Oxz (rys.2) pokrywające się z płaszczyznami usterzenia ogonowego i niewychylonych sterów.

3.2. Układy współrzędnych i ich transformacje

W literaturze można znaleźć różne układy współrzędnych stosowane do opisu ruchu bomby. Ta różnorodność wynika z faktu, że w różnych publikacjach wzorowano się na różnych materiałach źródłowych. Nie wnikając w szczegóły łatwo zauważyć, że zasadnicza różnica dotyczy publikacji „zachodnich” i rosyjskich (radzieckich) [3, 4, 5, 13]. Dlatego, również w publikacjach i monografiach polskich autorów, znaleźć można układy współrzędnych różniące się między sobą, zwrotem i oznaczeniem osi. W niniejszej publikacji wykorzystano układy wprowadzone do mechaniki lotu Polską Normą [15]. Są to:

$Oxyz$ - nieinercjalny układ związany z bombą o początku w środku masy bomby;

$Ox_a y_a z_a$ - nieinercjalny układ związany z przepływem o początku w środku masy bomby;

$O_g x_g y_g z_g$ - inercjalny układ związany z Ziemią o początku w wybranym punkcie na powierzchni Ziemi;

$Ox_g y_g z_g$ - układ o osiach równoległych do osi układu $O_g x_g y_g z_g$ o początku w środku masy bomby.

Układy te pokazano na rysunkach 2 i 3. Powiązane są one ze sobą następującymi kątami:

- układ $Oxyz$ i $Ox_g y_g z_g$ – poprzez kąty: kąt odchylenia Ψ , kąt pochylenia Θ , kąt przechylenia Φ ;

- układ $Oxyz$ i $Ox_a y_a z_a$ – poprzez kąty: kąt ślizgu β , kąt natarcia α .

Znajomość wymienionych powyżej kątów pozwala na przeliczanie sił i momentów pomiędzy poszczególnymi układami. Transformację dowolnego wektora z układu $Ox_g y_g z_g$ do układu $Oxyz$ wykonuje się przez sekwencję obrotów o kąty Ψ , Θ , Φ . Przeliczenie można zapisać w postaci:

- 4) Planes Oxy and Oxz (Fig. 2) are the planes of geometrical, mass and aerodynamic symmetries coinciding with planes of the tail feathering and the steering fins in neutral position.

3.2. Systems of Coordinates and Their Transformations

Different systems of coordinates used for description of bomb movement may be found in literature. The variety is caused by the fact that various publications follow different sources. In general the main difference concerns the “Western” and Russian (Soviet) publications [3, 4, 5, 13]. For this reasons also in publications and monographs of Polish authors the systems of coordinates may be found with different senses and designation of axes. The present publication deploys the systems introduced into the mechanics of flight by the Polish Standard [15]. They are listed below:

$Oxyz$ – not inertial system connected with bomb and originating in bomb mass centre;

$Ox_a y_a z_a$ – not inertial system connected with the flow and originating in bomb mass centre;

$O_g x_g y_g z_g$ - inertial system connected with the Earth and originating in a specific point of its surface;

$Ox_g y_g z_g$ – system with the axes parallel to axes of $O_g x_g y_g z_g$ system and the origin placed in the bomb mass centre.

The systems are shown in Fig. 2 and 3. They are coupled with each other by the following angles:

- systems $Oxyz$ and $Ox_g y_g z_g$ – through angles: the yaw angle Ψ , the pitching angle Θ , the rolling angle Φ ;

- systems $Oxyz$ and $Ox_a y_a z_a$ – by the angles: the sliding angle β , the attacking angle α .

Knowledge of above angles allows for recalculation of forces and moments between particular systems. Conversion of any vector from $Ox_g y_g z_g$ to $Oxyz$ system is performed through a sequence of rotations by the angles Ψ , Θ , Φ . The recalculation may be recorded in form:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L_{b/g} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie macierz transformacji $L_{b/g}$ jest równa:

$$L_{b/g} = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \\ \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Transformacja dowolnego wektora z układu $Ox_a y_a z_a$ do układu $Oxyz$ ma postać:

where the conversion matrix $L_{b/g}$ equals to:

Conversion of any vector from $Ox_a y_a z_a$ system to $Oxyz$ system has a form:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L_{b/a} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (3)$$

Wykorzystuje się tu kąty α i β tworząc macierz przejścia $L_{b/a}$ o następującej postaci:

The angles α and β are used to create the transition matrix $L_{b/a}$ of following form:

$$L_{b/a} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4)$$

3.3. Ogólna postać równań ruchu bomby

Do określenia równań ruchu bomby zastosowano drugą zasadę dynamiki Newtona. To klasyczne podejście pozwala opisać ruch bryły sztywnej w inercyjnym układzie odniesienia. W omawianych badaniach przyjęto, że układem tym jest układ współrzędnych związanym z bombą $Oxyz$. Ze względu na powszechność takiego podejścia, poniżej przypomniano tylko końcową postać równań ruchu postępowego i obrotowego, które uzupełniono związkami kinematycznymi. Jest to niezbędne do właściwego przedstawienia problemu, który jest rozwiązywany poprzez symulacje numeryczne.

3.3.1. Równanie ruchu postępowego

Wektorowe równanie ruchu postępowego środka masy bomby ma postać:

3.3. General Form of Bomb Movement

Second principle of Newton dynamics was used to formulate bomb motion equations. This classical approach describes the movement of solid body in inertial system of reference. It was assumed in presented studies that this system is the system of coordinates $Oxyz$ connected with the bomb. As this approach is commonly used, below are shown only final forms of progressive and rotating movements which were complemented by cinematic relations. It is needed for a proper formulation of the question as its solution is found by the numerical simulations.

3.3.1. Progressive Movement Equation

Vector equation of progressive movement for the bomb centre of mass has a form:

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \frac{\delta(m\mathbf{V})}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times (m\mathbf{V}) = \mathbf{F} \quad (5)$$

d/dt jest pochodną względem czasu w układzie inercyjnym, zaś $\delta/\delta t$ pochodną w układzie

d/dt is the time derivative in the inertial system whereas $\delta/\delta t$ is a derivative in the not

nieinercyjnym $Oxyz$, która dalej będzie oznaczana kropką nad różniczkowanymi wielkościami.

Uwzględniając, że masa bomby m jest stała oraz że występujące w równaniu (5) wektory: prędkości liniowej \mathbf{V} , prędkości kątowej $\mathbf{\Omega}$ oraz sił zewnętrznych \mathbf{F} (wypadkowa siły ciężkości i siły aerodynamicznej) mają w układzie $Oxyz$ następujące składowe:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

otrzymuje się trzy równania skalarne o postaci:

$$\begin{aligned} m(\dot{U} + QW - RV) &= F_x \\ m(\dot{V} + RU - PW) &= F_y \\ m(\dot{W} + PV - QU) &= F_z \end{aligned} \quad (7)$$

Należy podkreślić, że w założeniu, w którym przyjęto stwierdzenie, że układ $O_{g^x g^y g^z}$ jest inercyjny i równanie (5) dotyczy tego układu, oznacza pominięcie wszystkich efektów związanych z ruchem obrotowym Ziemi, w szczególności nie uwzględnia się siły Coriolisa.

3.3.2. Równania ruchu obrotowego

Wektorowe równanie ruchu obrotowego względem środka masy bomby ma następującą postać:

$$\frac{d(\mathbf{K})}{dt} = \frac{\delta(\mathbf{K})}{\delta t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M} \quad (8)$$

gdzie:

\mathbf{M} - moment sił działających na bombę, który w układzie współrzędnych $Oxyz$ ma następujące składowe $\mathbf{M} = [L, M, N]^T$,

gdzie: L - moment przechylający, M -moment pochylający, N -moment odchylający.

Wektor krętu dla bomby jest równy:

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (9)$$

gdzie tensor momentów bezwładności \mathbf{I} jest określony następująco:

inertial $Oxyz$ system which will be later marked by a dot put over the differentiated values.

Considering that the mass of the bomb m is constant and the vectors present in the equation (5): the linear velocity \mathbf{V} , the angular velocity $\mathbf{\Omega}$ and the external forces \mathbf{F} (resultant of gravity and aerodynamic forces) have following components in $Oxyz$ system:

Three scalar equations are received in form:

It has to be stressed that in consequence of assumption that the $O_{g^x g^y g^z}$ system is inertial and the equation (5) refers to this system all effects connected with the Earth rotation are omitted what especially means that the Coriolis force is not considered.

3.3.2. Rotary Motion Equations

Vector equation of rotary motion against the bomb mass centre has the following form:

where:

\mathbf{M} - moment of forces acting on the bomb which in the $Oxyz$ coordinate system has the following components $\mathbf{M} = [L, M, N]^T$,

where: L - rolling moment, M - pitching moment, N - yawing moment.

Spinning vector for the bomb equals to:

where the tensor of inertia moments \mathbf{I} is formulated as:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Uwzględniając opisane w założeniach symetrie bomby, wszystkie dewiacyjne momenty bezwładności są równe zero:

Accounting the symmetries of the bomb described in assumptions all deviating moments of inertia equal to zero:

$$I_{xy}, I_{yx}, I_{zy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{xz} = 0 \quad (11)$$

Zatem odpowiadające równaniu (8) trzy równania skalarne opisujące ruch obrotowy wokół poszczególnych osi układu $Oxyz$ mają postać:

Then three scalar equations corresponding to relation (8) and describing the rotary motion around particular axes of $Oxyz$ system have the form:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{I_x} L \\ \dot{Q} &= \frac{1}{I_y} [M - PR(I_x - I_z)] \\ \dot{R} &= \frac{1}{I_z} [N - PQ(I_y - I_x)] \end{aligned} \quad (12)$$

Układ równań (7) i (12) uzupełnia się związkami kinematycznymi pozwalającymi obliczyć prędkość zmian kątów Φ , Θ , Ψ w oparciu o znajomość prędkości kątowych P , Q , R :

System of equations (7) and (12) is complemented by kinematic relations for calculating the rate of changes for angles Φ , Θ , Ψ basing on known angular velocities P , Q , R :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= P + (R \cos\Phi + Q \sin\Phi) \operatorname{tg}\Theta \\ \dot{\Theta} &= Q \cos\Phi - R \sin\Phi \\ \dot{\Psi} &= (R \cos\Phi + Q \sin\Phi) \frac{1}{\cos\Theta} \end{aligned} \quad (13)$$

Dodatkowo, wykorzystując macierz transformacji (2), określa się składowe wektora prędkości środka masy bomby w układzie $Ox_g y_g z_g$:

Additionally by using the conversion matrix (2) the bomb mass centre velocity components vector is identified in $Ox_g y_g z_g$ system:

$$\begin{bmatrix} U_g \\ V_g \\ W_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} L_{b/g}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (14)$$

W efekcie otrzymujemy układ 12 równań różniczkowych zwyczajnych z 12 niewiadomymi stanowiącymi wektor parametrów lotu:

Finally a system of 12 regular differential equations is received with 12 unknowns creating a vector of flight characteristics:

$$\mathbf{x}(t) = [U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi, x_g, y_g, z_g]^T \quad (15)$$

gdzie:

U , V , W - składowe prędkości lotu bomby względem układu inercyjnego w układzie

where:

U , V , W - components of bomb flight velocity against the inertial system in $Oxyz$

$Oxyz$;

P, Q, R - prędkości kątowe przechylenia, pochylenia i odchylenia w układzie $Oxyz$;

Φ, Θ, Ψ - kąty: przechylenia, pochylenia i odchylenia;

x_g, y_g, z_g - współrzędne środka masy bomby w układzie $O_gx_gy_gz_g$.

3.4. Siły i momenty działające na bombę

Określone zostaną teraz składowe sił zewnętrznych działających na bombę oraz moment sił zewnętrznych. Siła wypadkowa \mathbf{F} jest równa sumie ciężaru bomby \mathbf{Q} oraz siły aerodynamicznej \mathbf{R} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} + \mathbf{R} \quad (16)$$

Jej składowe w układzie $Oxyz$ są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} F_x &= Q_x + R_x \\ F_y &= Q_y + R_y \\ F_z &= Q_z + R_z \end{aligned} \quad (17)$$

Na siłę aerodynamiczną \mathbf{R} składają się: 1. siła oporu P_{xa} o kierunku zgodnym z wektorem prędkości i zwrocie przeciwnym do wektora prędkości bomby względem powietrza \mathbf{V}_{aer} , 2. siła nośna P_{za} prostopadła do wektora prędkości, leżąca w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie Ox i Ox_a . Pokazano je na rysunku 3. Wartości tych sił zależą od kąta nutacji δ , który nazwać można przestrzennym kątem natarcia bomby.

Ze względu na to, że równanie (8) dotyczy ruchu obrotowego względem środka masy jedynymi siłami, które wywołują obrót bomby są siły aerodynamiczne. Są one źródłem momentu statycznego \mathbf{M}_{st} działającego w płaszczyźnie oporu wyznaczonej przez osie Ox i Ox_a . Siły aerodynamiczne powodują też powstanie dynamicznych momentów tłumiących ruch obrotowy bomby \mathbf{M}_{dyn} . Jeżeli występuje niesymetria bomby, to pojawia się moment przechylający \mathbf{L} zaznaczony na rysunku 3. Wszystkie te momenty dają moment wypadkowy oznaczony w równaniu (8) jako \mathbf{M} .

Sposób wyznaczania składowych siły aerodynamicznej w układzie $Oxyz$, w którym

system;

P, Q, R – angular velocities of rolling, pitching and yawing in $Oxyz$ system;

Φ, Θ, Ψ – angles of rolling, pitching and yawing;

x_g, y_g, z_g – coordinates of the bomb mass centre in $O_gx_gy_gz_g$ system.

3.4. Forces and Moments Acting on the Bomb

Components of external forces acting on the bomb and the moment of external forces will be identified next. The resulting force \mathbf{F} equals to the sum of bomb weight \mathbf{Q} and aerodynamic force \mathbf{R} :

Its components in $Oxyz$ system are respectively equal to:

The aerodynamic force \mathbf{R} consists of: 1. The drag force P_{xa} with direction identical to the vector of bomb velocity against the air \mathbf{V}_{aer} and the sense opposite to it, 2. The lifting force P_{za} perpendicular to the velocity vector and placed in the plane identified by the axes Ox and Ox_a . They are shown in Fig. 3. The values of these forces depend on the angle of nutation δ which may be named as a spatial attacking angle of the bomb.

As the equation (8) relates to the rotary motion against the mass centre then the aerodynamic forces are exclusively the ones which make the bomb rotate. They are a source of a static moment \mathbf{M}_{st} acting in the plane of drag identified by the axes Ox and Ox_a . The aerodynamic forces also generate dynamic moments \mathbf{M}_{dyn} suppressing the rotary motion of the bomb. Any asymmetry of the bomb makes a rolling moment \mathbf{L} marked in Fig. 3 appear. All these moments generate a resultant moment marked in the equation (8) by \mathbf{M} .

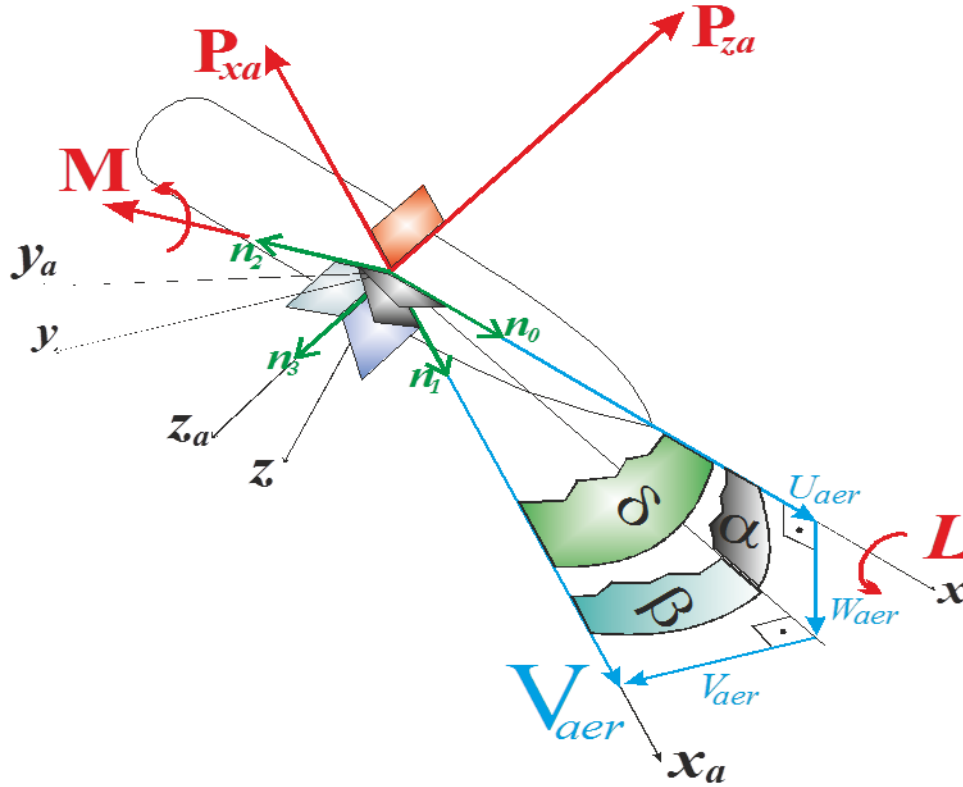
Aerodynamic force components are identified in $Oxyz$ system, in which equations (7)

określono równania (7) jest następujący:

1. Definiujemy wektor jednostkowy \mathbf{n}_0 zgodny z osią Ox , który ma w układzie związanym z bombą $Oxyz$ składowe $\mathbf{n}_0=[1, 0, 0]^T$.

were formulated, in following way:

1. The unity vector \mathbf{n}_0 is defined along the axis Ox with components $\mathbf{n}_0=[1, 0, 0]^T$ in $Oxyz$ system connected with bomb.



Rys. 3. Siły i momenty działające na bombę

Fig. 3. Forces and moments acting into the bomb

2. Tworzymy wektor jednostkowy $\mathbf{n}_1=[n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]^T$ zgodny z osią Ox_a (wektor prędkości bomby względem powietrza \mathbf{V}_{aer}). Jego składowe w układzie $Oxyz$ można obliczyć znając składowe prędkości $\mathbf{V}_{aer}=[U_{aer}, V_{aer}, W_{aer}]^T$:

2. The unity vector $\mathbf{n}_1=[n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]^T$ along the axis Ox_a is created (the bomb velocity vector against the air \mathbf{V}_{aer}). Its components in $Oxyz$ system may be calculated by knowing the velocity components $\mathbf{V}_{aer}=[U_{aer}, V_{aer}, W_{aer}]^T$:

$$\begin{aligned}
 n_{1x} &= \frac{U_{aer}}{\sqrt{U_{aer}^2 + V_{aer}^2 + W_{aer}^2}} \\
 n_{1y} &= \frac{V_{aer}}{\sqrt{U_{aer}^2 + V_{aer}^2 + W_{aer}^2}} \\
 n_{1z} &= \frac{W_{aer}}{\sqrt{U_{aer}^2 + V_{aer}^2 + W_{aer}^2}}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Wektor \mathbf{n}_1 określa kierunek siły oporu bomby P_{xa} (przeciwny zwrot).

Vector \mathbf{n}_1 describes direction of bomb drag force P_{xa} (opposite sense).

3. Określamy kąt nutacji pomiędzy wektorem prędkości i podłużną osią bomby:

3. The angle of nutation is identified between the velocity vector and the main bomb axis:

$$\delta = \arccos(n_{1x}) \quad (19)$$

4. Tworzymy wektor jednostkowy $\mathbf{n}_2 = [n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}]^T$ prostopadły do płaszczyzny oporu utworzonej przez osie Ox i Ox_a . Można go obliczyć z iloczynu wektorowego wektorów \mathbf{n}_1 i \mathbf{n}_0 .
4. The unity vector $\mathbf{n}_2 = [n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}]^T$ is created as perpendicular to the plane of resistance made from axes Ox and Ox_a . It may be calculated as a vector product of \mathbf{n}_1 and \mathbf{n}_0 vectors.

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(n_{1z})^2 + (n_{1y})^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ n_{1z} \\ -n_{1y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Wektor \mathbf{n}_2 określa oś, względem której działa moment pochylający M .

The pitching moment M acts against the axis described by vector \mathbf{n}_2 .

5. Tworzymy wektor jednostkowy $\mathbf{n}_3 = [n_{3x}, n_{3y}, n_{3z}]^T$ prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory \mathbf{n}_1 i \mathbf{n}_2 . Można go obliczyć z iloczynu wektorowego:
5. The unity vector $\mathbf{n}_3 = [n_{3x}, n_{3y}, n_{3z}]^T$ is created as perpendicular to the plane made by the vectors \mathbf{n}_1 and \mathbf{n}_2 . It may be calculated as a vector product:

$$\mathbf{n}_3 = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|} \quad (21)$$

6. Znając prędkość dźwięku a i prędkość względem powietrza $|\mathbf{V}_{aer}|$ obliczamy liczbę Macha:
6. Knowing the velocity of sound a and the velocity against the air $|\mathbf{V}_{aer}|$ the Mach number is calculated:

$$Ma = \frac{|\mathbf{V}_{aer}|}{a} \quad (22)$$

7. Obliczamy wartości składowych sił aerodynamicznych:
7. The values of aerodynamic forces components are calculated:

$$P_{xa} = C_{xa} \frac{\rho |\mathbf{V}_{aer}|^2}{2} S, \quad P_{za} = C_{za} \frac{\rho |\mathbf{V}_{aer}|^2}{2} S \quad (23)$$

gdzie: ρ - gęstość powietrza; C_{xa} , C_{za} - współczynniki sił aerodynamicznych; S - przekrój poprzeczny bomby.

where: ρ - the air density; C_{xa} , C_{za} - the aerodynamic forces coefficients; S - the bomb cross section.

Współczynniki $C_{xa}(\delta, Ma)$ i $C_{za}(\delta, Ma)$ otrzymano wykorzystując oprogramowanie PRODAS w oparciu o zaprojektowaną i wprowadzoną do programu geometrię badanej bomby [9, 16]. W zakresie małych liczb Macha charakterystyki te weryfikowano dodatkowo w oparciu o badania w tunelu aerodynamicznym. Współczynniki te można przedstawić w postaci:

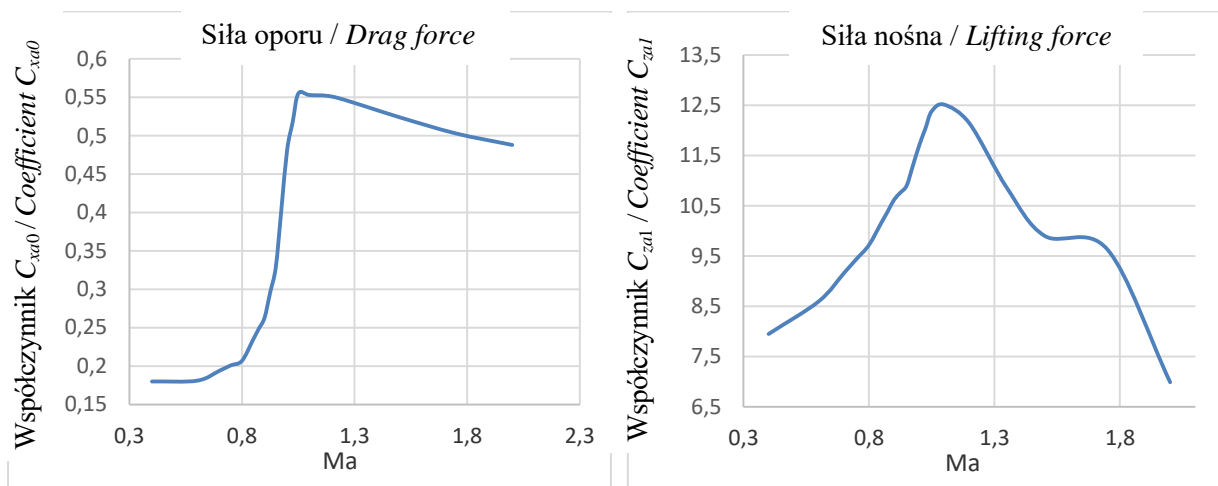
The coefficients $C_{xa}(\delta, Ma)$ and $C_{za}(\delta, Ma)$ were received by using PRODAS software and on the basis of the geometry of studied bomb which was designed and entered into computer [9, 16]. These characteristics were additionally verified by tests in aerodynamic tunnel for low values of Mach number. These coefficients may be represented in form:

$$C_{xa} = C_{xa0} + C_{xa2} \sin^2 \delta \quad (24)$$

$$C_{za} = C_{za1} \sin \delta + C_{za3} \sin^3 \delta \quad (25)$$

Przykładowe przebiegi współczynników $C_{xa0}(Ma)$ i $C_{za1}(Ma)$ przedstawiono na rys. 4.

The exemplary graphs of coefficients $C_{xa0}(Ma)$ and $C_{za1}(Ma)$ are shown in Fig. 4.



Rys. 4. Współczynniki siły aerodynamicznej
Fig. 4. Coefficients of aerodynamic forces

8. Obliczamy składowe siły oporu P_{xa} w układzie $Oxyz$:

8. Components of drag force P_{xa} are calculated in $Oxyz$ system:

$$P_{xa_x} = -P_{xa} \cdot n_{1x} \quad P_{xa_y} = -P_{xa} \cdot n_{1y} \quad P_{xa_z} = -P_{xa} \cdot n_{1z} \quad (26)$$

Składowe te można też obliczyć wykorzystując, zgodnie z wzorem (3), macierz $L_{b/a}$. Wymaga to znajomości kąta natarcia α i kąta ślizgu β . Sposób ich obliczenia będzie podany dalej.

These components may be also calculated by using the matrix $L_{b/a}$ according to (3). The values of the attacking α and the sliding β angles are needed for it. A way of their calculation will be given later.

9. Obliczamy składowe siły P_{za} w układzie $Oxyz$:

9. Components of P_{za} force are calculated in $Oxyz$ system:

$$P_{za_x} = -P_{za} \cdot n_{3x} \quad P_{za_y} = -P_{za} \cdot n_{3y} \quad P_{za_z} = -P_{za} \cdot n_{3z} \quad (27)$$

10. Obliczamy składowe siły aerodynamicznej w układzie $Oxyz$:

10. Components of aerodynamic force are calculated in $Oxyz$ system:

$$R_x = P_{xa_x} + P_{za_x} \quad R_y = P_{xa_y} + P_{za_y} \quad R_z = P_{xa_z} + P_{za_z} \quad (28)$$

11. Ciężar bomby \mathbf{Q} ma w układzie $Ox_gy_gz_g$ tylko jedną składową $\mathbf{Q} = [0, 0, mg]^T$. Wykorzystując transformację (1) możemy obliczyć składowe ciężaru w układzie $Oxyz$:

11. The bomb weight \mathbf{Q} has only one component $\mathbf{Q} = [0, 0, mg]^T$ in $Ox_gy_gz_g$ system. Using conversion (1) weight components in $Oxyz$ system may be calculated:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = L_{b/g} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (29)$$

12. Wypadkowy wektor momentu sił aerodynamicznych \mathbf{M} pokazany na rysunku 3 działający na bombę obraca bombę w płaszczyźnie oporu wyznaczonej przez osie Ox i Ox_a . Moment ten w układzie $Oxyz$ ma składowe:

$$\begin{aligned} M &= C_m n_{2y} \frac{\rho |V_{aer}|^2}{2} Sd + (C_{mq} + C_{m\dot{a}}) \left(\frac{Qd}{|V_{aer}|} \right) \frac{\rho |V_{aer}|^2}{2} Sd \\ N &= C_m n_{2z} \frac{\rho |V_{aer}|^2}{2} Sd + (C_{nq} + C_{n\dot{a}}) \left(\frac{Rd}{|V_{aer}|} \right) \frac{\rho |V_{aer}|^2}{2} Sd \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie: d - jest średnicą bomby, C_m - współczynnik momentu pochylającego działającego w płaszczyźnie oporu.

Pierwsze składniki w formułach (30) dotyczą momentu statycznego \mathbf{M}_{st} , zaś drugie dynamicznego momentu tłumiącego \mathbf{M}_{dyn} .

13. Jeżeli występuje niesymetria bomby, to uwzględnić należy też moment przechylający:

$$L = C_l \frac{\rho |V_{aer}|^2}{2} Sd \quad (31)$$

C_l - współczynnik momentu przechylającego.

Dla bomby korygowanej, momenty względem osi Oy i Oz uzupełnia się momentami od wychylonych sterów. Możliwe jest też wymuszenie dodatkowego momentu przechylającego przez różnicowym wychyleniu sterów.

4. Prędkość bomby względem powietrza

W wyrażeniach (23), (30) i (31), w oparciu o które oblicza się siłę oporu, siłę nośną oraz momenty działające na bombę występuje prędkość bomby względem powietrza V_{aer} . Prędkość ta stanowi różnicę między prędkością bezwzględną bomby \mathbf{V} i prędkością wiatru \mathbf{V}_w

12. The resultant vector for the moment \mathbf{M} of aerodynamic forces, shown in Fig. 3, acting on the bomb makes it rotate in the drag plane identified by axes Ox and Ox_a . The moment has following components in $Oxyz$ system:

where: d - the diameter of bomb, C_m - the coefficient of pitching moment acting in the plane of drag.

First parts in formulae (30) refer to static moment \mathbf{M}_{st} and the second ones to the dynamic suppressing moment \mathbf{M}_{dyn} .

13. If any asymmetry of the bomb exists then also a rolling moment has to be accounted:

C_l - the coefficient of rolling moment.

In the case of controlled bomb the moments around axes Oy and Oz are complemented by the moments provided by shifted steering fins. It is also possible to enforce an additional rolling moment at differential positions of steering fins.

4. Bomb Velocity against Air

The velocity of bomb against the air V_{aer} appears in expressions (23), (30) and (31) used for calculation of the drag force, the lifting force and the moments acting on the bomb. This velocity is a difference between the absolute velocity of bomb \mathbf{V} and velocity of wind \mathbf{V}_w

$$\mathbf{V}_{aer} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_w \quad (32)$$

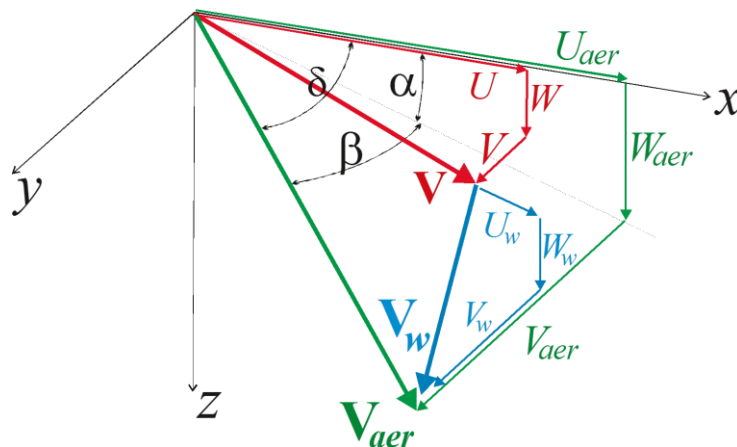
Na rysunku 5 przedstawiono wszystkie prędkości, ich składowe oraz kąty natarcia i ślizgu. Uwzględnienie prędkość wiatru V_w umożliwia badanie lotu bomby w zmiennych warunkach atmosferycznych. Kąt natarcia i kąt ślizgu określone są wyrażeniami:

Fig. 5 shows all velocities, their components and angles of attack and slide.

The consideration of the wind velocity V_w allows the investigations of bomb flight at changeable atmospheric conditions. Angles of attack and slide are expressed by:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W_{aer}}{U_{aer}}\right) = \arctan\left(\frac{W - W_w}{U - U_w}\right) \quad (33)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{V - V_w}{\sqrt{(U - U_w)^2 + (W - W_w)^2}}\right) \quad (34)$$



Rys. 5. Określenie kątów natarcia i ślizgu

Fig. 5. Identification of angles of attack and slide

5. Stochastyczny model turbulencji

Istotnym elementem symulacji jest model wiatru przyjęty do obliczeń. Jest to model stochastyczny. Zakłada się w nim, że prędkość wiatru zmienia się w czasie i w przestrzeni:

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{V}_w(t, x_g, y_g, z_g) \quad (35)$$

Prędkość ta jest określona najczęściej w układzie $O_g x_g y_g z_g$. Przyjmuje się że wiatr ma składową stałą i turbulentną, co można przedstawić następująco:

$$\mathbf{V}_w(t, x_g, y_g, z_g) = \mathbf{V}_w \text{sr}(x_g, y_g, z_g) + \mathbf{V}_w \text{turb}(t, x_g, y_g, z_g) \quad (36)$$

Składowa stała wiatru jest równa jego wartości średniej, która zgodnie z badaniami zależy tylko od wysokości nad powierzchnią Ziemi H . W literaturze [np. 7] znaleźć można następującą formułę opisującą tą relację:

$$V_{w \text{sr}}(H) = \begin{cases} V_{10} \left(\frac{H}{10}\right)^\alpha & \text{dla } H \leq H_g \\ V_{10} \left(\frac{H_g}{10}\right)^\alpha & \text{dla } H > H_g \end{cases} \quad (37)$$

gdzie: V_{10} jest średnią dziesięciominutową prędkością na wysokości 10 metrów, otrzyma-

5. Stochastic Model of Turbulences

A model of the wind taken for calculations is a significant part of simulation. It is the stochastic model. It assumes that the velocity of wind changes in time and space:

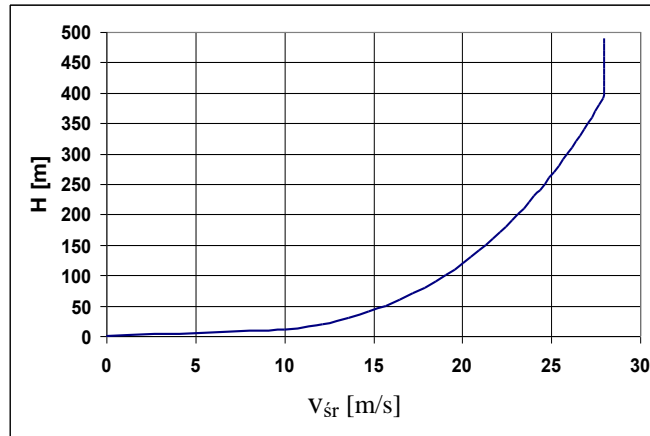
This velocity is usually determined in $O_g x_g y_g z_g$ system. It is accepted that the wind has both constant and turbulent components what may be expressed in a following way:

The constant component of the wind equals to its average value which according to investigations depends only on the elevation above the Earth surface H . A following formula may be found in literature [e.g. 7] for describing this relation:

where: V_{10} is an average velocity within 10 minutes received by measurements; H_g

ną z pomiarów; H_g waha się w przedziale 270÷500 metrów, zaś wykładnik potęgi w przedziale 0,16÷0,4 w zależności od rodzaju terenu. Kierunek i zwrot wektora $\mathbf{V}_{w \dot{s}r}$ można ustalić dowolnie.

changes in interwall of 270÷500 m, and the exponent of the power in the range 0.16÷0.4 depending on the character of terrain. Any direction and sense of vector $\mathbf{V}_{w \dot{s}r}$ may be settled.



Rys. 6. Profil składowej stałej wiatru

Fig. 6. Profile of wind constant component

Do opisu fluktuacji prędkości wiatru można wykorzystać metody stochastyczne. Jeżeli turbulencja ma charakter stacjonarny tzn. jej opis statystyczny jest niezmienny w czasie, to można do jej zamodelowania wykorzystać metodę Shinozukiego [14, 17, 18]:

The fluctuations of wind velocity may be described by stochastic methods. If a turbulence has a stationary character, i.e. its statistical representation is unchangeable in time, then it may be modelled by deploying the Shinozuki method [14, 17, 18]:

$$\mathbf{V}_{w \text{ turb}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^L |H_{ij}(\boldsymbol{\Omega}_l)| \sqrt{2\Delta\boldsymbol{\Omega}} \cos(\boldsymbol{\Omega}'_l \mathbf{r} + \varphi_{jl}) \quad (38)$$

gdzie: $\mathbf{r}=[x_g, y_g, z_g]^T$ - wektor położenia w przestrzeni punktu, w którym obliczana jest turbulencja, H_{ij} - elementy macierzy \mathbf{H} określającej amplitudy oscylacji, $\boldsymbol{\Omega}_l = [\Omega_{lx}, \Omega_{ly}, \Omega_{lz}]^T$ - wektor częstości „przestrzennej”, $\boldsymbol{\Omega}'_l$ - zaburzony losowo wektor $\boldsymbol{\Omega}_l$, φ_{jl} - faza losowa.

Macierz \mathbf{H} powiązana jest z macierzą gęstości widmowej (spektrum) mocy:

where: $\mathbf{r}=[x_g, y_g, z_g]^T$ - the vector positioning in space a point for which the turbulence is calculated, H_{ij} - components of matrix \mathbf{H} defining the amplitudes of oscillations, $\boldsymbol{\Omega}_l = [\Omega_{lx}, \Omega_{ly}, \Omega_{lz}]^T$ - the vector of “spatial” frequency, $\boldsymbol{\Omega}'_l$ - randomly interfered vector $\boldsymbol{\Omega}_l$, φ_{jl} - random phase.

Matrix \mathbf{H} is coupled with the matrix of power spectral density (spectrum):

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{H}^T(\boldsymbol{\Omega}) \quad (39)$$

Jak widać, model turbulencji (38) to suma funkcji harmoniczných typu *cosinus* z losowo zmienną fazą oraz amplitudą określaną w oparciu o tzw. spektra mocy. W literaturze można znaleźć różne formuły opisujące spektra mocy określane w oparciu o wieloletnie, wielopunktowe pomiary turbulencji w posz-

As it is seen the model of turbulence (38) is a sum of harmonic functions of *cosine* type with randomly changing phase and the amplitude determined by so called power spectra. The literature provides different formulae describing the power spectra on the basis of many years of multipoint measurements of

czególnych kierunkach przestrzeni.

W obliczeniach wykorzystano dwustronne spektrum dwuwymiarowe:

$$\Phi(\Omega_x, \Omega_y) = \frac{\pi\sigma^2}{[1+L_w^2(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)]^{\frac{5}{2}}} \begin{bmatrix} 1 + L_w^2(\Omega_x^2 + 4\Omega_y^2) & -3\Omega_x\Omega_yL_w^2 & 0 \\ -3\Omega_x\Omega_yL_w^2 & 1 + L_w^2(4\Omega_x^2 + \Omega_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 3L_w^2(\Omega_x^2 + 4\Omega_y^2) \end{bmatrix} \quad (40)$$

σ jest odchyleniem standardowym, zaś L_w skalą turbulencji.

Przykładowe elementy powyższej macierzy pokazano na rysunku 7. Określono je w oparciu o odpowiednie wyrażenia występujące w (40) przyjmując w obliczeniach odchylenie standardowe $\sigma=2$ m/s oraz skalę turbulencji $L_w=300$ metrów.

W efekcie zastosowania formuły (38) otrzymać można stochastyczne przebiegi składowych wektora $\mathbf{V}_{w \text{ turb}}$ w trakcie lotu bomby. Przykład takich przebiegów dla jednego z symulowanych zrzutów pokazano na rysunku 8. W obliczeniach przyjęto te same wartości odchylenia standardowego i skali turbulencji jak dla pokazanych powyżej spektrów mocy.

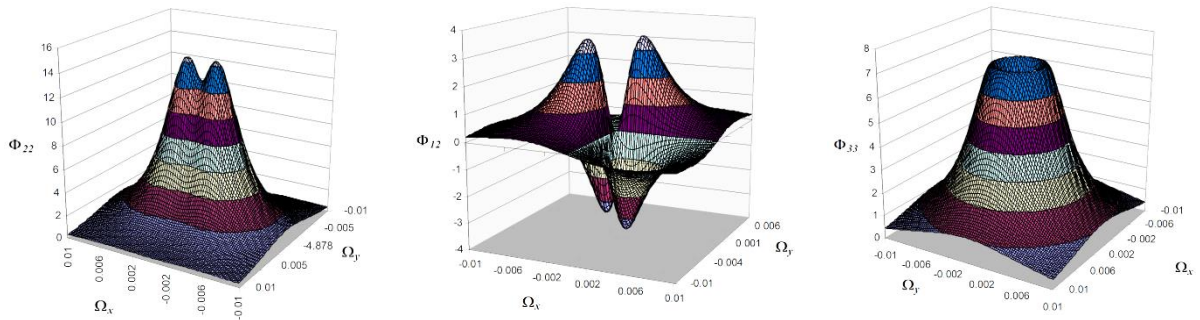
turbulence for particular spatial directions.

Two-side and two-dimensional spectrum was used in the calculations:

σ is the standard deviation and L_w is the range of turbulence.

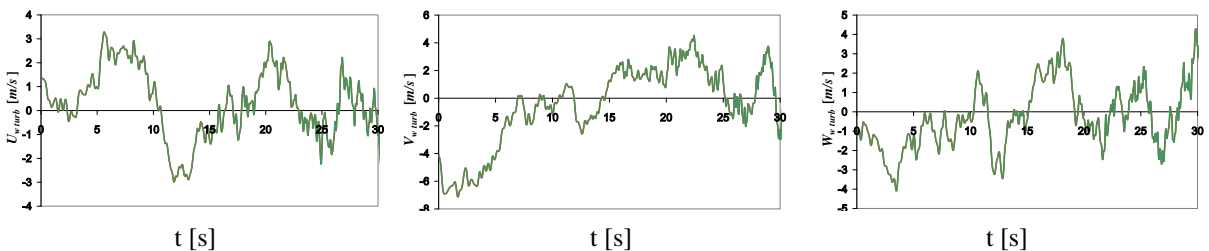
Exemplary components of the above matrix are shown in Fig. 7. They were identified on the basis of respective relations existing in (40) by accepting in calculations the standard deviation $\sigma=2$ m/s and the scale of turbulences $L_w=300$ m.

By using formula (38) the stochastic values of vector $\mathbf{V}_{w \text{ turb}}$ components during the bomb flight may be received. An example of such signals for one of simulated drops is shown in Fig. 8. In the calculations the same values of standard deviation and scale of turbulence were taken as for the power spectra presented above.



Rys. 7. Dwustronne dwuwymiarowe spektra mocy $\Phi_{22}(\Omega_x, \Omega_y)$, $\Phi_{12}(\Omega_x, \Omega_y)$, $\Phi_{33}(\Omega_x, \Omega_y)$

Fig 7. Two-side and two-dimensional power spectra $\Phi_{22}(\Omega_x, \Omega_y)$, $\Phi_{12}(\Omega_x, \Omega_y)$, $\Phi_{33}(\Omega_x, \Omega_y)$



Rys. 8. Rozkłady składowej turbulencji $U_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$, $V_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$, $W_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$ w trakcie zrzutu

Fig. 8. Distributions of turbulence component $U_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$, $V_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$, $W_{w \text{ turb}}(x_g, y_g, z_g)$ during the dropping

6. Przykład obliczeniowy

W oparciu o opisany model ruchu bomby przeprowadzono szereg obliczeń testowych. Pierwszy etap tych obliczeń miał na celu określenie wpływu warunków początkowych zrzutu (wysokość, prędkość i kąt zrzutu) na położenie punktu uderzenia bomby w powierzchnię Ziemi. Na tym etapie badań wpływ turbulencji był pomijany. Parametry powietrza na różnych wysokościach były zgodne z modelem atmosfery wzorcowej.

Otrzymane wyniki są istotne ze względu na stosowane w praktyce sposoby bombardowania. Są to: bombardowanie sposobem balistycznym z widzialnością celu lub bez widzialności celu. Do wykonania bombardowania konieczne jest wprowadzenie do pamięci systemu celowniczo-nawigacyjnego (SNC) samolotu nosiciela danych charakteryzujących balistyczne właściwości bomby, w tym tzw. czasu charakterystycznego bomby oraz jej charakterystyk masowych i aerodynamicznych. Wprowadzenie do SNC właściwych charakterystyk bomby lotniczej jest warunkiem koniecznym precyzyjnego wyliczenia donośności bomby (rzut poziomy toru lotu na płaszczyznę Ziemi) i czasu spadania t_b odpowiadających warunkom zrzutu. Poprawność tych parametrów i charakterystyk można oszacować na podstawie obliczeń numerycznych jeszcze przed próbami poligonowymi.

Przystępując do symulacji należy określić przedziały początkowych wartości wysokości, prędkości i kąta zrzutu. Wynikają one z założeń taktycznych dotyczących zastosowania uzbrojenia bombardierskiego samolotów odrzutowych. Dopuszczalna wysokość zrzutu bomby dla tego typu samolotów mieści się w granicach od kilkudziesięciu metrów (z zastosowaniem bomb hamowanych) do 10000 metrów (przy bombardowaniu bez widzialności celu). Prędkość, przy której następuje rzut bomby nie powinna przekraczać 0,95 Macha, przy czym minimalna prędkość rzeczywista określona jest jako 139 m/s dla samolotów szkolno-bojowych. Ze względu na kąt zrzutu sposoby bombardowania można podzielić na bombardowanie z lotu poziomego, nurkującego i lotu wznoszącego.

Uwzględniając powyższe uwagi do symula-

6. Example of Calculations

A series of testing calculations were performed basing on the presented model of bomb motion. The first stage of these calculations was focused on identification of the influence of initial dropping conditions (elevation, velocity and angle of dropping) into the position of the falling point on the Earth surface. The influence of turbulence was omitted in this stage. Air characteristics at different elevations were compliant to the model of Reference Atmosphere.

The received results are essential for the ways of bombardment used in practice. They include the ballistic bombing with the visibility of a target or without its visibility. Procedure of bombing requires the input data concerning the ballistic characteristics of the bomb including the bomb specific time and its mass and aerodynamic data has to be entered into the aiming-navigating system (ANS) of the plane. Introduction of air bomb proper characteristics to the ANS is required for precise calculation of the range for the bomb (horizontal projection of the flight path on the Earth surface) and the dropping time t_b at specific conditions of the drop. The correctness of these parameters and characteristics may be estimated by numerical calculations before the range trials.

Before the simulation the interwall of initial altitudes, velocities and angles of dropping has to be specified. They result from jet planes bombing equipment tactical specifications. Allowable altitudes of dropping for such planes fall between a few dozen metres (by using the delaying bombs) to 10 000 metres (bombing without target visibility). The velocity of bomb dropping has to be lower than 0.95 Mach and the minimal real velocity for the training-combat planes is specified on 139 m/s. Considering the angle of dropping the bombardment methods deploy the horizontal, diving and rising flight paths.

Regarding the above the following initial conditions were taken for simulation:

- The altitude of bomb dropping: 1000÷5000 m,
- The velocity of the carrier:

cji przyjęto następujące warunki początkowe:

- wysokość zrzutu bomby: 1000÷5000 m,
- prędkość nosiciela: 139÷250 m/s,
- początkowy kąt zrzutu: -40÷40°.

Przyjęty zakres wysokości zrzutu 1000÷5000m umożliwia bombardowanie z widzialnością celu oraz metodą z użyciem przyrządów nawigacyjno-celowniczych bez widzialności celu. Natomiast zakres początkowych kątów zrzutu zapewnia określenie maksymalnego zasięgu bomby przy danej prędkości początkowej.

Poniżej pokazano przykładowe wyniki symulacji dla wysokości zrzutu $H=3000$ m

- z prędkościami $V_{p1}=139\text{m/s}$, $V_{p2}=167\text{m/s}$, $V_{p3}=194\text{m/s}$, $V_{p4}=222\text{m/s}$ i $V_{p5}=250\text{m/s}$,
- kątami zrzutu $\Theta_{p1}=-40^\circ$, $\Theta_{p2}=-30^\circ$, $\Theta_{p3}=-20^\circ$, $\Theta_{p4}=-10^\circ$, $\Theta_{p5}=0^\circ$, $\Theta_{p6}=10^\circ$, $\Theta_{p7}=20^\circ$, $\Theta_{p8}=30^\circ$, $\Theta_{p9}=40^\circ$.

Otrzymane rezultaty pozwalają na ocenę wpływu prędkości początkowej i kąta zrzutu na lot bomby, a w szczególności na położenie punktu upadku. Na rysunkach 9÷13 pokazano obliczone: donośności bomby, czas lotu, kąt upadku i prędkość upadku bomby w zależności od prędkości początkowej i kąta zrzutu.

139÷250 m/s,

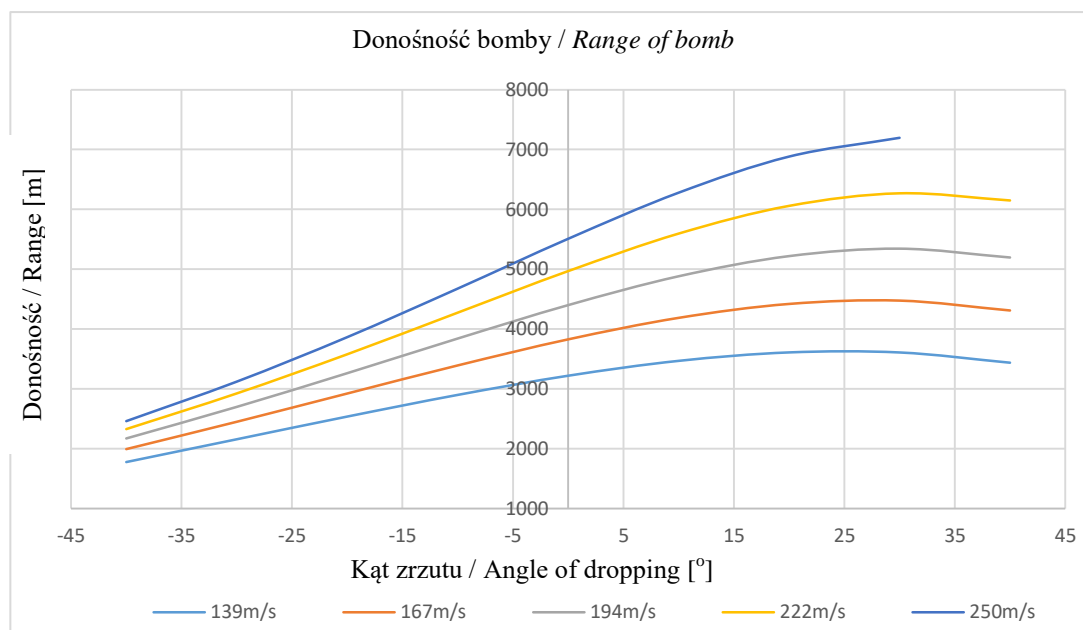
- The initial angle of dropping: -40÷40°.

Accepted altitudes of dropping 1000÷5000m provide the bombing with target visibility and without its visibility by using the navigating-aiming devices. The interwall of initial angles of dropping provides the identification of the maximal bomb range at a specific initial velocity.

Below some exemplary results of simulation are shown for the dropping altitude $H=3000\text{m}$

- With velocities $V_{p1}=139\text{m/s}$, $V_{p2}=167\text{m/s}$, $V_{p3}=194\text{m/s}$, $V_{p4}=222\text{m/s}$ and $V_{p5}=250\text{m/s}$,
- Angles of dropping $\Theta_{p1}=-40^\circ$, $\Theta_{p2}=-30^\circ$, $\Theta_{p3}=-20^\circ$, $\Theta_{p4}=-10^\circ$, $\Theta_{p5}=0^\circ$, $\Theta_{p6}=10^\circ$, $\Theta_{p7}=20^\circ$, $\Theta_{p8}=30^\circ$, $\Theta_{p9}=40^\circ$.

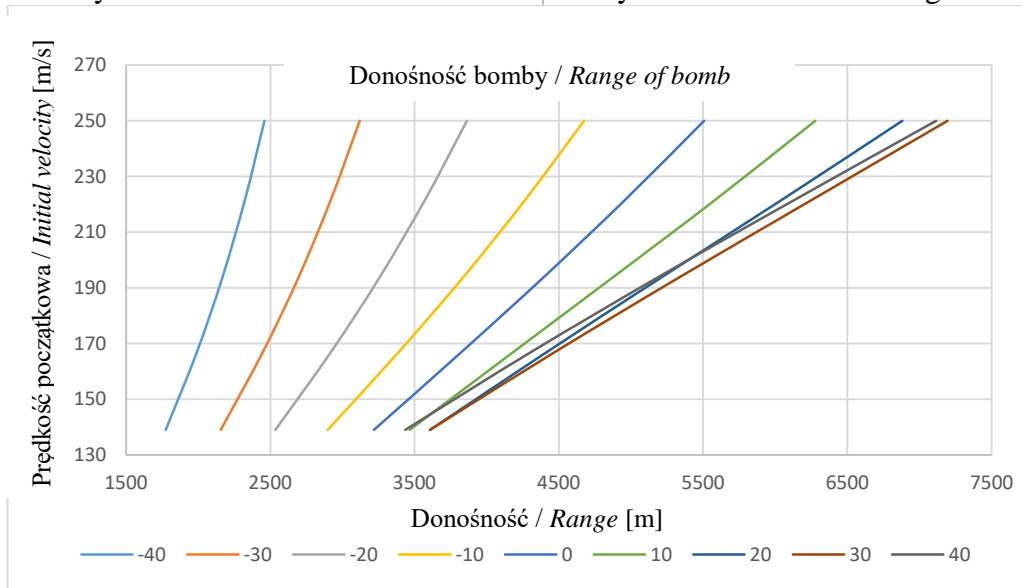
Received results can be used to assess an impact of the initial velocity and the angle of dropping into the bomb flight and especially into the point of falling. The calculated values of bomb range, flight time, angle and velocity of incidence are shown in Fig. 9÷13 depending on the initial velocity and the angle of dropping.



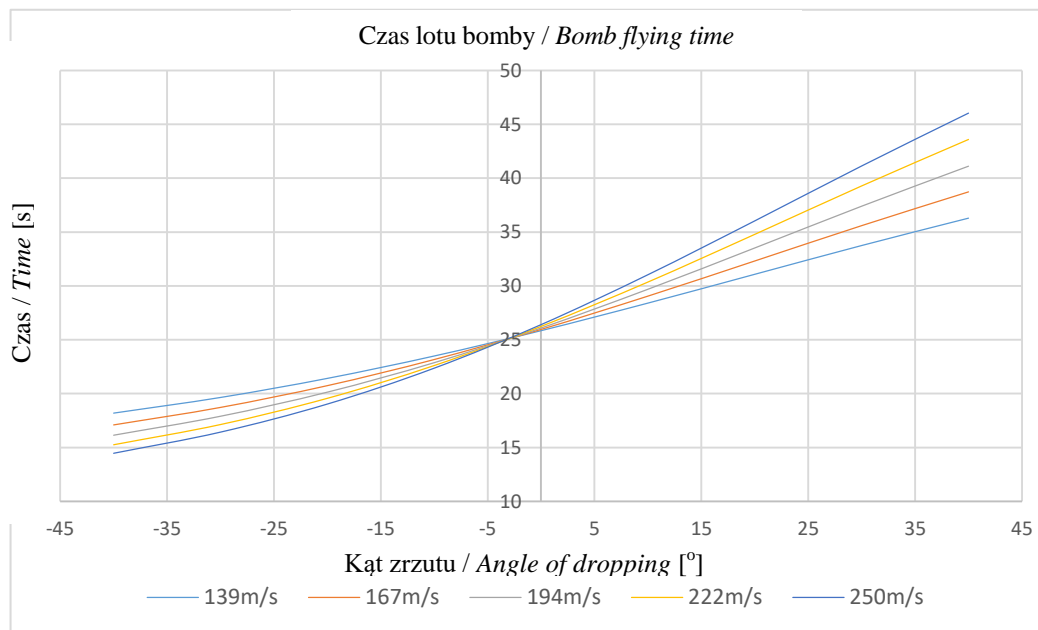
Rys. 9. Donośność bomby zrzucanej z 3000 m w zależności od prędkości i kąta zrzutu
 Fig. 9. The range of bomb dropped from 3000 m depending on velocity and angle of dropping

Analiza wyników wskazuje na znaczące różnice w trajektoriach lotu bomby w zależności od warunków początkowych. Przeprowadzając obliczenia dla wyżej wymienionych początkowych wysokości zrzutu, prędkości zrzutu oraz kątów zrzutu Θ , wyznaczono obszary donośności bomby. Znając je można określić początkowe parametry zrzutu bomby zapewniające trafienie w cel. Przykładowy obszar donośności dla prędkości zrzutu 139 m/s, pokazano na rysunku 14.

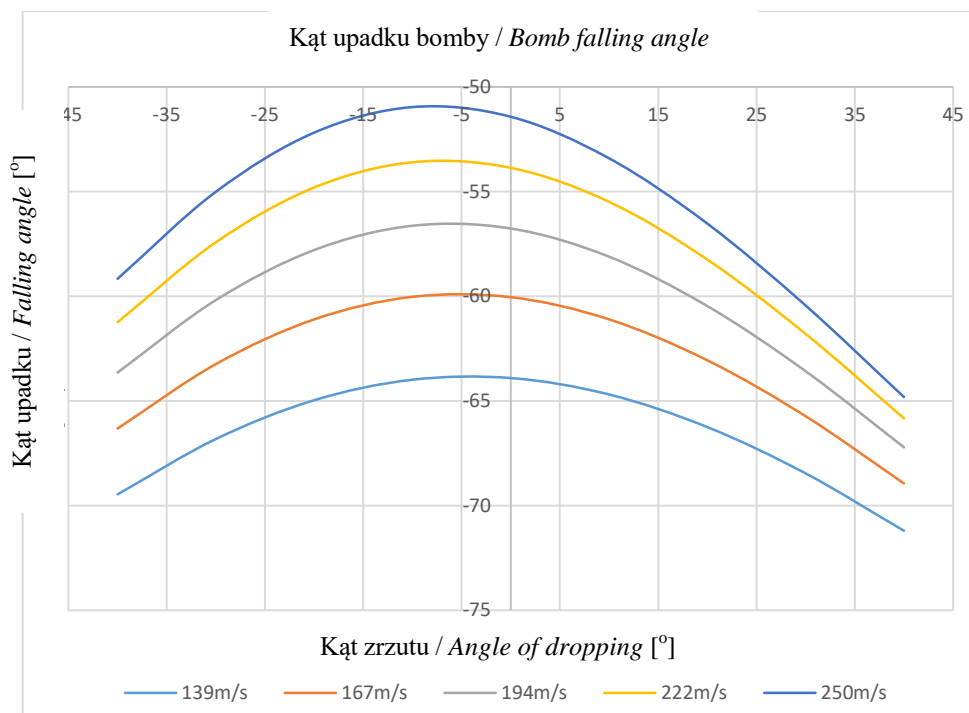
The analysis of results indicates that there are significant differences in bomb flight paths depending on initial conditions. The range of bomb falling areas were determined by calculations performed for the above initial conditions of the dropping altitude, velocity, and angles Θ . The knowledge of them identifies the initial parameters for bomb dropping to ensure target hitting. An exemplary area of the range for dropping velocity 139 m/s is shown in Fig. 14.



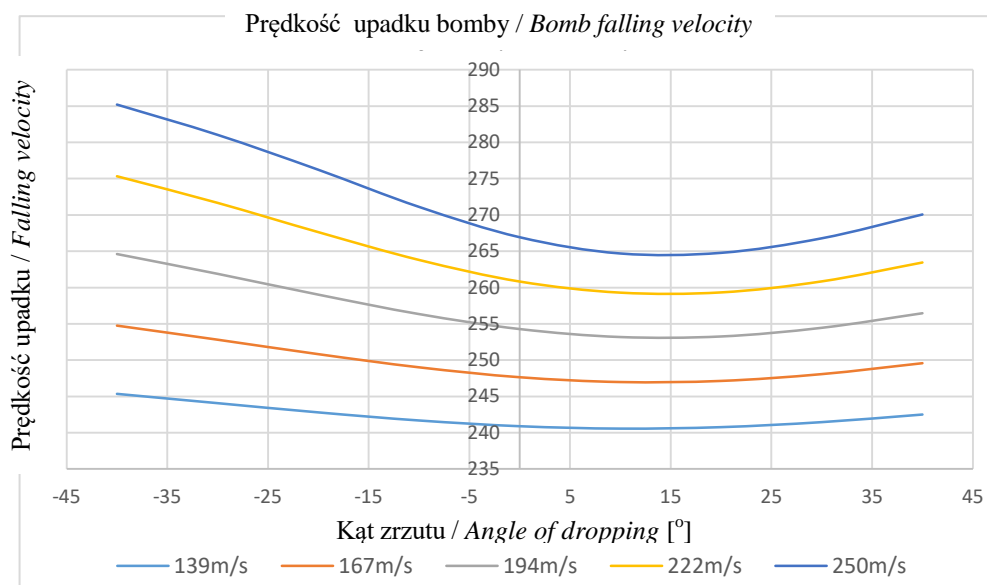
Rys.10. Donośność bomby zrzuconej z 3000 m w zależności od prędkości i kąta zrzutu
Fig. 10. The range of bomb dropped from 3000 m depending on velocity and angle of dropping



Rys. 11. Czas lotu bomby zrzuconej z 3000 m w zależności od prędkości i kąta zrzutu
Fig. 11. Flying time for the bomb dropped from 3000 m depending on velocity and angle of dropping



Rys. 12. Kąt upadku bomby zruconej z 3000 m w zależności od prędkości i kąta zrzutu
 Fig. 12. Falling angle of bomb dropped from 3000 m depending on velocity and angle of dropping



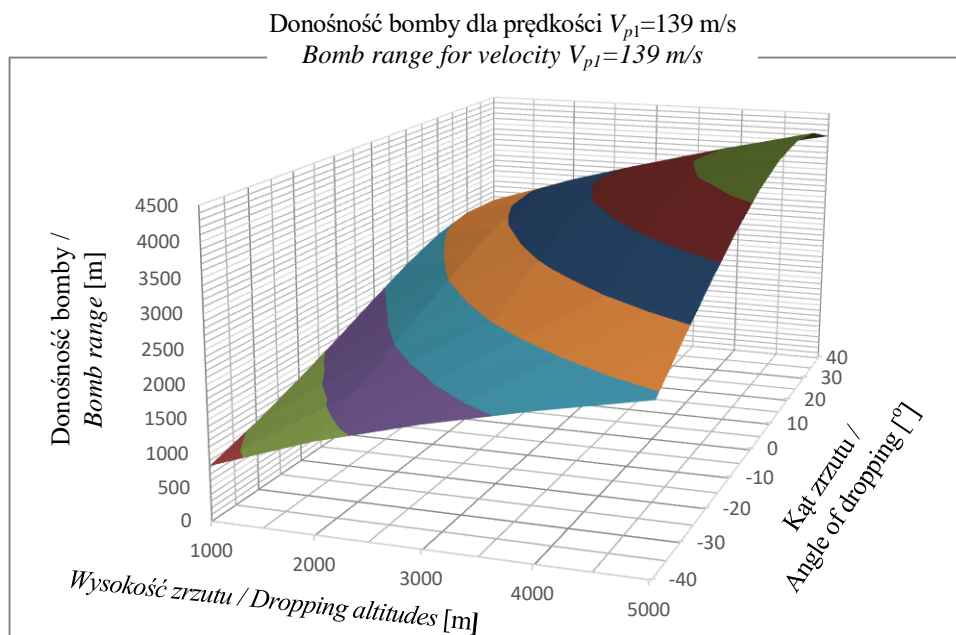
Rys. 13. Prędkość upadku bomby zruconej z 3000 m w zależności od prędkości i kąta zrzutu
 Fig. 13. Falling velocity of bomb dropped from 3000 m depending on velocity and angle of dropping

Pokazano na nim punkty upadku bomby zruconej z wysokości $H=3000$ m z prędkością $V_{p1}=139$ m/s przy kącie zrzutu $\Theta_p=0^\circ$. Parametry pola wiatru były następujące $\sigma=4$ m/s, $L_w=400$ m. Widać tu istotny rozrzut punktów upadku. Skrajne położenia różnią się między sobą o $\Delta X_g=30,52$ m i $\Delta Y_g=15,01$ m.

It shows the falling points of bomb dropped from the altitude of $H=3000$ m at velocity of $V_{p1}=139$ m/s and dropping angle at $\Theta_p=0^\circ$. The parameters of the wind field were following $\sigma=4$ m/s, $L_w=400$ m. A significant spread of falling points is visible. Extreme positions differ by $\Delta X_g=30.52$ m

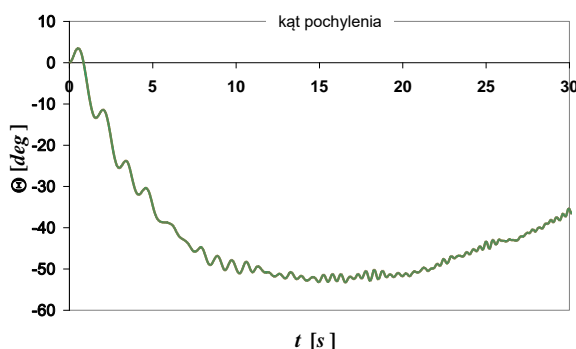
Na rysunku pokazano też położenie punktu upadku przy braku turbulencji oraz położenie średniego punktu upadku. Widać różnicę pomiędzy tymi punktami wynoszącą $\Delta X_g=10,04$ m. Średni punkt upadku położony jest bliżej niż punkt upadku bez turbulencji. Należy sądzić, że przyczyną takiej sytuacji jest zwiększona wartość kąta nutacji w locie w warunkach turbulencji. Powoduje to wzrost oporu aerodynamicznego i spadek zasięgu.

and $\Delta Y_g=15.01$ m. Position of the falling point without turbulences and position of the average falling point is also shown in the figure. There is a difference between these points equal to $\Delta X_g=10.04$ m. The average falling point is placed closer than the falling point without the turbulences. It may be suggested that a reason for this may be an increased value of nutation angle at flying in turbulent conditions. It causes the increase of aerodynamic drag and the decrease of range.



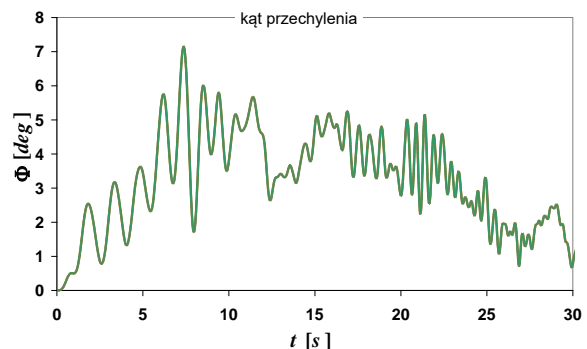
Rys. 14. Przedział donośności bomby dla kąta zrzutu $\Theta -40^\circ \div +40^\circ$ w granicach wysokości zrzutu 1000 m \div 5000 m i prędkości zrzutu 139 m/s

Fig. 14. Field of bomb range for dropping angles $\Theta -40^\circ \div +40^\circ$ and dropping altitudes 1000 m \div 5000 m at the dropping velocity of 139 m/s



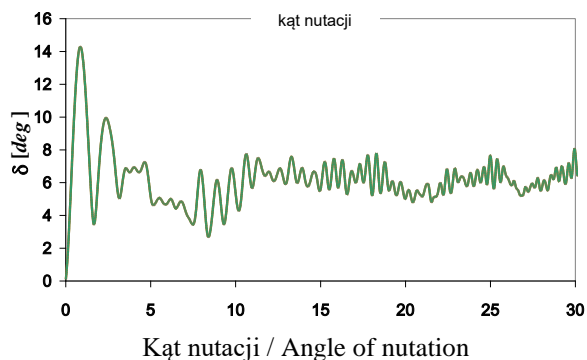
Rys. 15. Przebieg kąta pochylenia w trakcie zrzutu

Fig. 15. Values of pitching angle at dropping

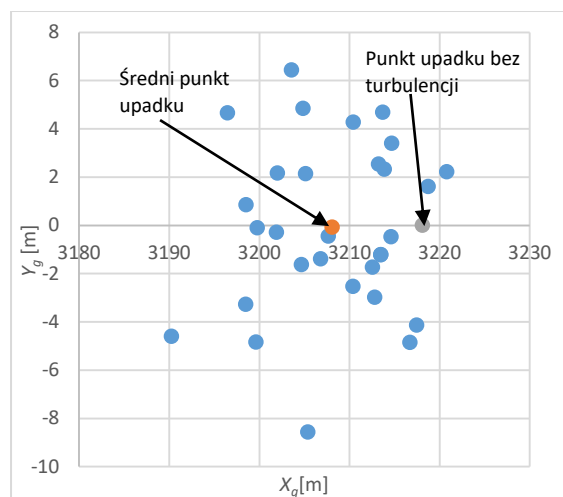


Rys. 16. Przebieg kąta przechylenia w trakcie zrzutu

Fig. 16. Values of rolling angle at dropping



Rys. 17. Przebieg kąta nutacji w trakcie zrzutu
Fig. 17. Course of nutation angle at dropping



Średni punkt upadku / Average point of incidence
Punkt upadku bez turbulencji / Point of incidence without turbulences

Rys. 18. Rozkład punktów upadku bomby
Fig. 18. Scattering of bomb incidence points

7. Podsumowanie

Dotychczasowe wyniki analiz potwierdzają, że donośność zrzutu istotnie zależy od warunków początkowych [21]. Zwiększenie donośności uzyskuje się poprzez wzrost wysokości zrzutu oraz prędkości początkowej. Natomiast w przypadku początkowego kąta zrzutu znaleźć można jego wartość dającą maksymalny zasięg. Mieści się on w przedziale $30^\circ \div 40^\circ$. Wyniki te są zgodne z podstawową wiedzą z zakresu balistyki zewnętrznej dotyczącej modeli ruchu obiektów balistycznych w atmosferze [19]. Są one jednak istotne w odniesieniu do badanej bomby LBCw-10K. Znajomość konkretnych wartości zasięgu to wiedza praktyczna, ważna w trakcie eksploatacji skonstruowanej bomby, zaś znajomość czasu lotu ma wpływ na dobór sposobu sterowania, np. określenie chwili aktywowania sterowania.

Uwzględnienie turbulencji daje nowe możliwości w zakresie oceny skuteczności trafienia w cel przy braku sterowania. Jest to ważne ze względu na stosunkowo niewielką masę bomby, co zwiększa jej czułość na oddziałujące zaburzenia. Planuje się określenie korelacji pomiędzy rozrzutem bomby LBCw-10K zrzucanej w warunkach turbulencji, a parametrami definiującymi fluktuacje pola wiatru. Jednak istotniejsze jest, że stosując

7. Summary

The analysis of recently received results confirms that the range of dropping depends significantly on the initial conditions [21]. The increase of the range may be obtained by greater altitude of dropping and initial velocity. Concerning the initial angle of dropping its optimal value securing the maximal range may be found. It is placed within $30^\circ \div 40^\circ$. These results comply with the general rules of external ballistics relating to models of motion for ballistic objects in the atmosphere [19]. Anyway they are essential for the investigated bomb LBCw-10K. The knowledge of real values of the range has a practical meaning at using the designed bomb whereas the value of flight time affects the selection of controlling method e.g. by identification of a time moment for activating the control system.

By accounting the turbulences some new possibilities appear for evaluation of efficiency at hitting a target without controlling. It is important because of relatively small mass of the bomb what increases its vulnerability to acting disturbances. It is planned to find out a correlation between the spreading of LBCw-10K dropped at turbulent conditions and the parameters defining the fluctuations of the wind field. But

opracowany program symulacyjny można będzie oceniać skuteczność sterowania bombą w trudnych warunkach atmosferycznych, przy występowaniu porywów wiatru.

more important question is to evaluate the efficiency of bomb control system at wind gusts by using the developed simulating computer code.

Literatura/ Literature

- [1] Baranowski L., *Modelowanie, identyfikacja i badania numeryczne dynamiki lotu obiektów balistycznych na potrzeby systemów kierowania ogniem artylerii naziemnej*, Wydawnictwo Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2011.
- [2] Baranowski L., Gadomski B., Szymonik J., Majewski P., *Comparison of Explicit and Implicit Forms of The Modified Point Mass Trajectory Model*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, No.4, Vol.54, 2016.
- [3] Carlucci D.E., Jacobson S.S., *Ballistics - Theory and Design of Guns and Ammunitions*, CRC Press, 2007.
- [4] Дмитриевский А.А., *Внешняя баллистика*, Издательство Машиностроение, Москва, 1972.
- [5] Gacek J., *Balistyka zewnętrzna Cz. I i II*, Wydawnictwo WAT, Warszawa, 1999.
- [6] Kowaleczko G., Żyłuk A., *Influence of Atmospheric Turbulence on Bomb Release*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, No.1, Vol. 47, 2009.
- [7] Kowaleczko G. Żyłuk A. Nowakowski M. Olejniczak E., *Wpływ prędkości indukowanej na lot pocisku raketowego odpalanego ze śmigłowca*, Modelowanie Inżynierskie, tom 26, zeszyt 57 PTMTS Gliwice 2015.
- [8] Kowaleczko G. Pietraszek M., *Estimation of The Accuracy of Laser Guided Bomb*, Journal of KONES 2016 Vol.23, No.3 271-279, Warszawa 2016.
- [9] Kowaleczko G. Pietraszek M. Olejniczak E., *Evaluation of The Possibility of Bomb Flight Control*, Journal of Kones, Vol.22, No3, Warszawa 2015.
- [10] Lieske R., Danberg J., *Modified Point Mass Trajectory Simulation for Base -Burn Projectiles*, Ballistic Research Laboratories Technical Report No.3321, 1992.
- [11] Lieske R., McCoy R.L., *Equations of Motion of a Rigid Projectile*, Ballistic Research Laboratories Technical Report No.1244, 1964;
- [12] Lieske R., Reitler M., *Equations of Motion for a Modified Point Mass Trajectory*, Ballistic Research Laboratories Report No.1314, 1966.
- [13] McCoy R.L., *Modern Exterior Ballistics*, Schiffer Publishing Ltd., 2012.
- [14] Mnitowski S., *Modelowanie lotu samolotu w burzowej atmosferze*, Rozprawa doktorska WAT Warszawa 2006.
- [15] Polska Norma PN-83/L-01010.00, *Mechanika lotu samolotów i szybowców – Terminologia*;
- [16] *PRODAS Software v.3*, Arrow Tech Associates Inc., 2008.
- [17] Shinozuka M., *Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 49, 1971.
- [18] Shinozuka M., Jan C.-M., *Digital Simulations of Random Processes and Its Applications*, Journal of Sound and Vibrations, No 25, 197.

- [19] Szapiro J., *Balistyka zewnętrzna*, Wydawnictwo MON, 1956.
- [20] *The Modified Point Mass Trajectory Model*, STANAG 4355, (Ed. 2).
- [21] Winczura Z., Żyłuk A., *Metoda wyznaczania warunków początkowych swobodnego lotu bomby*, VIII Ogólnopolska Konferencja „Mechanika w Lotnictwie”, Warszawa 1998.

