MINUT 2022 (4), s. 1–15
ISSN 2719-3063

Piotr SŁANINA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Kiedy można wygrać i jak wtedy grać, żeby wygrać?

Streszczenie. Jednym z głównych problemów w grze kombinatorycznej jest wskazanie gracza, który jest w stanie zapewnić sobie zwycięstwo (tak zwane rozwiązanie gry). Jeśli już to się uda, to czasami nadal nie będziemy w stanie wskazać temu graczowi, jak ma grać, aby wygrać.
W tym artykule czytelnik zapozna się z najpopularniejszymi matematycznymi narzędziami, stosowanymi przy poszukiwaniu najlepszych strategii w grach kombinatorycznych. Ich opisy będą uzupełnione o przykłady gier. Będą się one pojawiały według stopnia trudności ich rozwiązania - od najłatwiejszych do nierozwiązanych po dzień dzisiejszy.
Słowa kluczowe: Kombinatoryczna teoria gier.

1. Wstęp

Teoria gier jest działem matematyki, opisującym wszelkie sytuacje konfliktowe i możliwości ich rozwiązania z korzyścią dla uczestników konfliktów. Wprawdzie z konfliktami mamy do czynienia bardzo często na różnych płaszczyznach, teoria gier jako nauka ścisła rozwinęła się dopiero w XX wieku. Kamieniami milowymi były prace Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna „Teoria gier i postępowanie ekonomiczne" [7] oraz Johna Forbesa Nasha „Ekwilibria w grach n-osobowych" [6]. W obu udowodniono między innymi istnienie różnych stanów równowagi w dużych rodzinach gier.

Warto wiedzieć, że pomimo braku Nagrody Nobla w dziedzinie matematyki, to dzięki teorii gier matematycy nierzadko dostępują zaszczytu jej zdobycia: w dziedzinie ekonomii. Najsłynniejszym z nich był John Forbes Nash, znany poza środowiskiem matematyków dzięki filmowi biograficznemu "Piękny umysł". Ostatni matematycy wśród noblistów, Paul R. Milgrom i Robert B. Wilson, zdobyli Nagrodę Nobla w 2020 roku za wkład w rozwój teorii aukcji.

Poza ekonomią, teoria gier znajduje zastosowanie między innymi w naukach społecznych (analiza wyborów konsumentów, głosowania, podział wygranych dóbr), teorii ewolucji czy informatyce. Wreszcie, teoria gier pozwala nam zrozumieć i nazwać spotykane na co dzień sytuacje, przeanalizować je i wyciągnąć odpowiednie wnioski. Jeżeli czytelnik chciałby poszerzyć swoją wiedzę z podstaw teorii gier, to odpowiednimi źródłami będą [8] i [9].

W tym artykule głównym bohaterem będzie kombinatoryczna teoria gier i związane z nimi dwa podstawowe pytania: czy można wygrać niezależenie od gry przeciwnika i jak grać żeby wygrać? Co ciekawe,

Autor korespondencyjny: P. Słanina (piotr.slanina@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 29.06.2021.

pytania te nie są sobie równoważne. Dla wielu gier odpowiedź na nie będzie banalna. W przypadku innych gier, aby opisać optymalne postępowanie graczy, trzeba będzie użyć bardziej złożonego aparatu matematycznego. Są również gry, w których wskazanie gracza, który może sobie zapewnić zwycięstwo, jest stosunkowo łatwe ale opis postępowania, prowadzącego gracza do wygranej, może ciągle przerastać aktualne możliwości matematyków i sprzętu, jakim dysponują. Zaprezentujemy przykłady gier, odpowiadających każdemu z powyższych przypadków oraz najpopularniejsze pojęcia i metody, używane do ich analizy.

Warto wiedzieć, że niektóre przedstawione w pracy gry są mocno powiązane z obszernymi dziedzinami matematyki, jak gra „oficerowie” z rodziny gier oktalnych czy „col” z teorią grafów. Udowodnimy też, że w dwuosobowych grach kombinatorycznych któryś z graczy na pewno może sobie zapewnić zwycięstwo. Z drugiej strony, w wielu grach, nawet z prostymi zasadami, nadal nie wiadomo który.

Formalny zapis matematyczny postanowiliśmy ograniczyć do minimum, aby artykuł mógł być przyswajalny dla osób, które nie są biegłe w tej tematyce.

2. Metody poszukiwania rozwiązywań gier kombinatorycznych

2.1. Gry kombinatoryczne

Mówiąc „gra”, możemy mieć na myśli różne czynności. Może to być gra w piłkę nożną, szachy, Wiedźmina. O grze możemy nawet mówić w kontekście psychologii - flirtowanie też można nazwać grą. Sama teoria gier jako dział matematyki wymaga od nas precyzji w definiowaniu pojęć. Przez to niektóre z wymienionych wyżej przykładów nie będą grami dla matematyka. Pominiemy jednak formalną definicję gry - można ją znaleźć np. w [9]. Nadmieńmy jedynie, że w grze muszą być gracze, określony zbiór zasad gry oraz po zakończeniu gry, każdy z graczy powinien wiedzieć, czy wygrał lub ewentualnie ile zdobędzie punktów.

Pojęcie gry w teorii gier jest bardzo ogólne. W pewnych grach ciężko będzie mówić o czyimś zwycięstwie, jeżeli gracze pod koniec gry otrzymają np. po 2.5, $\sqrt{6}$ i $2\frac{2}{5}$ punktu. Również klęska jednego z graczy nie musi być równoważna ze zwycięstwem przeciwnika. W niektórych grach osiągnięcie korzyści może być spowodowane nie tylko walką z innymi graczami, ale nawet współpracą z nimi. W innych grach, gracze podczas gry mogą nie mieć kompletnej informacji o jej przebiegu - w pewnym momencie mogą jednocześnie podejmować decyzje, nie znając wyborów pozostałych graczy.

Unikniemy takich przypadków, zawężając krąg interesujących nas gier do tak zwanych gier kombinatorycznych:

Definicja 1. *Grą kombinatoryczną nazywamy dwuosobową grę, w której:*

- *Gracze wykonują ruchy na przemian.*
- *Na każdym etapie gry każdy gracz wie, jakie decyzje wcześniej podjął jego przeciwnik.*
- *W żadnym momencie w grze nie dokonuje się losowania aktualnych opcji, ale gracze je wybierają.*
- *Gra musi się skończyć po skończonej liczbie ruchów.*
- *Wygrywa gracz, który jako ostatni mógł wykonać zgodny z zasadami ruch. Jego przeciwnik wtedy przegrywa.*

W grach kombinatorycznych gracz rozpoczynający grę będzie nazywany graczem pierwszym. Każda opisana w artykule gra będzie właściwie rodziną gier o wspólnych zasadach postępowania, a różniących się pomiędzy sobą jedynie początkową pozycją.

Sumą gier kombinatorycznych Γ_1 i Γ_2 nazywamy grę $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, w której gracze na przemian wykonują jeden ruch w dowolnej z gier Γ_1 i Γ_2. Gracz, który nie może wykonać prawidłowego ruchu w żadnej z nich, przegrywa.

Strategią nazywać będziemy pełny opis postępowania gracza w każdej sytuacji, w jakiej gracz może się znaleźć w czasie gry.

Strategią zwycięską jest strategia, po zastosowaniu której gracz zawsze odniesie zwycięstwo, bez względu na wybory przeciwnika. Jeżeli w grze kombinatorycznej udowodniono istnienie strategii zwycięskiej dla któregoś z graczy, to taką grę nazywamy rozwiązaną.

Ponieważ w grach kombinatorycznych nie ma zdarzeń losowych, to przy wielokrotnym rozgrywaniu tej samej gry, jeżeli żaden z graczy nie zmieni swojej strategii, to gra będzie przebiegać od początku aż do końca zawsze w ten sam sposób.

Poszukiwania rozwiązania gier kombinatorycznych mają sens dzięki następującemu twierdzeniu:

Twierdzenie 1. *W każdej grze kombinatorycznej istnieje gracz, posiadający strategię zwycięską.*

Dowód. Użyjemy indukcji matematycznej względem liczby wszystkich wyborów, które gracze mogą dokonać podczas gry.

Jeśli w grze nie ma żadnego wyboru (jest to najprostsza możliwa gra - żaden z graczy w niej nie ma okazji o niczym zadecydować), to gracz drugi ma strategię zwycięską (pierwszy nie może wykonać żadnego ruchu).

Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, w każdej grze, w której gracze mają w sumie nie więcej niż n wyborów, istnieje gracz posiadający strategię zwycięską. Wtedy w dowolnej grze G, w której gracze mają $n+1$ wyborów, gracz pierwszy (rozpoczynający) może trafić w pierwszym ruchu na następujące przypadki:

1. Może dokonać wyboru, po którym po każdym wyborze przeciwnika dojdzie do gry, w której gracz pierwszy będzie mieć strategię zwycięską. Wtedy w grze G gracz pierwszy też będzie mieć strategię zwycięską.

2. Jeśli po każdym jego wyborze na początku gry, gracz drugi będzie mieć strategię zwycięską, to gracz drugi będzie mieć też strategię zwycięską w grze G.

$\square$

Dalej przedstawimy kilka gier, uszeregowanych według poziomu trudności rozwiązania.

2.2. Gra rozwiązana

Zaczniemy od przykładu gry, w której strategia zwycięska jest bardzo prosta do opisania.

Gra 1. ***Nim(n,k)****; niech $n, k \in \mathbb{N}$. Na stosie znajduje się n zapałek. Dwaj gracze na przemian zabierają ze stosu dowolną, niezerową liczbę zapałek, nie większą niż k. Gracz przegrywa, jeżeli będzie musiał zabrać ze stosu ostatnią zapałkę.*

Pokażemy, że w grze *Nim(n,k)* gracz drugi posiada strategię zwycięską wtedy i tylko wtedy, gdy $n \equiv 1 \ mod \ k+1$.

Jeśli $n \equiv 1 \ mod \ k+1$, to strategią zwycięską gracza drugiego jest: „jeśli gracz pierwszy wziął a zapałek, to gracz drugi bierze $k+1-a$ zapałek”.

Po każdym ruchu pierwszego i drugiego gracza, liczba zapałek na stosie maleje o $k+1$. W końcu, przed którymś ruchem gracza pierwszego zostanie 1 zapałka, więc gracz pierwszy przegra.

Jeśli $n \not\equiv 1 \ mod \ k+1$, to gracz pierwszy ma strategię zwycięską: może zabrać taką liczbę zapałek, aby pozostała na stosie liczba zapałek przystawała do 1 modulo $k+1$. Następnie gracz pierwszy stosuje strategię gracza drugiego opisaną powyżej.

2.3. Gra wprawdzie rozwiązana ale... bez pomocy komputera nie wygramy

W niektórych popularnych, znanych od wielu lat grach, przez dość długi okres czasu nie było wiadomo, jakiego wyniku powinni oczekiwać gracze w przypadku bezbłędnej gry każdego z nich. Jedną z takich gier było *gomoku* (czasem potocznie nazywaną „kółko i krzyżyk”):

Gra 2. ***Gomoku****; niech $n \in \mathbb{N}$. Na kwadratowej planszy o boku długości n, dwaj gracze stawiają na wolnych polach na przemian kółko i krzyżyk. Gracz, który jako pierwszy zajmie swoimi znakami pięć kolejnych pól w wierszu, kolumnie lub na skos, wygrywa. Jeżeli żaden tego nie dokona, wtedy gra kończy się remisem.*

W 1994 roku Allis [1] udowodnił, że w grze *gomoku*, w przypadku planszy o boku długości 15 (na takiej rozgrywane są zawody, w tym Mistrzostwa Świata), gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską. Wynik Allisa był zgodny z wcześniejszymi oczekiwaniami, gdyż wcześniej, nawet w przypadku lepszych amatorów, rozpoczynający grę prawie zawsze zwyciężał. Po rozwiązaniu gry *gomoku*, aby nie było wiadomo, który z graczy posiada strategię zwycięską, wprowadzano pewne modyfikacje gry. Związane one były z pierwszym lub paroma pierwszymi ruchami i powodowały albo ograniczenia pól dostępnych dla rozpoczynającego gracza, albo dodanie dodatkowych wyborów graczowi drugiemu. Obecnie turnieje mistrzowskie rozgrywa się wersją *gomoku* o nazwie Swap2.

Warcaby, rozgrywane na planszy o boku długości 8, są grą rozwiązaną numerycznie w 2007 roku przez zespół pod wodzą Schaeffera [3] - przy prawidłowej grze obydwu graczy, ich pojedynek zakończy się remisem. Ten zespół utworzył program grający w *warcaby*, z którym nie da się wygrać. Natomiast bardziej interesujący wariant warcabów, rozgrywanych na planszy o boku długości 10 (zwanych też *polskimi warcabami*), nadal czeka na rozwiązanie.

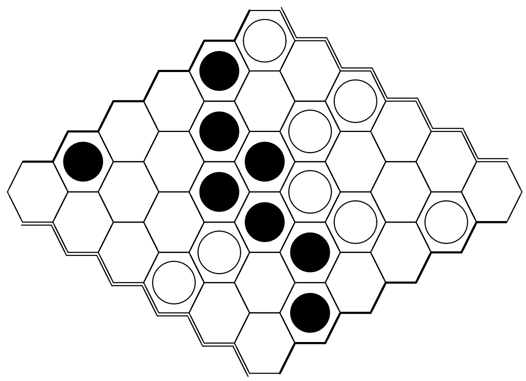
Zauważmy, że *warcaby* oraz *gomoku* nie są formalnie grami kombinatorycznymi. Różnią się od nich jedynie tym, że istnieje możliwość remisowego zakończenia partii. W takich grach na pewno zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo któryś z graczy posiada strategię zwycięską, albo obaj gracze posiadają strategie zapewniające im co najmniej remis.

W kombinatorycznej teorii gier funkcjonują pojęcia *słabego* i *mocnego* rozwiązania gry. Rozwiązanie *słabe* polega na udowodnieniu istnienia optymalnej strategii, jednak nie wskazuje optymalnego sposobu prowadzenia rozgrywki od dowolnego momentu, jaki może powstać w grze (czyli na przykład, jeśli obaj gracze nie wykonywaliby za każdym razem najlepszych ruchów). *Warcaby* na planszy o boku długości 8 posiadają właśnie słabe rozwiązanie. Rozwiązanie *mocne* opisuje optymalne postępowanie w dowolnym momencie gry. *Gra Nim(n,k)* posiada mocne rozwiązanie, które powyżej przedstawiliśmy.

Podsumowując: istnieją programy komputerowe, dla których *gomoku* na planszy o boku długości 15 i *warcaby* na planszy o boku długości 8 nie mają tajemnic. Jednak strategie, które stosują, aby grać optymalnie, są na tyle skomplikowane, że żaden człowiek nie jest w stanie ich opanować.

2.4. Gra wprawdzie rozwiązana, ale... nie wiadomo, jak w nią wygrać

Gra 3. ***Hex***; *niech* $n \in \mathbb{N}$. *Na planszy, o kształcie zbliżonym do rombu, o boku długości* n *sześciokątów (patrz Rysunek 1), dwaj gracze na przemian zajmują wolne pola żetonami (pierwszy białymi, a drugi czarnymi). Gracz pierwszy wygrywa, jeżeli jego żetony utworzą ścieżkę z sąsiadujących ze sobą pól, łączącą lewy dolny bok z prawym górnym bokiem planszy. Gracz drugi wygrywa, jeżeli utworzy ścieżkę ze swoich żetonów, łączącą prawy dolny bok z lewym górnym bokiem planszy.*



Rysunek 1. Plansza gry *hex* dla $n = 6$ po wygranej gracza drugiego.

Mimo tego, że istnienie strategii zwycięskiej pierwszego gracza w grze *hex* z planszą dowolnej wielkości można nietrudno wykazać (co niniejszym uczynimy), do dnia dzisiejszego nie jest znana strategia, zapewniająca graczowi pierwszemu zwycięstwo, jeśli bok planszy zawiera co najmniej 10 sześciokątów.

Twierdzenie 2. *W grze hex gracz pierwszy posiada strategię zwycięską.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że w grze *hex* brak rozstrzygnięcia jest niemożliwy. Gdyby tak było, to istniałaby ścieżka sąsiadujących ze sobą pól, łącząca prawy dolny bok z lewym górnym, z której żadne z pól nie byłoby zajęte przez żeton pierwszego gracza. Wtedy albo wszystkie pola tej ścieżki byłyby zajęte przez żetony drugiego gracza (co oznaczałoby jego zwycięstwo), albo gra jeszcze nie byłaby zakończona.

Właściwą część dowodu przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że gracz drugi ma strategię zwycięską. Niech gracz pierwszy w pierwszym ruchu postawi swój żeton na dowolnym polu, a następnie niech stosuje strategię zwycięską gracza drugiego, która poprzez pionową symetrię planszy jest przystosowana do łączenia boków lewego dolnego i prawego górnego. Jeśli podczas stosowania tej strategii zwycięskiej gracza drugiego, gracz pierwszy musiałby postawić swój żeton na polu zajętym w pierwszym ruchu, to może postawić swój żeton na dowolnym innym. Taka strategia byłaby zatem zwycięska dla gracza pierwszego, co jest sprzeczne z założeniem o istnieniu strategii zwycięskiej gracza drugiego. □

Przedstawiony w dowodzie schemat nosi nazwę „kradzieży strategii". W podobny sposób można udowodnić, że w grze *gomoku* gracz pierwszy posiada strategię zapewniającą mu co najmniej remis (gdyby gracz drugi miał strategię zwycięską, to gracz pierwszy mógłby mu ją „ukraść"). Udowodnienie, że gracz pierwszy posiada strategię zwycięską dla gry na planszy o boku długości 15, było nieporównywalnie trudniejsze (o istnieniu tego rozwiązania była wzmianka w poprzednim podrozdziale).

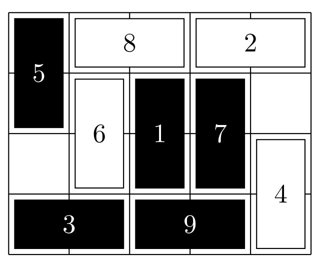
Istnieją turnieje w grze *hex* na planszy o boku długości 11. Aby nie mieć pewności co do uprzywilejowania gracza pierwszego, wprowadza się czasem modyfikację: po pierwszym ruchu gracza pierwszego, gracz drugi może albo kontynuować grę, albo przejąć żeton postawiony przez przeciwnika i jednocześnie oddać ruch przeciwnikowi. Nie zmienia to faktu, że i w tak zmodyfikowanej grze, któryś z graczy na pewno posiada strategię zwycięską (co nam mówi Twierdzenie 1), jednak w chwili obecnej nie wiadomo który.

2.5. Gra rozwiązana, o ile jeden z parametrów jest parzysty. W przeciwnym przypadku nie wiemy prawie nic

Gra 4. ***Upakowanie****; na prostokątnej planszy, składającej się z kwadratów, dwaj gracze na przemian kładą kostki domina, w każdym ruchu zasłaniając dwa sąsiednie pola. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa.*

W grze *upakowanie*, jeżeli liczba kwadratów tworzących planszę jest parzysta, to sytuacja jest klarowna. Gdy bowiem oba boki zawierają parzystą liczbę kwadratów, to gracz drugi posiada strategię zwycięską: na każdy ruch gracza pierwszego odpowiada ruchem symetrycznym do ostatniego ruchu pierwszego gracza względem środka planszy.

Jeżeli boki zawierają parzystą i nieparzystą liczbę kwadratów, to gracz pierwszy ma podobną strategię zwycięską: na początku kładzie domino na samym środku planszy, a następnie, podobnie jak w przypadku gry z parzystą liczbą kwadratów w boku, kopiuje ruchy gracza drugiego symetrycznie względem środka planszy (patrz Rysunek 2).



Rysunek 2. Gra zakończona zwycięstwem gracza pierwszego, stosującego strategię zwycięską, opisaną w pracy. Gracz pierwszy stawiał czarne, a drugi białe domina. Liczby odpowiadają kolejności ruchów.

Dla planszy składającej się z nieparzystej liczby kwadratów sytuacja jest nieporównywalnie bardziej skomplikowana: tutaj nawet dla plansz stosunkowo małej wielkości (nawet dla plansz, których boki składają się z kilkunastu kwadratów), gra pozostaje nadal nierozwiązana. Dotychczasowe wyniki nawet nie pozwalają wysnuć jakichkolwiek hipotez na temat postaci rozwiązania gry *upakowanie* dla dowolnej planszy.

Gra 5. ***Oficerowie****; niech $n \in \mathbb{N}$. Na stosie znajduje się n monet. Gracze wykonują ruchy na przemian. Dozwolonym ruchem jest zabranie jednej monety z dowolnego stosu i jednoczesne (ale nieobowiązkowe) podzielenie tego stosu na dwa niepuste stosy. Nie wolno zabierać ostatniej monety z żadnego stosu. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa.*

W grze *oficerowie* poziom trudności rozwiązania również zależy od parzystości. Dla nieparzystej liczby monet gracz pierwszy może sobie zapewnić wygraną niemal identycznie jak w grze *upakowanie*: na początku zabiera monetę i dzieli stos na dwa równoliczne, a następnie kopiuje ruchy gracza drugiego (wykonane na jednym z początkowych stosów lub pozostałościach z niego) na pozostałościach drugiego stosu.

W przypadku parzystej liczby monet wiadomo tylko, który gracz ma strategię zwycięską dla liczby monet nie większej niż $14 \cdot 10^{13}$ [5]. Wynik ten jest rezultatem trwającej 18 miesięcy pracy programu komputerowego, będącego zoptymalizowaną wersją jego poprzedników.

2.6. Gra rozwiązana tylko dla wybranych przypadków

Przechodzimy do gier, o których wiadomo coraz mniej w kwestii ich rozwiązania. Analiza gier, figurujących w tym podrozdziale, wymaga zapoznania czytelnika z kolejnymi pojęciami, występującymi w teorii gier kombinatorycznych.

Definicja 2. *Grę kombinatoryczną nazywamy bezstronną, jeśli w każdej możliwej pozycji powstałej w tej grze, możliwe ruchy nie zależą od numeru gracza. Jeżeli tak nie jest, to grę nazywamy stronniczą.*

Gra *Nim(n,k)* jest grą bezstronną, podobnie jak *oficerowie* czy *upakowanie*. W takich grach jak *hex*, *gomoku* czy *warcaby*, gracze posługują się własnymi symbolami (znakami, pionkami), przez co kontynuacja gry od dowolnego momentu może nieść różne konsekwencje w zależności od tego, który gracz będzie kontynuować grę. Dlatego te gry są grami stronniczymi.

Niech $K \subsetneq \mathbb{N} \cup \{0\}$. Funkcja $mex(K)$ zwraca najmniejszą nieujemną liczbę całkowitą, nienależącą do zbioru K. W grze bezstronnej definiujemy funkcję F (zwaną funkcją Sprague-Grundy'ego), przyporządkowującą każdej sytuacji w grze nieujemną liczbę naturalną w następujący sposób:

- Jeżeli X jest końcem gry, to $F(X) = 0$.
- Jeżeli X nie jest końcem gry, to $F(X) = mex(K)$, gdzie K jest zbiorem wartości funkcji F we wszystkich sytuacjach, do których można dojść w jednym ruchu z sytuacji X.

$F(X)$ nazywamy wartością Sprague-Grundy'ego w sytuacji X.

Oznaczmy przez $\delta(k)$ sytuację w grze *Nim(n,3)*, w której na stosie zostało k zapałek. Pokażemy, wartości Sprague-Grundy'ego $F(\delta(k+1))$ są równe reszcie z dzielenia k przez 3.

Z definicji, $F(\delta(1)) = 0$ (jedna zapałka na stosie oznacza koniec gry i przegraną gracza pierwszego). Przy dwóch zapałkach, jedynym możliwym ruchem jest zabranie jednej zapałki. Stąd $F(\delta(2)) = mex(F(\delta(1))) = mex(0) = 1$. Podobnie, $F(\delta(3)) = mex(F(\delta(2)), F(\delta(1))) = mex(1, 0) = 2$. Załóżmy, że wzór funkcji F jest spełniony dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych od $3p$, $p \in \mathbb{N}$. W sytuacji $\delta(3p)$, gracz rozpoczynający może zabrać jedną lub dwie zapałki. Stąd $F(\delta(3p)) = mex(F(\delta(3(p-1) + 2)), F(\delta(3(p-1)+1))) = mex(1, 0) = 2$. Podobnie, $F(\delta(3p+1)) = mex(F(\delta(3p)), F(\delta(3(p-1)+2))) = mex(2, 1) = 0$, $F(\delta(3p+2)) = mex(F(\delta(3p+1)), F(\delta(3p))) = mex(0, 2) = 1$.

Twierdzenie 3. *(Sprague-Grundy'ego) w grze bezstronnej gracz drugi ma strategię zwycięską wtedy i tylko wtedy, gdy wartość funkcji Sprague-Grundy'ego na początku gry jest równa* 0.

Dowód. Przez F oznaczmy funkcję Sprague-Grundy'ego. Jeżeli w pewnej sytuacji $F \neq 0$, to gracz dokonujący wyboru może zawsze wybrać ruch, po którym $F = 0$. Jeżeli $F = 0$, to gracz dokonujący wyboru jest zmuszony wybrać ruch, po którym $F \neq 0$. W ten sposób gracz, który przechodzi przez sytuacje, w których $F \neq 0$, doprowadza przeciwnika do końcowych punktów, gdzie $F = 0$ - czyli do przegranej. □

Gra 6. *Oznaczmy przez* ***Nim(n,K)*** *grę, będącą następującym uogólnieniem gry Nim: niech $n \in \mathbb{N}, K \subset \mathbb{N}$. Gra toczy się według tych samych zasad co Nim(n,k) z tym, że liczba zapałek, którą można zabrać w każdym ruchu ze stosu, musi należeć do zbioru K.*

Jeżeli K jest skończonym zbiorem, to rozwiązanie gry *Nim(n,K)* jest zawsze *okresowe*, to znaczy:

$$\exists n_0, r \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0,\ F(n) = F(n+r).$$

Gra *Nim(n,K)* jest rozwiązana dla stosunkowo niewielu zbiorów K. Jest to gra bezstronna, dzięki czemu można wyznaczać jej wartości Sprague-Grundy'ego.

Dzięki istnieniu rozwiązania okresowego w grze *Nim(n,K)* przy ustalonym zbiorze skończonym K, samo jej rozwiązanie sprowadza się do wyznaczenia wartości n_0, r oraz wartości Sprague-Grundy'ego dla wszystkich $n < n_0 + r$.

Dla kilku wybranych zbiorów K, Tabela 1 przedstawia wartości Sprague-Grundy'ego w grze *Nim(n,K)* i wyróżniony okres. Zachęcamy czytelnika do własnoręcznego ich sprawdzenia.

K	kolejne wartości Sprague-Grundy'ego dla $n = 1, 2, 3, \cdots$
$\{4, 11\}$	**0**,0,0,1,1,1,1,0,0,0,2,1,1,1,**0**
$\{4, 5, 11\}$	**0**,0,0,1,1,1,1,2,0,0,2,3,1,1,3,**0**
$\{4, 6, 11\}$	0,0,0,1,1,1,1,2,2,0,2,3,3,1,0,2,0,0,1,0,1,1,2,1,0,2,**0**,2,1,0,**1**
$\{4, 10, 11\}$	**0**,0,0,2,1,1,**1**
$\{4, 9, 10, 11\}$	0,0,0,1,1,1,1,0,2,2,2,1,3,3,0,0,2,4,**1**,1,0,0,0,2,1,1,1,0,0,2,2,1,1,3,0,0,2,**2**
$\{2, 3, 9, 11\}$	**0**,1,1,2,0,0,1,1,2,2,3,3,0,2,1,3,3,0,0,1,1,2,0,3,1,2,2,4,3,3,0,2,1,3,0,0,1,1,2,2,0,3,1,2,2,3,3,**0**

Tabela 1. Wartości Sprague-Grundy'ego dla wybranych zbiorów K w grze *Nim(n,K)*. Pogrubione zostały liczby z początku i końca okresu.

2.7. Gra nierozwiązana, nie licząc skończonej liczby przypadków

Jeżeli mamy do czynienia z grą stronniczą, to wartości Sprague-Grundy'ego nie da się określić. W każdej sytuacji, która powstanie w takiej grze, istnienie strategii zwycięskiej nie będzie bowiem zależeć tylko od tego, czy na gracza przypada ruch, ale również od tego, który to gracz. W grach stronniczych graczy będziemy nazywać *lewym* i *prawym* celem ich rozróżnienia.

Przy rozwiązywaniu gier stronniczych pomocne okazują się tak zwane *wartości gry* [1] $V(\Gamma)$. Będą to liczby (i nie tylko), które będą przyporządkowane każdej sytuacji Γ w grze (zauważmy, że sytuacja w trakcie gry sama w sobie może być traktowana jako początek pewnej gry) oraz spełniają następujące Warunki:

1. Jeżeli wartość jest dodatnia, to gracz lewy posiada strategię zwycięską, a jeżeli ujemna, to gracz prawy posiada strategię zwycięską.

[1] W teorii gier wartość gry najczęściej oznacza też wypłatę gracza pierwszego w dwuosobowej grze o sumie zero w stanie równowagi według Nasha. W tym artykule nie będziemy używać wartości gry w tym kontekście, dzięki czemu kolizja oznaczeń nam nie grozi.

2. W grze Γ_1, w której gracz prawy nie ma możliwego ruchu, a gracz lewy po jedynym możliwym ruchu doprowadza do końca gry, $V(\Gamma_1) = \mathbf{1}$.

3. Wartość gry równa **0** będzie przyporządkowana grze, w której gracz, który nie zaczyna, posiada strategię zwycięską.

4. Dla dowolnych gier Γ_1, Γ_2, Γ,

$$V(\Gamma_1) = V(\Gamma_2) \Longleftrightarrow V(\Gamma_1 \oplus \Gamma) = V(\Gamma_2 \oplus \Gamma).$$

5. Jeżeli wartości $V(\Gamma_1)$ i $V(\Gamma_2)$ są liczbami rzeczywistymi, to

$$V(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = V(\Gamma_1) + V(\Gamma_2).$$

Dzięki Warunkowi 4, gry o takich samych wartościach gry jako składniki sum gier będą nierozróżnialne pod kątem poszukiwania graczy, posiadających strategie zwycięskie w sumach gier.

Wyznaczymy wartość gry Γ_2, w której gracz lewy nie ma możliwego ruchu, a gracz prawy w jednym ruchu doprowadza do końca gry. Jeżeli gra Γ_1 spełnia Warunek 2, to w grze $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ każdy z graczy może wykonać dokładnie po jednym ruchu. Stąd ta gra zakończy się wygraną gracza drugiego, więc $V(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = 0$ i z Warunku 5, $V(\Gamma_2) = V(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) - V(\Gamma_1) = \mathbf{-1}$.

Gra, w której każdy z rozpoczynających graczy ma strategię zwycięską, nie jest korzystniejsza ani dla lewego, ani dla prawego gracza. Jej wartość nie powinna więc być ani dodatnia, ani ujemna. Nie może też być równa 0, bo ta wartość już została zarezerwowana dla gier korzystnych dla gracza nierozpoczynającego. W ten sposób okazuje się, że zbiór liczb rzeczywistych nie wystarczy nam do określania wartości gier! W dalszej części pracy poznamy wybrane nierzeczywiste wartości gry.

Przez $\{a_1, a_2, \cdots | b_1, b_2, . \cdots\}$ oznaczać będziemy wartość gry, w której gracz lewy w pierwszym ruchu ma do wyboru kontynuacje, będące grami o wartościach $a_1, a_2, \cdots$, a gracz prawy odpowiednio $b_1, b_2, \cdots$. Przy ustalaniu dokładnej wartości gry $\{a_1, a_2, \cdots | b_1, b_2, \cdots\}$, możemy odrzucić kontynuacje zdominowane przez inne, czyli wartości a_i, dla których istnieją większe wartości $a_{i'}$ (korzystniejsze dla gracza lewego) i wartości b_j, dla których istnieją mniejsze wartości $b_{j'}$ (korzystniejsze dla gracza prawego). W ten sposób np. $\{-2, 1, 3 | 0, 1, 5\} = \{3 | 0\}$.

Aby zaprezentować różne wartości gry na przykładach, poznamy kolejną grę stronniczą:

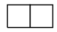
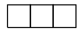
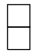
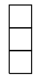
Gra 7. ***Dominacja****; jest to gra, różniąca się od gry Upakowanie tym, że jeden z graczy (tutaj zwany prawym) może kłaść domina tylko poziomo, a jego przeciwnik (lewy) tylko pionowo.*

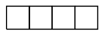
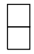
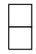
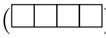
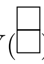
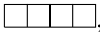
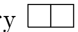
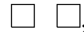
Gra *dominacja* jest przykładem gry nierozwiązanej nawet dla stosunkowo niewielkiej liczby pól, dostępnych na początku gry.

Jej rozwiązywanie sprowadza się głównie wyznaczaniu wartości gry dla różnych układów pól, co uczynimy dla pewnej liczby sytuacji w grze *dominacja*. Przy okazji zobaczymy, jak zróżnicowane mogą być wartości gry.

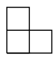
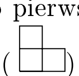
Dalej „gra" będzie oznaczać grę *dominacja* o wybranym układzie dostępnych pól dla obu graczy, a „wygrywa gracz n-ty" znaczyć będzie, że gracz n-ty posiada strategię zwycięską.

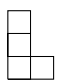
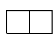
- W grach $\square$ oraz $\square\square \oplus \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$ rozpoczynający zawsze przegrywa - stąd wartości tych gier są równe 0.

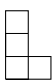
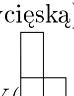
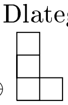
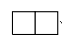
- Zauważmy, że w grach  oraz , jeśli rozpocznie gracz prawy, to doprowadzi do gry o wartości 0. Gracz lewy nie ma w ogóle możliwości wykonania żadnego ruchu więc wartość gry możemy zapisać jako $\{|0\}$. Ponieważ wcześniej ustaliliśmy, że wartość takiej gry będzie równa $-\mathbf{1}$, więc $-1 := \{|0\}$. Analogicznie, wartości gier  oraz  są równe $\mathbf{1}$.

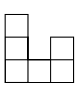
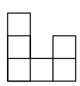
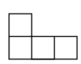
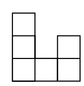
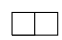
- Nietrudno zaobserwować, że gra  $\oplus$  $\oplus$  jest grą, w której wygrywa gracz drugi. Stąd jej wartość wynosi 0. Wtedy z Warunku 5, $V($$) = 0 - 2 \cdot V($$) = -\mathbf{2}$. Zauważmy też, że w grze , po ruchu gracza prawego mogą powstać gry  lub , o wartościach odpowiednio -1 i 0. Możemy więc też zapisać $\{|-1, 0\} = -2$.

  Analogicznie, prostokątne plansze składające się z jednego wiersza (lub jednej kolumny) zawierającego $2k$ lub $2k+1$ kwadratów odpowiadają wartościom gry $-\mathbf{k}$ (odpowiednio $\mathbf{k}$).

- W grze  zawsze zwycięży gracz rozpoczynający grę (już po jego pierwszym ruchu przeciwnik nie będzie mógł wykonać żadnego ruchu). Dlatego możemy zapisać $V($$) = \{0|0\}$ i ta gra będzie mieć przyporządkowaną nierzeczywistą wartość gry. Oznaczamy ją $\star = \{0|0\}$. Wartość „gwiazdka” będzie większa od każdej ujemnej i mniejsza od każdej dodatniej wartości gry (ale jednocześnie różna od zera!).

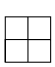
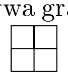
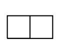
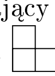
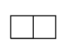
- Najpierw zauważmy, że w grze  $\oplus$  wygra gracz prawy, więc musi mieć wartość ujemną.

  Wartość gry  wynosi $\{-1, 0|1\}$ (czyli po uproszczeniu $\{0|1\}$), a sama gra jest kolejną grą, korzystniejszą dla lewego gracza (posiada on zawsze strategię zwycięską). Dlatego jej wartość $\{0|1\}$ musi należeć do przedziału $(0, 1)$. Czytelnik może sprawdzić, że $V($ $\oplus$  $\oplus$ $) = 0$. Teraz z Warunku 5 wynika, że $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \{0|1\}$.

- Istnieją gry o wartościach, będących dowolnymi liczbami diadycznymi [2]. Przykładowo $V($  $) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$. Przez to $V($  $\oplus$  $) = \frac{1}{4}$ oraz $V($  $\oplus$  $) = -\frac{1}{4}$. Można sprawdzić, że pierwsza z tych gier jest zwycięska dla gracza lewego, a druga dla gracza prawego.

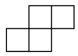
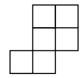
Spośród liczb rzeczywistych, tylko liczby diadyczne mogą być wartościami gry.

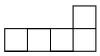
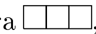
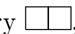
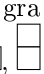
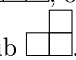
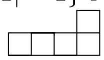
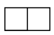
Już poznaliśmy jedną nierzeczywistą wartość gry: $\star$. Dalej poznamy kolejne.

- W grze  zawsze wygrywa gracz rozpoczynający ale wartość tej gry $(\{1, -1\})$ nie może być równa $\star$! Inaczej mielibyśmy $V($  $\oplus$  $) = V($  $\oplus$  $)$ lecz w pierwszej grze wygrywa gracz pierwszy, a w drugiej prawy. Stąd mamy kolejną wartość gry, różną od poprzednich. Oznaczamy ją $\mathbf{1}|-\mathbf{1} := \{1|-1\}$.

[2] Liczby diadyczne to liczby postaci $\pm\frac{p}{2^i}$, gdzie $p, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- W analogiczny sposób możemy znaleźć kolejne, różne między sobą, nierzeczywiste wartości gry $\mathbf{a}|-\mathbf{b} := \{a|-b\}$, gdzie a, b są nieujemnymi, rzeczywistymi wartościami gry. Przykładowo

  $V($  $) = \mathbf{0}|-\mathbf{1}$, a $V($  $) = \mathbf{\frac{1}{2}}|-\mathbf{2}$ i nie są one równe żadnej z poprzednich wartości.

- W grze  po jedynym ruchu gracza lewego powstanie gra , o wartości -1. Jeśli rozpocznie gracz prawy, to po jego ruchu mogą pojawić się gry ,  lub . Już wiemy, że ich wartości są równe odpowiednio $-1, 1, \star$. Stąd możemy jej wartość zapisać najpierw jako $\{-1|-1, 1, \star\}$. Po eliminacji słabszych wyborów, wartość jest równa $\{-1|-1\}$ i jest ona różna od poprzednich wartości gry. Nie jest to między innymi -1 ponieważ w  $\oplus$  gracz pierwszy wygrywa, a o grze  $\oplus$  wiemy już, że ma wartość 0. Wartość $\{-1|-1\}$ jest nazywana „przesunięciem o 1 na korzyść prawego wartości $\star = \{0|0\}$" i oznaczamy ją $\mathbf{-1}\star$. Podobnie, $\mathbf{a}\star = \{a|a\}$. Wartości $a\star$ wprawdzie nie są rzeczywiste, ale jeśli $a < 0$, to uważamy je za ujemne, a jeśli $a > 0$, to za dodatnie.

W tym momencie przedstawimy inny sposób uproszczenia niektórych zapisów wartości gry, którego dowód znajduje się w [2].

Twierdzenie 4. *(o upraszczaniu). Niech a, b będą rzeczywistymi (diadycznymi) wartościami gry i niech $a < b$. Wtedy $\{a|b\}$, $\{a\star|b\}$, $\{a|b\star\}$, $\{a\star|b\star\}$ są równe najprostszej liczbie diadycznej z przedziału (a, b), gdzie:*

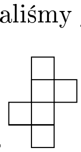
- *najprostszą liczbą diadyczną jest* 0.
- *Niech $\frac{p}{2^i}$, $\frac{q}{2^j}$ będą skróconymi ułamkami. Wtedy:*
  - *jeżeli $i < j$, to $\frac{p}{2^i}$ jest prostsza od $\frac{q}{2^j}$;*
  - *jeżeli $i = j$, to prostsza jest liczba bliższa zeru.*

W zbiorze liczb diadycznych tylko liczby różniące się jedynie znakiem są nieporównywalne pod względem „prostoty". Nie przeszkadza nam to jednak w jednoznacznym określeniu wartości gry.

Przykładowo, uprośćmy $\{\frac{9}{16}|\frac{15}{16}\}$. W przedziale $\left(\frac{9}{16}, \frac{15}{16}\right)$, wszystkie liczby diadyczne oprócz $\frac{3}{2^2}$ mają postać $\frac{p}{2^i}$, gdzie $i > 2$. Stąd najprostszą z nich jest $\frac{3}{2^2}$ i $\{\frac{9}{16}|\frac{15}{16}\} = \frac{3}{4}$. Inne przykłady:

$$\{-2|5\} = 0, \quad \{1|4\} = 2, \quad \{\frac{3}{4}|2\frac{7}{8}\star\} = 1, \quad \{-\frac{25}{32}|-\frac{15}{32}\} = -\frac{1}{2}.$$

Czy poznaliśmy już wszystkie możliwe wartości gry? Nie!

- Gra  ma wartość $\{0|*\}$ i jest korzystniejsza dla gracza lewego, który wygrywa, bez względu na to, na kogo przypada ruch. Powinna więc mieć wartość dodatnią. Jednak jej suma z dowolną grą o wartości ujemnej daje grę, w której gracz prawy ma strategię zwycięską. Przy naszych założeniach powinna mieć więc wartość dodatnią ale... mniejszą od dowolnej rzeczywistej wartości dodatniej! Dlatego wprowadzić trzeba nowy symbol: $\uparrow := \{0|\star\}$. Analogicznie, $\downarrow := \{\star|0\}$.

- Możemy nieco powiększyć wartość $\uparrow$ i jednocześnie nadal może być ona mniejsza od dodatnich liczb rzeczywistych. Tak będzie w przypadku sumy n gier o wartości $\uparrow$. Wartość takiej gry oznaczamy $\boldsymbol{\uparrow_n}$. Wartości $\uparrow_n$ uznajemy za dodatnie a ,$\downarrow_n$ za ujemne.

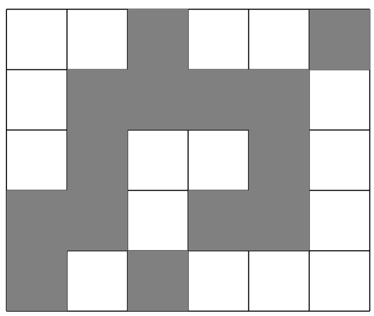
Jak widać, opis wszystkich wartości gry jest bardziej skomplikowany, niż mogłoby to wyglądać na pierwszy rzut oka. Ze względu na rosnący poziom trudności odnajdywania kolejnych wartości, tym momencie pozwolimy sobie zakończyć ich prezentowanie. Zresztą, do dnia dzisiejszego opis wszystkich wartości gry nie został zakończony.

Książka Winning Ways for Your Mathematical Plays [2] jest doskonałym źródłem wielu nieopisanych tutaj wartości gry. Należą do nich między innymi $\boldsymbol{\{\uparrow \mid \uparrow\}}$, $\boldsymbol{\{0| \uparrow\}}$, $\boldsymbol{\{0, \star|0, \star\}}$ i wiele, wiele innych.

Ogólnie, wyznaczanie wartości gry stronniczej polega najpierw na wyznaczaniu wartości gry we wszystkich sytuacjach w grze, aż do finalnego wyznaczenia wartości samej gry. Jeśli grę można przedstawić jako sumę gier, których wartości gry są znane, to wartość samej gry jest równa sumie wartości gier, występujących w sumie. Dla niezbyt wyszukanych wartości gier, obliczenia są proste. Przykładowo, gra z Rysunku 3 jest sumą pięciu gier o wartościach: 0, $\star$, -1 i dwukrotnie $\frac{1}{2}$. Jej wartość gry wynosi

$$V(\Gamma) = 0 + \star - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \star.$$

Oznacza to, że w tej grze wygrywa gracz pierwszy.



Rysunek 3. Szare pola są już zajęte.

Rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych są liczby nadrzeczywiste (można się więcej dowiedzieć na ich temat z Księgi Liczb [4]), do których należą niektóre nieliczbowe wartości gry (jak $\uparrow_n$, $\downarrow_n$). Z kolei wartość $\star$ nie jest liczbą nadrzeczywistą. Same liczby nadrzeczywiste są zbiorem uporządkowanym liniowo [3]. Wartości gry jednak nie są uporządkowane liniowo: nie da się porównać 0 i $\star$.

Na koniec poznajmy jeszcze jeden przykład gry stronniczej, pokrewnej słynnemu problemowi: czy da się zawsze pokolorować państwa na dowolnej politycznej mapie, co najwyżej czterema kolorami, w taki sposób, aby państwa pokolorowane tym samym kolorem nie graniczyły ze sobą. Komputerowy dowód prawdziwości tego faktu został zaakceptowany w 2004 roku ale nadal nie istnieje dowód bez wspomagania numerycznego.

Gra 8. ***Col****; dwóch graczy na przemian koloruje jeden obszar (państwo, województwo itp.) na danej mapie politycznej w taki sposób, aby żadne pokolorowane w tym samym kolorze obszary nie graniczyły ze sobą.*

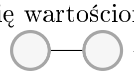
[3] Zbiór nazywamy uporządkowanym liniowo, jeśli każdą parę jego elementów można porównać ze sobą; to znaczy stwierdzić, który z nich jest większy albo czy są sobie równe

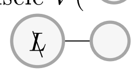
Każdy z graczy ma do dyspozycji jeden własny kolor. Gracz, który nie może pokolorować żadnego obszaru zgodnie z podanymi zasadami, przegrywa.

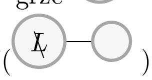
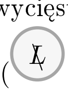
W samej definicji celowo unikaliśmy języka teorii grafów - dziedziny matematyki idealnej do wykorzystania w badaniu gry *col*. Wspomnijmy jedynie, że każdej mapie politycznej odpowiada pewien schematyczny rysunek, tak zwany *graf sąsiedztwa*: każdemu państwu przyporządkowany jest *wierzchołek* (oznaczany jako punkt lub okrąg), a dwa różne wierzchołki są połączone *krawędzią*, jeżeli państwa reprezentowane przez te wierzchołki graniczą ze sobą.

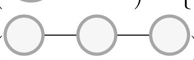
Gra *col* jest stronnicza, ponieważ w czasie gry mogą pojawić się obszary, które może pokolorować tylko jeden z graczy (jeśli przeciwnik już pokolorował któryś z sąsiednich obszarów). W okręgu reprezentującym taki obszar będziemy pisać $\not L$ ($\not P$), jeśli nie może być pokolorowany przez gracza lewego (odpowiednio, prawego).

Przyjrzyjmy się wartościom gry *col* dla paru najprostszych „map".

Oczywiście $V($  $) = V(\emptyset) = 0$, $V($  $) = \star$.

W grze  zwycięstwo może sobie zapewnić gracz prawy. Zauważmy, że

$V($  $) = \{V($  $)|V(\emptyset), V($  $)\} = \{-1|0, 1\} = -\frac{1}{2}$, a stąd

$V($  $)\} = \{-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\} = 0$.

Twierdzenie 5. *W grze col wartość gry w dowolnej sytuacji należy do zbioru* $S = \{a, a\star : a \in \mathbb{R}\}$.

Dowód. W grze *col* wykonanie ruchu powoduje obniżenie szans na wygraną gracza, który wykonał ruch - liczba dostępnych obszarów do kolorowania mogła mu ubyć. Dlatego dla dowolnej sytuacji F w grze *col*, dowolnej sytuacji powstałej z F po ruchu gracza lewego (F_L) czy gracza prawego (F_P), $V(F_L) \leqslant V(F) \leqslant V(F_P)$.

Niech $V(F_L) \in S$ i $V(F_P) \in S$.

Jeżeli $V(F_L) < V(F_P)$, to z twierdzenia o upraszczaniu, $V(F) \in S$. W pozostałych przypadkach, dla dowolnej liczby diadycznej a:

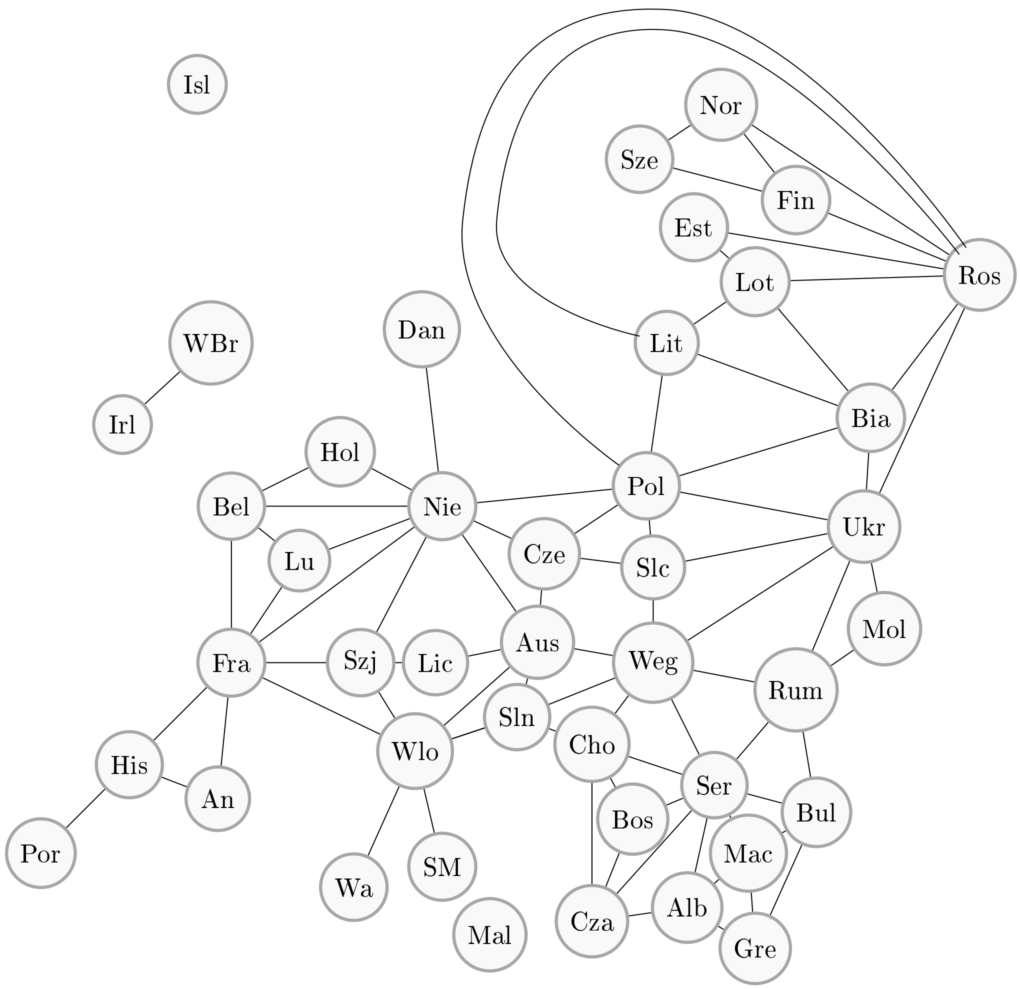
jeżeli $V(F_L) = V(F_P) = a$, to $V(F) = \{a|a\} = a\star \in S$,

jeżeli $V(F_L) = V(F_P) = a\star$, to $V(F) = \{a\star|a\star\} = a \in S$.

Ponieważ wartości $V(F_L), V(F_P)$ są uporządkowane, dlatego niemożliwe jest, aby jedna z tych wartości była równa $a\star$, a druga a, co kończy dowód. $\square$

Początkowe opcje dla każdego z graczy są identyczne, więc z Twierdzenia 5, wartość gry *col* jest równa $\{-a, a\}$ (a jest dowolną nieujemną wartością gry, niekoniecznie rzeczywistą), czyli po uproszczeniu, 0 lub $\star$. Sama gra *col* jest nierozwiązana nawet dla stosunkowo nieskomplikowanych map.

Na koniec proponujemy czytelnikowi znalezienie partnera do gry *col* na aktualnej mapie Europy (Rysunek 4) i... ogranie go. Powodzenia!



Rysunek 4. Graf sąsiedztwa Europy. Krawędzie symbolizujące wspólne granice Polski i Litwy z Rosją zostały narysowane w taki sposób, aby nie przecinały innych krawędzi. Taki graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecinających się krawędzi, nazywamy planarnym. Uprzedzając ewentualne dyskusje na tematy polityczno - geograficzne, samo określenie przynależności poszczególnych państw do Europy nie jest jednoznaczne, a w tym przypadku zależało jedynie od osobistego wyboru autora.

Literatura

1. L. V. Allis, *Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence*, Ph.D. thesis, University of Limburg, The Netherlands (1994), pp. 121–154.
2. E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters Ltd., 4 vol., 2001–2004.
3. N. Burch, Y. Björnsson, A. Kishimoto, M. Müller, R. Lake, P. Lu, J. Schaeffer, S. Sutphen, *Checkers Is Solved*, Science (2007), Vol. 317, Issue 5844, pp. 1518-1522.
4. J. H. Conway, R. K. Guy, *Księga liczb*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
5. J. P. Grossman, *Searching for Periodicity in Officers, Games of No Chance 5*, MSRI Publications, Cambridge University Press, Cambridge, vol. 70, 2019.

6. J. F. Nash Jr, *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 36, (1950), pp. 48-49.
7. J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press. XVIII, Princeton, New Jersey 1944.
8. G. Owen, *Teoria gier*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
9. E. Płonka, *Wykłady z teorii gier*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.