

Władysław Koc<sup>1</sup>

## PRÓBA WYŁAGODZENIA ZAŁOMÓW NA RAMPIE PRZECHYŁKOWEJ

### Streszczenie

*W pracy poświęcono uwagę praktycznemu aspektowi kształtowania rejonów skrajnych na prostoliniowych rampach przechyłkowych. Praktyka wykonawcza jednoznacznie dowodzi, że właśnie w tych rejonach dokładność pracy podbijarki pozostawia wiele do życzenia. Warto się więc zastanowić nad wyłagodzeniem tychże rejonów, co wprowadzi co prawda pewne zaburzenia w układzie występujących przyspieszeń niezrównoważonych, jednak skutki tych zaburzeń będą zapewne mniejsze niż obecne – będące wynikiem błędów pracy podbijarki. Przedstawiono stosowne rozwiązanie problemu – osobno dla rejonu początkowego rampy przechyłkowej i rejonu wejścia w łuk kołowy. Przy wyznaczaniu rzędnych przechyłki  $h(x)$  w strefie wyłagodzenia załomów znalazła zastosowanie metoda identyfikacji problemu za pomocą równań różniczkowych. Podane zależności teoretyczne zilustrowano konkretnymi przykładami obliczeniowymi.*

**Słowa kluczowe:** tor kolejowy, rampa przechyłkowa, wyłagodzenie załomów

### 1. Procedura kształtowania krzywych przejściowych i ramp przechyłkowych

Jak wiadomo, w modelowym rozwiązaniu rzędne rampy przechyłkowej  $h(l)$  są bezpośrednio powiązane z przebiegiem krzywizny  $k(l)$  na długości krzywej przejściowej. Obowiązują następujące zależności [2]:

<sup>1</sup> prof. dr hab. inż., Politechnika Gdańska, tel. (58) 3471026, e-mail: kocwl@pg.gda.pl

$$k(l) = \frac{1}{R} g(l), \quad (1)$$

$$h(l) = h_0 g(l), \quad (2)$$

gdzie:

$l$  – odległość danego punktu od początku krzywej przejściowej,  
 $g(l)$  – funkcja zmiennej  $l$ , zależna od rodzaju krzywej przejściowej,  
 przy czym w punkcie początkowym  $g(0) = 0$ , na końcu zaś  
 krzywej, tj. dla  $l = l_k$ ,  $g(l_k) = 1$ ,

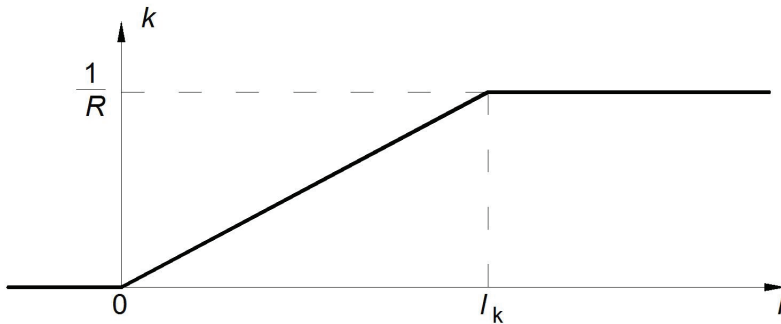
$R$  – promień łuku kołowego,

$h_0$  – wartość przechyłki na łuku.

Kiedy funkcja  $g(l)$  ma przebieg liniowy, czyli:

$$g(l) = \frac{l}{l_k}, \quad (3)$$

mamy do czynienia z liniową zmianą krzywizny (rys. 1) oraz występowaniem prostoliniowej rampy przechyłowej.



**Rys. 1. Wykres krzywizny liniowej**

W kartezjańskim układzie współrzędnych odpowiadająca krzywa przejściowa, nosząca nazwę klotoidy, jest opisywana równaniami parametrycznymi:

$$x(l) = l \left( 1 - \frac{1}{40 R^2 l_k^2} l^4 + \frac{1}{3456 R^4 l_k^4} l^8 - \dots \right) \quad (4)$$

$$y(l) = \frac{1}{6 R l_k} l^3 - \frac{1}{336 R^3 l_k^3} l^7 + \frac{1}{42240 R^5 l_k^5} l^{11} - \dots \quad (5)$$

## 2. Uproszczenia dotyczące krzywych przejściowych na drogach kolejowych

Na drogach kolejowych, gdzie występują duże promienie łuków kołowych oraz relatywnie długie krzywe przejściowe, stosuje się powszechnie uproszczony sposób wyznaczania równania krzywej przejściowej, prowadzący do uzyskania tegoż równania w postaci funkcji jawnej  $y(x)$ . Uproszczenie procedury polega na założeniu, że zamodelowana krzywizna  $k(l)$  odnosi się do swego rzutu na oś  $x$ . Uproszczona forma klotoidy – w układzie  $x, y$  – powstaje zatem po przyjęciu założeń:

- odcięta  $x = l$ ,
- odcięta punktu końcowego  $x_k = l_k$ ,
- krzywizna wyjściowa:

$$k_0(x) = \frac{1}{R l_k} x \quad (6)$$

W wyniku takich założeń otrzymujemy wyjściowe równanie krzywizny  $k_0(x)$ , jednak wyznaczenie w sposób ścisły funkcji  $y(x)$  jest na drodze analitycznej niemożliwe, gdyż wymagałoby rozwiązania równania różniczkowego:

$$k_0(x) = \frac{y''(x)}{\{1 + [y'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Dlatego też – tradycyjnie – traktujemy  $k_0(x)$  jako krzywiznę wyjściową, będącą przybliżeniem krzywizny docelowej  $k(x)$ . Przejście od  $k_0(x)$  do  $k(x)$  odbywa się w ten sposób, że uznajemy  $k_0(x)$  jako równanie drugiej pochodnej szukanej funkcji  $y(x)$ ; mamy zatem:

$$y''(x) = k_0(x) \quad (8)$$

Równanie to następnie dwukrotnie całkujemy, uzyskując  $y'(x)$  i  $y(x)$ ; uwzględniamy przy tym warunki:  $y(0) = 0$  i  $y'(0) = 0$ .

Otrzymujemy równanie krzywej przejściowej:

$$y(x) = \iint_0^x k_0(x) dx dx = \frac{1}{6 R l_k} x^3 \quad (9)$$

Uproszczona klotoida nosi własną odrębną nazwę – paraboli trzeciego stopnia i jest to tradycyjnie podstawowy rodzaj krzywej przejściowej stosowany na drogach kolejowych. Nie oznacza to wcale, że jest to rozwiązanie najkorzystniejsze, jednak inne znane postacie krzywych przejściowych (o nieliniowym rozkładzie krzywizny na długości) w zasadzie nie znajdują – jak dotąd – praktycznego zastosowania i wiele wskazuje na to, że potrzebne stanie się zupełnie nowe podejście do omawianego zagadnienia [3].

Krzywizna  $k(x)$  uzyskanej krzywej przejściowej (9) różni się, oczywiście, od krzywizny wyjściowej  $k_0(x)$ . Różnica ta zależy od wartości nachylenia stycznej  $y'(x)$ . W stosowanych w kolejnictwie krzywych przejściowych (gdzie przyjmujemy układ współrzędnych, w którym początek krzywej jest styczny do osi odciętych) wartość  $y'(x)$  na długości jest niewielka, dlatego też różnica pomiędzy krzywiznami  $k_0(x)$  i  $k(x)$  jest praktycznie nieistotna. Taki sposób wyznaczania rzędnych krzywej przejściowej znalazł zastosowanie w fundamentalnej pracy H. Bałucha [1].

Stosowność takiego właśnie podejścia ilustrują dane zawarte w tablicy 1. Podaje ona wartości relacji  $k(x)$  do  $k_0(x)$ , przy czym na długości krzywej przejściowej wprowadzono zmienną niemianowaną  $\xi = \frac{x}{l_k}$  i wykorzystano związek:

$$p(\xi) = \frac{k(\xi)}{k_0(\xi)} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{l_k}{2R}\right)^2 \xi^4\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Rozpatrzono przypadek krzywej przejściowej o długości  $l_k = 70$  m, łączącej prostą z łukiem kołowym o promieniu  $R = 500$  m.

**Tablica 1. Wartości relacji  $p(\xi)$  dla przykładowej krzywej przejściowej**

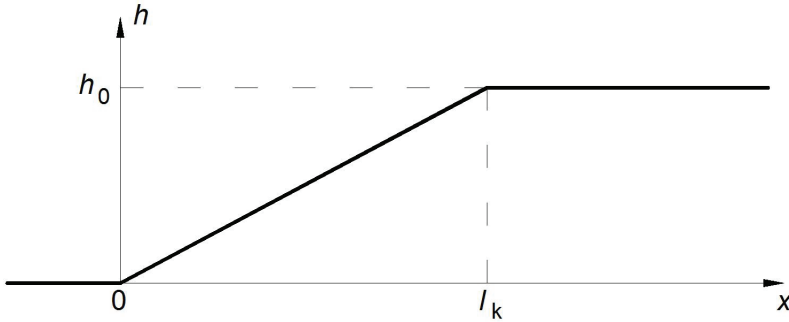
$\xi$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$p(\xi)$	0,999999	0,999988	0,999940	0,999812	0,999541
$\xi$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$p(\xi)$	0,999048	0,998238	0,996997	0,995197	0,992695

Skoro omawiane uproszczenia w zakresie kształtowania krzywych przejściowych na drogach kolejowych wydają się w pełni uzasadnione, należałoby się zastanowić nad jeszcze jedną modyfikacją, dotyczącą tym razem rampy przechyłkowej.

### 3. Założenia metody łagodzenia załomów na rampie prostoliniowej

Na krzywej przejściowej w postaci paraboli trzeciego stopnia występuje prostoliniowa rampa przechyłkowa (rys. 2), opisana równaniem:

$$h(x) = h_0 \frac{x}{l_k} \quad (11)$$



**Rys. 2. Wykres rzędnych prostoliniowej rampy przechyłkowej**

Podstawowym problemem realizacyjnym rampy przechyłkowej pokazanej na rys. 2 są dwa załomy, występujące na obydwu końcach rampy, tj. dla  $x = 0$  i  $x = l_k$ . Praktyka wykonawcza jednoznacznie dowodzi, że właśnie w tych rejonach dokładność pracy podbijarki pozostawia wiele do życzenia. Warto się więc zastanowić nad wyłagodzeniem tychże rejonów, czyli wprowadzeniem celowego odstępstwa od zasad modelowych kształtowania krzywej przejściowej i rampy przechyłkowej, określonych przez zależności (1) i (2). Wprowadzi to, co prawda, pewne zaburzenia w układzie występujących przyspieszeń niezrównoważonych, jednak skutki tych zaburzeń będą zapewne mniejsze niż obecne – będące wynikiem błędów pracy podbijarki.

Przystępując do sformułowania odpowiednich zależności teoretycznych przyjęto dwa założenia dotyczące pracy podbijarki torowej:

- podbijarka bardzo dobrze sobie radzi na odcinkach toru bez przechyłki oraz tam, gdzie przechyłka toru jest stała, a także wówczas, gdy charakter zmiany przechyłki jest równomierny,
- gwałtowna zmiana charakteru przechyłki (np. odpowiadająca wystąpieniu załomu na jej wykresie), a także konieczność zmia-

ny przechyłki o niewielką wartość stanowi dla podbijarki poważne utrudnienie.

W związku z powyższym w opracowywanej metodzie łagodzenia załomów rampy stworzono możliwość ograniczania odpowiednich warunków styczości poprzez wprowadzenie współczynnika liczbowego  $C \in (0, 1)$ . Obowiązujące zależności teoretyczne zostały wyprowadzone osobno dla każdego z obydwu rozpatrywanych rejonów.

#### 4. Rozwiązanie dla rejonu początkowego rampy przechyłkowej

Zależności teoretyczne dla rejonu początkowego zostały określone w układzie współrzędnych  $x, h$ , pokazanym na rys. 2. Odcięta środka strefy wyłagodzenia znajduje się w punkcie  $x = 0$ , a sama strefa obejmuje przedział zmiennej  $x \in (-K l_k, K l_k)$ , gdzie współczynnik  $K \in (0, 1)$  określa zasięg wyłagodzenia obejmujący rampę przechyłkową.

Przy wyznaczaniu rzędnych przechyłki  $h(x)$  w strefie wyłagodzenia załomów wykorzystamy analogiczny tok postępowania, jak przy identyfikacji problemu krzywych przejściowych na podstawie występujących przyspieszeń poprzecznych [4], a także przy wyznaczaniu rozkładu krzywizny na długości krzywej przejściowej [3]. Rozkładu wartości  $h(x)$  w rozpatrywanej strefie należy poszukiwać wśród rozwiązań równania różniczkowego:

$$h^{(m)}(x) = f[x, h, h', \dots, h^{(m-1)}], \quad (12)$$

z odpowiednimi warunkami na początku strefy (dla  $x = -K l_k$ ) i na jej końcu (dla  $x = K l_k$ ).

Rząd równania różniczkowego (12) wynosi  $m = n_1 + n_2 + 2$ , gdzie  $n_1$  i  $n_2$  oznacza liczbę warunków - odpowiednio - na początku i na końcu rozpatrywanej strefy. Otrzymana funkcja  $h(x)$  jest funkcją klasy  $C^n$  w przedziale  $(-K l_k, K l_k)$ , gdzie  $n = \min(n_1, n_2)$ .

Przyjmujemy równanie różniczkowe:

$$h^{(4)}(x) = 0, \quad (13)$$

z następującymi warunkami:

$$\begin{cases} h(-K l_k) = 0 & h(K l_k) = K h_0 \\ h'(-K l_k) = C \frac{h_0}{l_k} & h'(K l_k) = \frac{h_0}{l_k} \end{cases} \quad (14)$$

Rozwiązanie problemu różniczkowego (13), (14) prowadzi do wyznaczenia równania rampy przechyłkowej w rejonie początkowym. Równanie to ma postać:

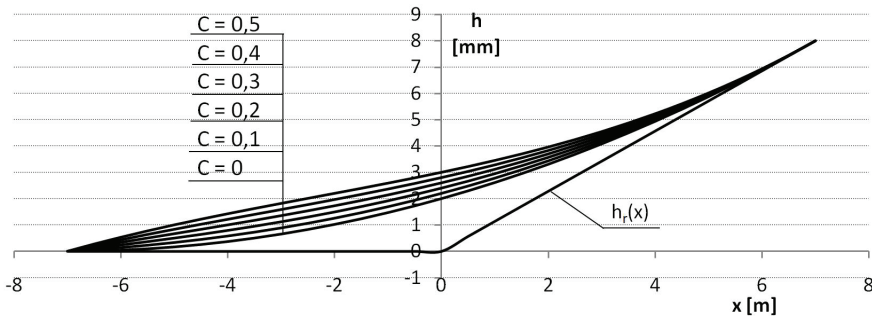
$$h(x) = \frac{1}{4} h_0 \left[ (1+C)K + \frac{2-C}{l_k} x + \frac{1-C}{K l_k^2} x^2 + \frac{C}{K^2 l_k^3} x^3 \right], \quad (15)$$

W przypadku szczególnym, gdy chcemy zachować warunek styczności w punkcie początkowym (tj. dla  $C = 0$ ), równanie (15) przyjmuje postać:

$$h(x) = \frac{1}{4} h_0 \left[ K + \frac{2}{l_k} x + \frac{1}{K l_k^2} x^2 \right], \quad (16)$$

Funkcja opisana równaniem (15) w przedziale  $x \in (-K l_k, K l_k)$  jest funkcją rosnącą od wartości  $h = 0$  do wartości  $h = K h_0$ . Dla  $C \in (0, 0,25)$  na jej wykresie nie występuje punkt przegięcia.

Uzyskane rozwiązanie zostanie zilustrowane na przykładzie prostoliniowej rampy przechyłkowej o długości  $l_k = 70$  m, gdy przechyłka na łuku wynosi  $h_0 = 80$  mm. Na rys. 3 pokazano wykresy funkcji  $h(x)$  dla różnych wartości  $C$  po przyjęciu współczynnika  $K = 0,1$ . Wykres  $h_r(x)$  przedstawia pierwotne ukształtowanie rampy przechyłkowej w rozpatrywanym rejonie.

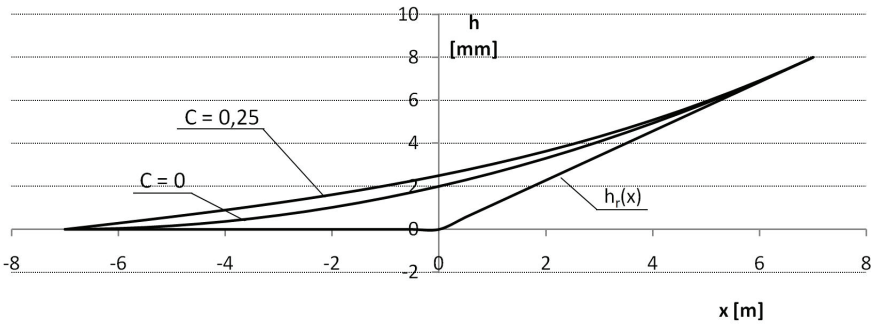


**Rys. 3. Wykresy rzędnych rampy  $h(x)$  w rejonie początkowym dla różnych wartości  $C$  przy  $K = 0,1$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**

Jak widać, przyjmowanie zbyt dużej wartości  $C$  prowadzi do pewnych zaburzeń w przebiegu funkcji  $h(x)$ . Jako najbardziej korzystne wydaje się przyjęcie  $C = 0,25$ , co daje równanie rampy przechyłkowej w postaci:

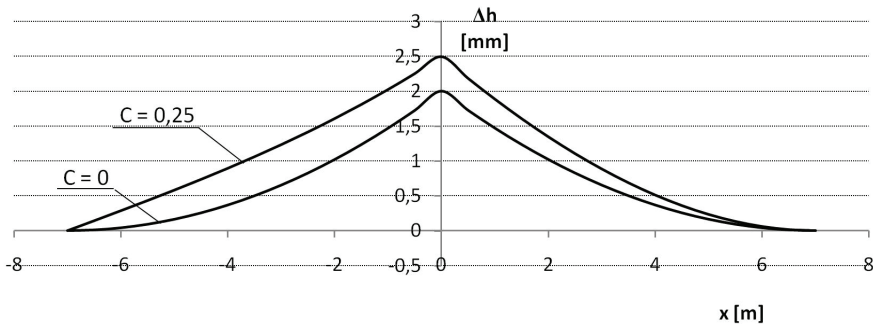
$$h(x) = \frac{1}{16} h_0 \left[ 5K + \frac{7}{l_k} x + \frac{3}{K l_k^2} x^2 + \frac{1}{K^2 l_k^3} x^3 \right], \quad (17)$$

Na rysunku 4 pokazano wykresy  $h(x)$  dla  $C = 0,25$  oraz  $C = 0$  (określonego za pomocą równania (16)). Widzimy, że rezygnacja z warunku styczności (przy  $C = 0$ ) powoduje wyraźne zwiększenie rzędnych już od samego początku kształtowania rampy, co z punktu widzenia wykonawstwa stanowi sytuację korzystną.



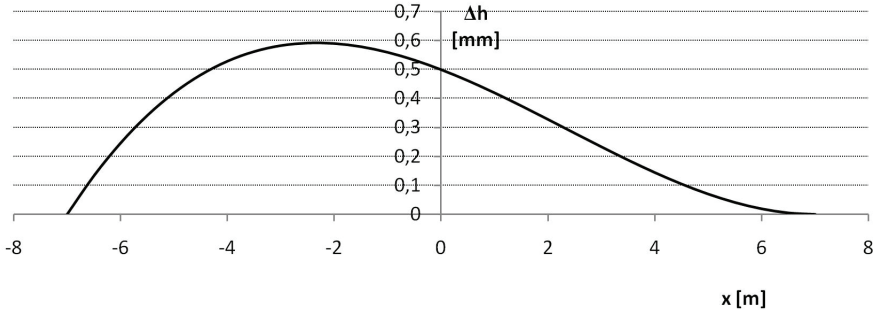
**Rys. 4. Wykresy rzędnych rampy  $h(x)$  w rejonie początkowym dla  $C = 0$  i  $C = 0,25$  przy  $K = 0,1$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**

Korzyści ze stosowania rozwiązania opisanego równaniem (17) można również dostrzec, analizując wykresy na rysunkach 5 i 6. Na rysunku 5 pokazano różnice pomiędzy rzędnymi wyłagodzonej rampy  $h(x)$  a rzędnymi pierwotnej rampy prostoliniowej  $h_r(x)$ , zaś na rysunku 6 – różnice rzędnych pomiędzy przypadkami  $C = 0$  i  $C = 0,25$ .



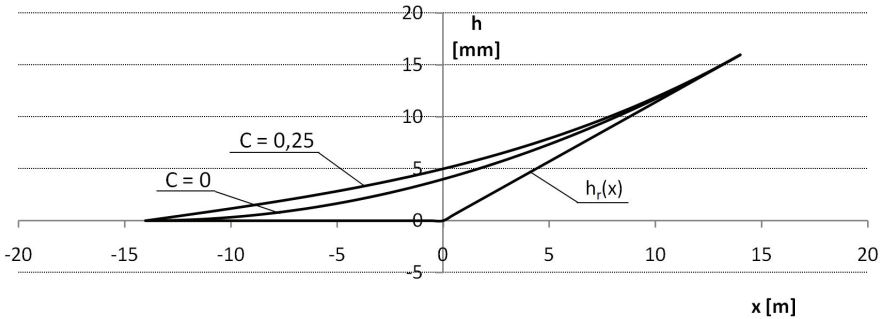
**Rys. 5. Wykresy różnic pomiędzy rzędnymi wyłagodzonej rampy  $h(x)$  a rzędnymi pierwotnej rampy prostoliniowej  $h_r(x)$  przy  $K = 0,1$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**



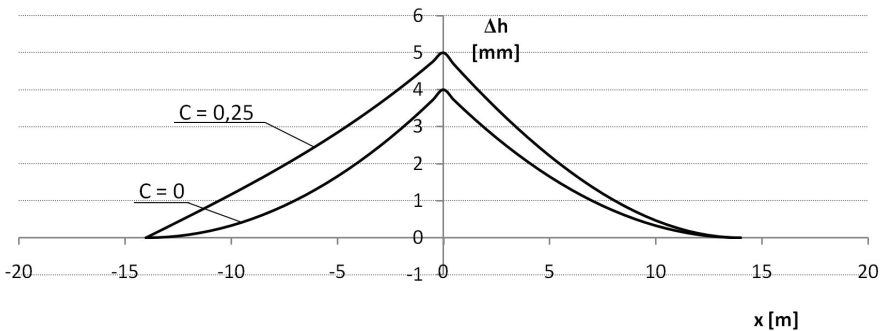


**Rys. 6. Wykres różnicy rzędnych  $\Delta h(x)$  pomiędzy wyłagodzoną rampą przechyłkową uzyskaną dla  $C = 0,25$  i rampą dla  $C = 0$  przy  $K = 0,1$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**

Dla większych wartości  $K$ , czyli dalszego wydłużania rejonu łagodzenia załomu, wartości rzędnych względnie ich różnic oczywiście rosną. Przykładowe wykresy dla  $K = 0,2$  pokazano na rysunkach 7 i 8.



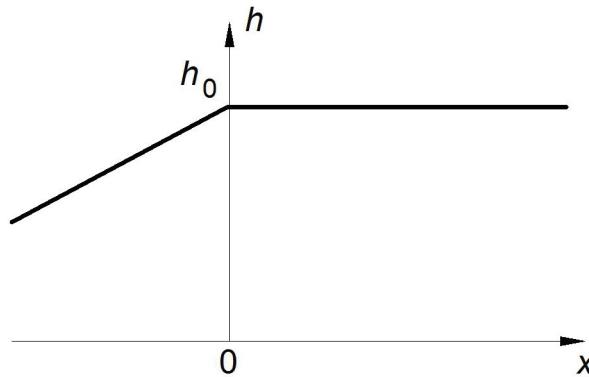
**Rys. 7. Wykresy rzędnych rampy  $h(x)$  w rejonie początkowym dla  $C = 0$  i  $C = 0,25$  przy  $K = 0,2$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**



**Rys. 8. Wykresy różnic pomiędzy rzędnymi wyłagodzonej rampy  $h(x)$  a rzędnymi pierwotnej rampy prostoliniowej  $h_r(x)$  przy  $K = 0,2$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**

## 5. Rozwiązanie dla rejonu wejścia w łuk kołowy

Zależności teoretyczne dla rejonu końcowego rampy przechyłkowej zostały wyznaczone w sposób analogiczny jak dla rejonu początkowego, jednak dla uproszczenia obowiązujących postaci wzorów stało się konieczne przyjęcie nowego układu współrzędnych  $x, h$ , pokazanego na rys. 9. Środek strefy wyłagodzenia odpowiada punktowi końcowemu pierwotnej rampy prostoliniowej; odcięta tego punktu wynosi  $x = 0$ , a sama strefa obejmuje – tak jak poprzednio – przedział zmiennej  $x \in (-K l_k, K l_k)$ .



Rys. 9. Przyjęty układ współrzędnych dla rejonu wejścia w łuk kołowy

W danym przypadku przyjmujemy również równanie różniczkowe (13), jednak obowiązują tutaj nieco inne warunki brzegowe:

$$\begin{cases} h(-K l_k) = (1 - K)h_0 & h(K l_k) = h_0 \\ h'(-K l_k) = \frac{h_0}{l_k} & h'(K l_k) = C \frac{h_0}{l_k} \end{cases} \quad (18)$$

Rozwiązując problem różniczkowy (13), (18) otrzymujemy równanie rampy przechyłkowej w jej rejonie końcowym. Ma ono następującą postać:

$$h(x) = h_0 - \frac{1}{4} h_0 \left[ (1 + C) K - \frac{2 - C}{l_k} x + \frac{1 - C}{K l_k^2} x^2 - \frac{C}{K^2 l_k^3} x^3 \right] \quad (19)$$

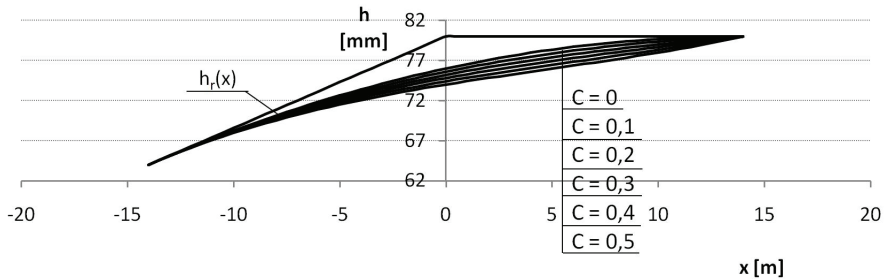
Gdy chcemy zachować warunek styczności w punkcie połączenia z przechyłką na łuku (tj. dla  $C = 0$ ), równanie (19) przyjmuje postać:

$$h(x) = h_0 - \frac{1}{4} h_0 \left[ K - \frac{2}{l_k} x + \frac{1}{K l_k^2} x^2 \right] \tag{20}$$

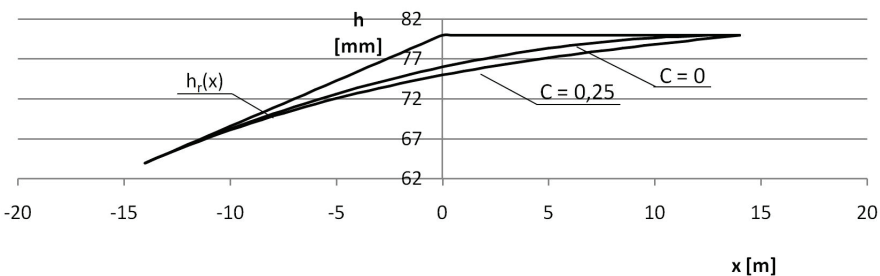
Uzyskana funkcja  $h(x)$  jest bardzo podobna do funkcji opisanej równaniem (15), stanowiąc w zasadzie jej lustrzane odbicie. Dla pożądanego – z punktu widzenia praktyki wykonawczej – przypadku  $C = 0,25$  ma ona postać:

$$h(x) = h_0 - \frac{1}{16} h_0 \left[ 5 K - \frac{7}{l_k} x + \frac{3}{K l_k^2} x^2 - \frac{1}{K^2 l_k^3} x^3 \right] \tag{21}$$

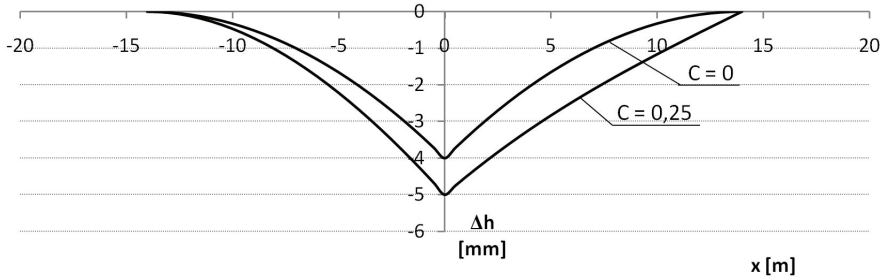
Na rysunku 10 pokazano wykresy funkcji  $h(x)$  dla różnych wartości  $C$  po przyjęciu współczynnika  $K = 0,2$ . Na rysunku 11 przedstawiono wykresy  $h(x)$  dla  $C = 0,25$  i  $C = 0$ , a na rysunku 12 – wykresy różnic pomiędzy rzędnymi rampy  $h(x)$  a rzędnymi rampy pierwotnej  $h_r(x)$ . Widać, że ma tutaj miejsce pełna analogia do sytuacji występującej na początku rampy przechyłkowej. Rezygnacja z warunku styczności i przyjęcie  $C = 0,25$  powoduje wyraźne zmniejszenie rzędnych rampy w stosunku do wartości przechyłki występującej na łuku kołowym.



**Rys. 10. Wykresy rzędnych rampy  $h(x)$  w rejonie końcowym dla różnych wartości  $C$  przy  $K = 0,2$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**



**Rys. 11. Wykresy rzędnych rampy  $h(x)$  w rejonie końcowym dla  $C = 0$  i  $C = 0,25$  przy  $K = 0,2$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)**



**Rys. 12.** Wykresy różnic pomiędzy rzędnymi wyłagodzonej rampy  $h(x)$  w rejonie końcowym a rzędnymi pierwotnej rampy prostoliniowej  $h_p(x)$  przy  $K = 0,2$  ( $l_k = 70$  m,  $h_0 = 80$  mm)

## 6. Podsumowanie

Skoro liczne uproszczenia, stosowane w procedurze kształtowania krzywych przejściowych na drogach kolejowych, wydają się w pełni uzasadnione, należałoby się zastanowić nad jeszcze jedną modyfikacją, dotyczącą skrajnych rejonów prostoliniowej rampy przechyłkowej. Występują tam wyraźne załomy na wykresie przechyłki, co sprawia, że są to rejonu bardzo niekorzystne z punktu widzenia praktyki wykonawczej. Wyłagodzenie tychże rejonów wprowadzi co prawda pewne zaburzenia w układzie występujących przyspieszeń niezrównoważonych, jednak skutki tych zaburzeń będą zapewne mniejsze niż obecne – będące wynikiem błędów pracy podbijarki.

W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu dla rejonu początkowego rampy przechyłkowej (rozpoczynając strefę łagodzenia na prostej) oraz dla rejonu końcowego (przesuwając strefę łagodzenia na łuk kołowy). Przy wyznaczaniu rzędnych przechyłki  $h(x)$  w rozpatrywanych strefach znalazła zastosowanie metoda identyfikacji problemu za pomocą równań różniczkowych.

Wyznaczone zależności teoretyczne wykorzystano w konkretnych przykładach obliczeniowych. Jak się wydaje, najbardziej korzystna może się okazać rezygnacja z warunku styczności i przyjęcie w stosowanych wzorach wartości współczynnika  $C = 0,25$ , który zapewnia płynne i wyraźne narastanie rzędnych rampy.

## Bibliografia

- [1] Bałuch H.: *Optymalizacja układów geometrycznych toru*, WKŁ, Warszawa 1983.
- [2] Koc W.: *Elementy teorii projektowania układów torowych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.
- [3] Koc W.: *Parametryczna krzywa przejściowa dla dróg kolejowych*. Przegląd Komunikacyjny 2011, nr 9-10.
- [4] Mieloszyk E., Koc W.: *General dynamic method for determining transition curve equations*. Rail International – Schienen der Welt 1991, nr 10.

## THE ATTEMPT OF SMOOTHING THE SUDDEN CHANGES IN STRAIGHT SUPERELEVATION RAMP

### Summary

*The practical aspect of creation side regions of rectilinear superelevation ramps has been presented in the paper. The executive practice proves that there are much to be desired within the accuracy of tamping machine works in these regions. It is worth to consider smoothing of sudden changes. It will introduce some disturbances in the layout of unbalanced side accelerations, but the results of disturbances will be less than at present as a result of inaccurate work of tamping machine. The proper solution – separately for the beginning region of superelevation ramp and the region of entry in circular arc have been presented. The method of problem identification by differential equation has been applied to calculate the ordinates of superelevation  $h(x)$  in the zone of sudden changes smoothing. The given dependences have been illustrated by individual examples of calculations.*

**Keywords:** railway track, superelevation ramp, smoothing of sudden changes