



Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

ZASTOSOWANIE TESTU SKRĘCANIA WALCA KOŁOWEGO W ZAKRESIE DUŻYCH DEFORMACJI DO IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MATERIAŁOWYCH HIPERSPRĘŻYSTOŚCI LEPI SZCZY ASFALTOWYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono interpretację testu skręcania walca kołowego z indukowaną przez znaczne deformacje siłą ściskającą w ramach teorii hipersprężystości. Badania doświadczalne wykonano reometrem dynamicznego ścinania (DSR). Podano opis właściwości sprężystych lepiszczy modyfikowanych w ramach analizowanej teorii. Zaproponowano sposób wyznaczenia funkcji i parametrów materiałowych relacji konstytutywnej hipersprężystości. Szczegółową analizę wykonano w przypadku lepiszcza modyfikowanego 65/105-60.

WSTĘP

Relacje konstytutywne lepiszczy asfaltowych są zazwyczaj formułowane w ramach teorii małych przemieszczeń, por. [4]. Niemniej jednak przy wielu procesach technologicznych i eksploatacyjnych mieszanek mineralno-asfaltowych, lepiszcze jest poddawane znacznym deformacjom. Oznacza to konieczność sformułowania relacji konstytutywnych lepiszczy w ramach teorii dowolnych deformacji. Na przykład jest to istotne w mikro-mechanicznym modelowaniu kompozytów mieszanek mineralno-asfaltowych [4]. Lepiszczka modyfikowana polimerami (np. SBS) w zakresie temperatur eksploatacyjnych wykazują właściwości sprężyste lepkie i plastyczne [5]. Celem pracy jest opis właściwości sprężystych lepiszczy modyfikowanych. Ze względu na znaczny zakres rozpatrywanych deformacji jest stosowana teoria hipersprężystości [1-3,7,8]. W ten sposób opisywane są tylko procesy czynne obciążenia, przy stałej temperaturze i ustalonej prędkości deformacji. Do wyznaczenia funkcji i parametrów materiałowych hipersprężystości stosowane są wyniki testu skręcania, wykonane reometrem dynamicznego ścinania (DSR), z możliwością pomiaru momentu skręcającego i siły ściskającej próbkę. W celu interpretacji wyników badań stosuje się rozwiązanie teoretyczne zadania brzegowego niejednorodnej deformacji skręcania ze ściskaniem. Istnienie w eksperymencie siły ściskającej jest przejawem tzw. efektu Poyntinga, co jest charakterystyczne w przypadku hipersprężystości [2]. Należy już na wstępie podkreślić, że teoria elementarna skręcania nie przewiduje istnienia siły ściskającej próbkę. Ten fakt dodatkowo uzasadnia konieczność stosowania teorii dowolnych deformacji.

1. TEST SKRĘCANIA

Badania doświadczalne przeprowadzono przy zastosowaniu reometru dynamicznego ścinania HAAKE Mars II. Reometr ten został zaprojektowany głównie do badań, w których próbka w kształcie walca kołowego jest ścinana statycznie bądź dynamicznie przy wymuszeniu momentu skręcającego bądź kąta skręcenia [6]. Dodatkowo w reometrze tym istnieje możliwość pomiaru siły osiowej towarzyszącej skręcaniu oraz sterowanie przemieszczeniowe bądź siłowe przy rozciąganiu. Reometr jest wyposażony w komorę termiczną z elektrycznymi elementami grzewczymi, które współpracując z kriostatem umożliwiają wygenerowanie zadanej temperatury, bądź przebiegu o określonych gradientach temperatury, patrz fot. 1.



Fot. 1. Reometr dynamicznego ścinania

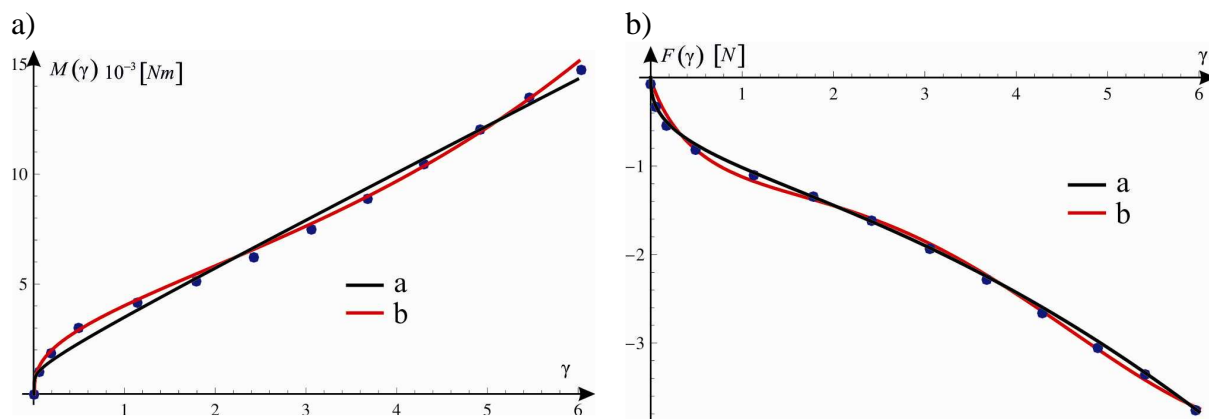
Badania przeprowadzono na próbkach walcowych o średnicy 8 [mm] i wysokości 2 [mm] w zakresie temperatur od 10 [°C] do 60 [°C]. W pierwszym etapie do badań wybrano lepiszcze modyfikowane 65/105-60, dla którego wybrane parametry materiałowe zestawiono w tab. 1.

Tab. 1. Wybrane parametry materiałowe oryginalnego lepiszcza 65/105-60

Lepiszczce	Norma modułu zespolonego [MPa] w 20[°C] przy 10 [Hz]	PG Górne [°C]	PG Dolne [°C]
65/105-60	2.257	82	-28

W tab. 1 zamieszczono wyniki badań standardowych takich jak norma modułu zespolonego, dolne i górne PG (temperatury eksploatacyjne).

Typowe wyniki statycznego testu skręcania walca z lepiszcza w temperaturze 20[°C] pokazano na rys. 1. Odpowiednio na rys. 1a i 1b pokazano moment i siłę ściskającą w funkcji kąta skręcenia γ .



Rys. 1. Przykładowe wyniki oraz aproksymacje testu skręcania próbki o wysokości $h = 2$ [mm] i promieniu $a = 4$ [mm] w przypadku lepszca 65/105-60 w temperaturze $T = 20$ [°C]

Kształt krzywych podanych na rys.1 jest podobny i można aproksymować je wielomianami i funkcjami potęgowymi. Na rys.1a i b pokazano wynik aproksymacji momentu skręcającego oraz siły ściskającej funkcjami o postaci:

$$M = c_1\gamma + c_2\gamma^n + c_3\gamma^3, \quad F = d_0\gamma + d_1\gamma^2 + d_2\gamma^{n+1} + d_3\gamma^4, \quad (1)$$

gdzie: c_1, \dots, d_3, n , są stałymi. W celu porównania podano dwa przypadki aproksymacji. W aproksymacji (a) rozpatrywano odpowiednio 2 i 3 początkowe wyrazy w (1). W aproksymacji (b), która jest dokładniejsza, stosowano funkcje (1). W obu przypadkach do wyznaczenia stałych zastosowano program MATHEMATICA i pakiet Nonlinear Regression, czyli metody optymalizacji nieliniowej.

Z elementarnej, liniowej teorii zginania otrzymamy

$$M = c_1\gamma = \mu_0 \frac{\pi a^4}{2} \frac{\gamma}{h} = \mu_0 J_0 \vartheta, \quad F = 0, \quad (2)$$

gdzie ϑ jest tzw. jednostkowym kątem skręcenia, czyli interpretację jednej stałej w (1)₁. Natomiast z rozwiązania zadania w ramach teorii hipersprężystości wynika, że występowanie siły osiowej jest tzw. efektem drugiego rzędu, co oznacza, że we wzorze (1)₂ powinno być $d_0 = 0$ oraz wykładniki potęg powinny być o jeden większe, por. [2] oraz pkt. 3.

2. SKRĘCANIE WALCA KOŁOWEGO Z IZOTROPOWEGO NIEŚCISLIWEGO MATERIAŁU HIPERSPRĘŻYSTEGO

Z punktu widzenia teoretycznego problem skręcania walca kołowego w zakresie dowolnych deformacji jest dobrze zbadany w literaturze. Jest to przykład niejednorodnej deformacji, która może być zrealizowana w każdym izotropowym materiale nieściśliwym [1-3,7,8]. Rozwiązanie zadania skręcania walca kołowego jest pomocne do programowania testów doświadczalnych dla materiałów wykazujących znaczne nieliniowe deformacje sprężyste. Test można przeprowadzić kontrolując wypadkową siłę i moment, które działają na podstawy walca skręcanego. Użycie w trakcie skręcania próbki siły osiowej wynika z istnienia efektu Poyntinga [1].

Równanie konstytutywne izotropowego materiału hipersprężystego w opisie Eulera ma następującą postać [3,8]:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \bar{\beta}_1\bar{\mathbf{B}} + \bar{\beta}_{-1}\bar{\mathbf{B}}^{-1}, \quad (3)$$

gdzie

$$\bar{\beta}_1 = 2\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1}, \quad \bar{\beta}_{-1} = -2\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}, \quad (4)$$

zaś $W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$ jest funkcją jednostkowej energii sprężystości. Występujące w relacji konstytutywnej tensory deformacji izochorycznej $\bar{\mathbf{B}}$ i $\bar{\mathbf{B}}^{-1}$ oraz ich niezmienniki \bar{I}_1 i \bar{I}_2 wynikają z multiplikatywnej dekompozycji tensora gradientów deformacji \mathbf{F} na część objętościową $J = \det\mathbf{F}$ i izochoryczną $\bar{\mathbf{F}}$, por. np. [3]. Niezależne niezmienniki deformacji izochorycznej są zdefiniowane następująco:

$$\bar{I}_1 = \text{tr}\bar{\mathbf{B}} = \text{tr}\bar{\mathbf{C}}, \quad \bar{I}_2 = \text{tr}\bar{\mathbf{B}}^{-1} = \text{tr}\bar{\mathbf{C}}^{-1}. \quad (5)$$

Tensory $\bar{\mathbf{C}}$ i $\bar{\mathbf{B}}$ są nazywane odpowiednio prawym i lewym tensorem izochorycznej deformacji Cauchy'ego-Greena [3]. Przypominamy, że w materiale nieściśliwym tensor naprężenia Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ jest określony z dokładnością do tensora kulistego. Skalar p wyznaczamy rozwiązując dany problem brzegowy.

W teście skręcania próbka jest walcem kołowym o promieniu a i wysokości h w konfiguracji początkowej. Ze względu na więzy nieściśliwości walec także w konfiguracji aktualnej zachowuje swoje wymiary. Pole niejednorodnej deformacji w układzie kartezjańskim zdefiniowane jest poniższymi zależnościami [1]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\vartheta X_3)X_1 - \sin(\vartheta X_3)X_2, \\ x_2 &= \sin(\vartheta X_3)X_1 + \cos(\vartheta X_3)X_2, \\ x_3 &= X_3, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie składowe X_i i x_i określają odpowiednio położenie cząstki walca w konfiguracji początkowej i aktualnej, zaś ϑ jest tzw. jednostkowym kątem skręcenia walca.

Zadanie brzegowe o deformacji niejednorodnej (6) wygodnie jest rozpatrywać we współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) w opisie Eulera, stosując od razu tzw. lokalne bazy unormowane i składowe fizyczne odpowiednich tensorów [8].

Po zastosowaniu definicji tensora deformacji $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ i przekształceniach otrzymamy z (6) następujące składowe fizyczne tensorów \mathbf{B} i \mathbf{B}^{-1} :

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \vartheta^2 r^2 & \vartheta r \\ 0 & \vartheta r & 1 \end{bmatrix}, \quad [B_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\vartheta r \\ 0 & -\vartheta r & 1 + \vartheta^2 r^2 \end{bmatrix}, \quad i, j = r, \varphi, z. \quad (7)$$

Deformacja (6) jest deformacją izochoryczną, tzn. $J = \det\mathbf{F} = \det\mathbf{B} = 1$ oraz reprezentacje tensorów \mathbf{B} i \mathbf{B}^{-1} wg (7) są odpowiednio reprezentacjami tensorów $\bar{\mathbf{B}}$ i $\bar{\mathbf{B}}^{-1}$. Z (7) wynika, że

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 3 + \vartheta^2 r^2. \quad (8)$$

Z relacji konstytutywnej (3) i (4) oraz zależności (7) i (8) wynika, że składowe fizyczne tensora naprężenia Cauchy'ego (w lokalnej bazie ortonormalnej układu walcowego) dla każdego materiału nieściśliwego są następujące:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_{-1} - p & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_{-1} - p + \bar{\beta}_1 \vartheta^2 r^2 & (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_{-1}) \vartheta r \\ 0 & (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_{-1}) \vartheta r & \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_{-1} - p + \bar{\beta}_{-1} \vartheta^2 r^2 \end{bmatrix}, \quad i, j = r, \varphi, z, \quad (9)$$

gdzie funkcje materiałowe są zależne od r .

Z (9) wynika, że zawsze w przypadku materiałów nieściśliwych mamy następującą zależność uniwersalną (por. [2,3])

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = r \vartheta \sigma_{\varphi z}. \quad (10)$$

Zauważmy także, że jeżeli funkcja W jest niezależna od niezmiennika \bar{I}_2 to prawdziwa jest w przypadku skręcanego walca kolejna relacja uniwersalna

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz}, \quad (11)$$

która wynika bezpośrednio z (9). Zależności (10) i (11) nie można jednak potwierdzić doświadczalnie.

Po zastosowaniu zależności (9) oraz równań równowagi w opisie Eulera: $\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ i warunku brzegowego w konfiguracji aktualnej z zerowymi naprężeniami σ_{rr} na poboczniczy walca, można wykazać (postępując podobnie jak w [1]), że wyznaczenie nieznanego mnożnika Lagrange'a sprowadza się do rozwiązania względem r następującego równania różniczkowego zwyczajnego:

$$-\bar{\beta}_1 \vartheta^2 r + \frac{d\bar{\beta}_1}{dr} + \frac{d\bar{\beta}_{-1}}{dr} - \frac{dp}{dr} = 0, \quad (12)$$

z warunkiem początkowym

$$p(a) = \bar{\beta}_1(a) + \bar{\beta}_{-1}(a). \quad (13)$$

W każdym przypadku równanie (12) z warunkiem (13) można rozwiązać, jeżeli dane są funkcje materiałowe (4).

Wypadkowa siła F i moment M działające na denka walca, konieczne do zapewnienia założonej deformacji skręcanego walca mają postać:

$$F = 2\pi \int_0^a \sigma_{zz} r dr, \quad M = 2\pi \int_0^a \sigma_{\varphi z} r^2 dr, \quad (14)$$

czyli są funkcjami jednostkowego kąta skręcenia. Występowanie siły normalnej (14)₁ w zagadnieniu skręcania walca kołowego zasadniczo odróżnia teorię hypersprężystości od liniowej teorii małych odkształceń (występuje tzw. efekt Poyntinga). Siła i moment (14) w funkcji kąta skręcenia są wielkościami mierzalnymi w teście skręcania.

Ze względu na postać relacji konstytutywnej nieściśliwego materiału hipersprężystego (3) jak i wynik (9) widzimy, że istotny jest w zagadnieniu skręcania jakościowy wpływ zarówno niezmiennika \bar{I}_2 jak i jego sprzężenia z niezmiennikiem \bar{I}_1 w funkcji W . Jest to ważne, pomimo że niezmienniki (8) są w tym przypadku identyczne, ale efektów tych nie można zauważyć i pomierzyć w teście skręcania (podobnie jak w teście jednoosiowego rozciągania), co wykazano między innymi w pracy [3].

W pracach [2,3] rozpatrywano m.in. modelu gumy o funkcji jednostkowej energii sprężystej odkształcenia izochorycznego w następującej postaci:

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \frac{1}{2} \left[a_1(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{2} a_2(\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{1}{3} a_3(\bar{I}_1^3 - 27) + a_4(\bar{I}_2 - 3) + a_5(\bar{I}_1 \bar{I}_2 - 3) \right], \quad (15)$$

gdzie a_i są stałymi.

Wypadkowa siła F i wypadkowy moment M wg (14) mają obecnie postać:

$$F = -\frac{J_0}{12} \vartheta^2 \left[6(a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 + 9a_5) + 4a^2 \vartheta^2 (a_2 + 2a_3 + 3a_5) + 3a^4 \vartheta^4 a_3 \right], \quad (16)$$

$$M = \frac{J_0}{6} \vartheta \left[6(a_1 + 3a_2 + 9a_3 + a_4 + 6a_5) + 4a^2 \vartheta^2 (a_2 + 6a_3 + 2a_5) + 3a^4 \vartheta^4 a_3 \right].$$

Zauważmy, że dla: $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, $a_1 = \mu_0 f$, $a_4 = \mu_0(1-f)$, gdzie $f \in (0,1]$, otrzymamy z (16) znane zależności dla materiału Mooney-Rivlina i neoHooke'a ($f = 1$), por. [2]. W najprostszym przypadku hipersprężystości mamy:

$$F = -\frac{J_0}{2} \mu_0 \vartheta^2, \quad M = J_0 \mu_0 \vartheta. \quad (17)$$

Widzimy, że najprostsza teoria hipersprężystości przewiduje istnienie w teście skręcania walca kołowego siły ściskającej, czyli inaczej niż w teorii elementarnej, patrz (2).

3. WYZNACZENIE PARAMETRÓW MATERIAŁOWYCH RELACJI KONSTITUTYWNYCH HIPERSPRĘŻYSTOŚCI

W pracy [3] wykazaliśmy, że nie ma żadnych podstaw teoretycznych i eksperymentalnych aby postulować W jako funkcję niezależną od niezmiennika \bar{I}_2 . Należy jednak zauważyć, że ze względu na możliwości pomiaru i dyskusję przeprowadzoną w punkcie 2, zależność między momentem i kątem skręcania można z dowolną dokładnością aproksymować funkcją materiałową wynikającą z następującej relacji konstytutywnej:

$$(a) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{B}}, \quad \bar{\beta}_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1}, \quad (18)$$

gdzie $W = W(\bar{I}_1)$. Z dyskusji przeprowadzonej w pkt.2 oraz wyników teoretycznych (1)₁ i (16)₂ wynika, że zadawalającą aproksymację wyników doświadczalnych uzyskuje się stosując następującą zależność między momentem a kątem skręcania:

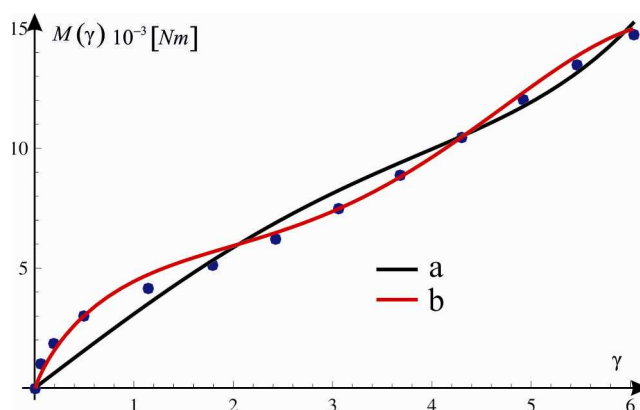
$$M = J_0 \vartheta \left[b_0 + a^2 \vartheta^2 b_1 + a^4 \vartheta^4 b_2 \right] + J_0 d_1 (a \vartheta)^n. \quad (19)$$

Do aproksymacji przyjęto na podstawie powyższych rozważań dwa modele konstytutywne o funkcjach jednostkowej energii sprężystości (JES) zależnych od pierwszego niezmiennika deformacji izochorycznej w postaci:

$$W(\bar{I}_1) = \frac{\mu_0}{2} \left[(\bar{I}_1 - 3) + \frac{a_1}{2} (\bar{I}_1 - 3)^2 + \frac{a_2}{3} (\bar{I}_1 - 3)^3 + \frac{a_3}{n_3} (\bar{I}_1 - 3)^{n_3} \right], \quad (20)$$

$$W(\bar{I}_1) = \frac{\mu_0}{2} \left[(\bar{I}_1 - 3) + \frac{a_1}{2} (\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{a_2}{3} (\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{a_3}{n_3} (\bar{I}_1 - 3)^{n_3} \right]. \quad (21)$$

Na rys. 2 zamieszczono dwie uzyskane aproksymacje badań doświadczalnych. Krzywa (a) odpowiada funkcji jednostkowej energii sprężystości w postaci (20) albo (21) bez wyrazu $(\bar{I}_1 - 3)^{n_3}$. Z kolei krzywa (b) odpowiada aproksymacji z uwzględnieniem tego wyrazu przy zastosowaniu modelu o funkcji JES w postaci (20) albo (21). Parametry materiałowe do tych modeli wyznaczone metodami optymalizacji liniowej/nieliniowej zamieszczono w tab.2.



Rys. 2. Aproksymacje wyników badań doświadczalnych skręcania próbki walcowej w przypadku lepiszcza 65/105-60 w temperaturze $T = 20 [^{\circ}\text{C}]$: (a) przy zastosowaniu modelu bez elementu $(\bar{I}_1 - 3)^{n_3}$ w funkcji JES, (b) dla funkcji JES (20) albo (21)

Tab. 2. Parametry materiałowe do wybranych modeli hipersprężystości wyznaczone dla lepiszcza 65/105-60

	μ_0 [MPa]	a_1	a_2	a_3	n_3
JES (20) bez $(\bar{I}_1 - 3)^{n_3}$	0.0157	-0.00725	0.0000480	-	-
JES (20)	0.0879	0.00398	-0.0000147	-0.695	1.1
JES (21)	0.0654	0.00272	-7.421×10^{-6}	-0.668	1.1

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wyniki i interpretację niestandardowego testu skręcania walca kołowego, wykonanego z lepiszcza modyfikowanego 65/105-60, z indukowaną przez znaczne deformacje siłą ściskającą w ramach teorii hipersprężystości. Badania doświadczalne wykonano reometrem dynamicznego ścinania (DSR) z możliwością kontrolowania wartości i prędkości: momentu skręcającego, kąta skręcenia i siły osiowej. Do interpretacji wyników badań doświadczalnych zastosowano analityczne rozwiązanie zadania skręcania walca wykonanego z nieściśliwego materiału hipersprężystego. Przedyskutowano jakościowo

to rozwiązanie i wykazano, że do aproksymacji wyników badań wystarczający jest model hipersprężystości bez wpływu drugiego niezmiennika deformacji izochorycznej. Wynika to z faktu, że dwa podstawowe niezmienniki deformacji izochorycznej są jednakowymi funkcjami mierzonego w eksperymencie kąta skręcenia. Następnie podano dwie propozycje opisu właściwości sprężystych lepiszczy modyfikowanych w ramach analizowanej teorii hipersprężystości. Zaproponowano sposób wyznaczenia funkcji i parametrów materiałowych relacji konstytutywnej hipersprężystości. Należy wyraźnie podkreślić, że test skręcania, podobnie jak test jednoosiowego rozciągania, nie rozstrzyga teoretycznego zagadnienia, czy model hipersprężystości zależy od drugiego niezmiennika deformacji izochorycznej. Dyskusja na ten temat podana jest w pracy [3], gdzie wykazano, że konieczne jest wykonanie testów dwuosiowych. W przypadku analizowanego testu skręcania uwzględnienie drugiego niezmiennika nie zmienia jakości aproksymacji (patrz (16)) wyników badań doświadczalnych.

APPLICATION OF LARGE DEFORMATION CIRCULAR CYLINDER TORSION TEST FOR MATERIAL PARAMETERS IDENTIFICATION FOR HYPERELASTIC BINDERS

Abstract

The paper presents the interpretation of the circular cylinder torsion test carried out for significant deformation taking into account compressive force induced by this deformation. Experimental tests were performed using dynamic shear rheometer (DSR). The description of the elastic properties of modified binders are shown in the frame of theory of hyperelastic materials. In the paper the proposition of determination of the function and material parameters of hyperelastic constitutive models is presented. A detailed analysis was performed for the modified binder 65/105-60.

BIBLIOGRAFIA

1. Green A.E., Zerna W.: *Non-linear elastic deformations*. Horwood, Chichester, 1968.
2. Jemioło S.: *Skręcanie gumowego walca kołowego w zakresie dużych deformacji sprężystych*. Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szcześniak [ed], OWPW, Warszawa, 2000.
3. Jemioło S.: *Studium hipersprężystych właściwości materiałów izotropowych, Modelowanie i implementacja numeryczna*. Prace Naukowe, Budownictwo, z.140, OWPW, Warszawa, 2002.
4. Kim Y. R.: *Modelling of Asphalt Concrete*. McGraw-Hill, USA, 2009
5. Macosko Ch.W.: *Rheology - Principles, Measurements and Applications*. Viley-VCH, USA, 1994.
6. Mezger T.G.: *The Rheology – Handbook, For users of rotational and oscillatory rheometers*, Vincentz Verlag, Hannover, 2002.
7. Lurie A.I.: *Nonlinear theory of elasticity*. North-Holland, Amsterdam-Tokyo, 1990.
8. Ogden R.W.: *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, 1984.

Autorzy:

prof. dr. hab. inż. Stanisław JEMIOŁO – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
dr inż. Marcin GAJEWSKI – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut
Badawczy Dróg i Mostów w Warszawie