

PROBLEMY MECHATRONIKI
UZBROJENIE, LOTNICTWO, INŻYNIERIA BEZPIECZEŃSTWA

ISSN 2081-5891



8, 2 (29), 2017, 109-126

PROBLEMS OF MECHATRONICS
ARMAMENT, AVIATION, SAFETY ENGINEERING

Czasoprzestrzeń w analizie dynamicznej mostów

Jan Bogdan OBREŃSKI

Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
00-637 Warszawa, Armii Ludowej 16
e-mail: jobrebski@poczta.onet.pl

Artykuł wpłynął do redakcji 10.04.2017 r.

Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 22.06.2017 r.

DOI 10.5604/01.3001.0010.4115

Streszczenie. W pracy zaprezentowano kolejne zastosowania i możliwości analizy dynamicznej obiektów inżynierskich za pomocą czasoprzestrzeni z wykorzystaniem różnic skończonych, w ujęciu numerycznym zaproponowanym przez autora. Obiekty te mogą być poddane różnego rodzaju obciążeniom. Tym razem jest to dźwigar mostowy z pojazdami poruszającymi się po nim z określoną prędkością. Może to być jeden pojazd lub cała ich grupa. Rozważania przeprowadzono od ogólnych różniczkowych równań ruchu przez ich uproszczenia wynikające z przyjętych założeń dla mostu, do układu dwóch równań opisujących jego giętno-skrętne zachowanie się. Pokazano przykłady konkretnych zastosowań tej metody.

Słowa kluczowe: mechanika, dynamika, czasoprzestrzeń, różnice skończone, most

1. WSTĘP

Analiza dynamiczna różnego rodzaju konstrukcji z wykorzystaniem czasoprzestrzeni była prezentowana przez wielu autorów. Pomysł polega na zastosowaniu przestrzeni czterowymiarowej, gdzie oprócz trzech wymiarów dodaje się czas jako czwarty. Jednym z ostatnich szerszych ujęć tego podejścia było zastosowanie przez Zbigniewa Kączkowskiego formalizmu *Metody Elementów Skończonych*. Według tej koncepcji zostały wykonane przykłady z Markiem Witkowskim [6], przez Aldonę Gózdź [2], Zbigniewa Kacprzyka, Wojciecha Cyganeckiego, Józefa Pelca, Annę Podhorecką i Irenę Sielamowicz. W sumie, praktyczne rozwiązania dotyczyły dość prostych zadań technicznych.

Inne numeryczne ujęcie czasoprzestrzeni (*3D-Time Space Method* – 3D-TSM) zostało zrealizowane po raz pierwszy przy studiach nad dynamiką budynków wysokich prowadzonych w ramach doktoratu Roberta Szmita. Problemy numeryczne dotyczące jakości otrzymywanych wyników z programu komercyjnego *MathCAD 2000*, w zakresie dynamiki modelu budynku wysokiego, skierowały uwagę obecnego autora na czasoprzestrzeń. Zdecydowano się na numeryczne rozwiązanie wykorzystujące *Metodę Różnic Skończonych* (MRS). Trójwymiarową przestrzeń uzupełniono tu czwartym wymiarem – czasem. Okazało się ono w pełni skuteczne. Jediną trudnością było tu właściwe dobranie tzw. kroku czasowego.

Niemal równoległe do prac Roberta Szmita, obecny autor i pomysłodawca metody wykonał liczne przykłady dotyczące obciążeń ruchomych na mostach, drogach i pasach startowych lotniska. Testowe rozwiązania przeprowadzono dla modeli prętowych i dla płyt.

Niektóre testy wykonali też ostatnio studenci teorii konstrukcji, w ramach obowiązkowych prac domowych [1, 22]. Część zagadnień wykonali oni również z wykorzystaniem programów komercyjnych [22], co pozwoliło porównać skuteczność poszczególnych metod obliczeniowych i jakość otrzymywanych wyników.

2. OGÓLNE RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWE I ICH MOŻLIWOŚCI

We wszystkich wspomnianych zadaniach, jak również w doktoracie Roberta Szmita, wykorzystano bardzo ogólne równania ruchu podane w podręczniku Jana Obrębskiego [7]. Jest to w sumie układ czterech równań różniczkowych drugiego i czwartego rzędu z pochodnymi względem trzech wymiarów przestrzennych i czasu (1).

Te równania ruchu uwzględniają zarówno drgania swobodne i wymuszone, jak i ich tłumienie przez otaczający ośrodek, w tym grunt, powietrze i wodę. Mają one następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & \overline{E} \overline{A} v_1'' - \mu \ddot{v}_1 - M \ddot{v}_1 + \ddot{v}_2 S_{3m} + \ddot{v}_3 S_{2m} + \ddot{\Theta}' S_{\dot{\omega}m} - \overline{Q}_1' - \kappa_{12} \dot{v}_2 + \kappa_{13} \dot{v}_3 + \\
 & + \kappa_{1\dot{\omega}} \dot{\Theta}' - K_1 v_1 + K_{12} v_2 + K_{13} v_3 + K_{1\dot{\omega}} \Theta' - v_1^2 \overline{\kappa}_1 = -q_1^w - \tau_p + \tau_l \\
 & \overline{E} I_3 v_2^{IV} - N v_2'' + [\Theta(M_2 - N \eta_{3A}) + Q_2]'' + \ddot{v}_2 (\mu + M) - \ddot{\Theta} (S_{2m} - \eta_{3A} \mu) + \overline{Q}_2' + \dot{v}_2 \kappa_2 + \\
 & - \dot{\Theta} (\kappa_{23} - \eta_{3A} \kappa_2) + v_2 K_2 - \Theta (K_{23} - \eta_{3A} K_2) + \dot{v}_2^2 \overline{\kappa}_2 + 2V_2 \dot{v}_2 \overline{\kappa}_2 + \\
 & + \ddot{v}_1 S_{3m} - \ddot{v}_2 I_{3m} - \ddot{v}_3 I_{23m} - \ddot{\Theta}'' I_{2\dot{\omega}m} + \dot{v}_1 \kappa_{12} - \dot{v}_2 \kappa_{122} - \dot{v}_3 \kappa_{123} + \\
 & - \dot{\Theta}'' \kappa_{12\dot{\omega}} + v_1 K_{12} - v_2 K_{122} - v_3 K_{123} - \Theta'' K_{12\dot{\omega}} = q_2^w + \int \eta_2 (p_1^w)' ds + D_{\eta_2}^p - D_{\eta_2}^l \\
 & \overline{E} I_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [\Theta(M_3 - N \eta_{2A}) + Q_3]'' + \ddot{v}_3 (\mu + M) + \ddot{\Theta} (S_{3m} - \eta_{2A} \mu) + \overline{Q}_3' + \dot{v}_3 \kappa_3 + \\
 & - \dot{\Theta} (\kappa_{32} - \eta_{2A} \kappa_3) + v_3 K_3 - \Theta (K_{32} - \eta_{2A} K_3) + \dot{v}_3^2 \overline{\kappa}_3 + 2V_3 \dot{v}_3 \overline{\kappa}_3 + \\
 & + \dot{v}_1 S_{2m} - \dot{v}_2 I_{23m} - \dot{v}_3 I_{2m} - \ddot{\Theta}'' I_{3\dot{\omega}m} + \dot{v}_1 \kappa_{13} - \dot{v}_2 \kappa_{123} - \dot{v}_3 \kappa_{133} + \\
 & - \dot{\Theta}'' \kappa_{13\dot{\omega}} + v_1 K_{13} - v_2 K_{123} - v_3 K_{133} - \Theta'' K_{13\dot{\omega}} = q_3^w + \int \eta_3 (p_1^w)' ds + D_{\eta_3}^p - D_{\eta_3}^l \quad (1) \\
 & \overline{E} I_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_3 \Theta'' + v_2'' (M_2 - N \eta_{3A}) + v_3'' (M_3 + N \eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 - 2\beta_2 M_3 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)]' + \\
 & - \Theta [\eta_{2A} q_2^w - \overline{m}_2 + \eta_{3A} q_3^w - \overline{m}_3 - Q_{\dot{\omega}}' - K_{322} + 2\eta_{2A} K_{32} - \eta_{2A}^2 K_3 - K_{233} + \\
 & + 2\eta_{3A} K_{23} - \eta_{3A}^2 K_2 - \eta_{2A} (V_2 \kappa_2 + V_2^2 \overline{\kappa}_2) - \eta_{3A} (V_3 \kappa_3 + V_3^2 \overline{\kappa}_3)] + \\
 & - \dot{\Theta} [-\kappa_{322} + 2\eta_{2A} \kappa_{32} - \eta_{2A}^2 \kappa_3 - \kappa_{233} + 2\eta_{3A} \kappa_{23} - \eta_{3A}^2 \kappa_2] - \ddot{\Theta} [2\eta_{2A} S_{3m} + 2\eta_{3A} S_{2m} - I_{2m} - I_{3m} - \mu (\eta_{2A}^2 + \eta_{3A}^2)] + \\
 & - \ddot{\Theta}'' I_{\dot{\omega}m} - v_2 (K_{23} - \eta_{3A} K_2) + v_3 (K_{32} - \eta_{2A} K_3) + \dot{v}_3^2 (\overline{\kappa}_{32} - \eta_{2A} \overline{\kappa}_3) - \dot{v}_2^2 (\overline{\kappa}_{23} - \eta_{3A} \overline{\kappa}_2) + \\
 & - \dot{v}_2 [\kappa_{23} - \eta_{3A} \kappa_2 + 2V_2 (\overline{\kappa}_{23} - \eta_{3A} \overline{\kappa}_2)] + \dot{v}_3 [\kappa_{32} - \eta_{2A} \kappa_3 + 2V_3 (\overline{\kappa}_{32} - \eta_{2A} \overline{\kappa}_3)] + \\
 & - \dot{v}_2 [S_{2m} + S_{2M} - \eta_{3A} (\mu + M)] + \dot{v}_3 [S_{3m} + S_{3M} - \eta_{2A} (\mu + M)] + \dot{v}_1 S_{\dot{\omega}m} - \dot{v}_2 I_{2\dot{\omega}m} - \dot{v}_3 I_{3\dot{\omega}m} + \\
 & + \dot{v}_1 \kappa_{1\dot{\omega}} - \dot{v}_2 \kappa_{12\dot{\omega}} - \dot{v}_3 \kappa_{13\dot{\omega}} - \dot{\Theta}'' \kappa_{1\dot{\omega}\dot{\omega}} + v_1 K_{1\dot{\omega}} - v_2 K_{12\dot{\omega}} - v_3 K_{13\dot{\omega}} - \Theta'' K_{1\dot{\omega}\dot{\omega}} + \overline{Q}_4 = \\
 & = m_1^w + \int \dot{\omega} (p_1^w)' ds + D_{\dot{\omega}}^p - D_{\dot{\omega}}^l + V_2 (\kappa_{23} + \eta_{3A} \kappa_2) + V_2^2 (\overline{\kappa}_{23} + \eta_{3A} \overline{\kappa}_2) - V_3 (\kappa_{32} + \eta_{2A} \kappa_3) - V_3^2 (\overline{\kappa}_{32} + \eta_{2A} \overline{\kappa}_3) .
 \end{aligned}$$

Nasze równania ruchu zawierają pochodne względem współrzędnej η wzdłuż długości belki oznaczone „primami” oraz względem czasu, oznaczone nad symbolami jedną lub dwoma kropkami (pierwsze i drugie pochodne). W równaniach tych występuje szereg oznaczeń objaśnionych poniżej w kilku grupach. Pierwsza grupa symboli dotyczy obciążeń zewnętrznych i tłumienia. Siły ciągle wymuszające:

$$q_i^w = \int p_i^w ds, \quad i=2,3$$

Ciągłe momenty skręcające i zginające:

$$\begin{aligned}
 m_1^w &= \int p_3^w (\eta_2 - \eta_{2A}) ds - \int p_2^w (\eta_3 - \eta_{3A}) ds \\
 \overline{m}_i &= \int \eta_i p_i^w ds, \quad i=2,3
 \end{aligned} \quad (2)$$

Różnego rodzaju tłumienia drgań:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_i' &= \bar{Q}_i' + \oint \eta_i (Q_i')' ds, & i=2,3 \\ \bar{Q}_4' &= \oint \eta_2 Q_2' ds - \oint \eta_3 Q_2' ds + \oint \hat{\omega} (Q_1')' - \eta_{2A} \bar{Q}_3' + \eta_{3A} \bar{Q}_2' \\ Q_{\hat{\omega}}' &= -\oint \eta_2 Q_2' ds - \oint \eta_3 Q_3' ds + \eta_{2A} \bar{Q}_2' + \eta_{3A} \bar{Q}_3'\end{aligned}$$

gdzie Q_i' oraz $\bar{Q}_i' = \oint Q_i' ds$ oznacza tłumienie nieliniowo sprężyste i tarcie suche [7, 21].

Wpływ oporów lepkich (o współczynniku tłumienia c_i) oraz oddziaływania ośrodka sprężystego (o stałej k_i):

$$\begin{aligned}\kappa_i &= \oint c_i ds, & K_i &= \oint k_i ds, & i &= 1,2,3 \\ \kappa_{ij} &= \oint c_i \eta_j ds, & K_{ij} &= \oint k_i \eta_j ds, & i, j &= 1,2 \vee (1,3) \vee (2,3) \vee (3,2) \\ \kappa_{1\hat{\omega}} &= \oint c_1 \hat{\omega} ds, & K_{1\hat{\omega}} &= \oint k_1 \hat{\omega} ds, \\ \kappa_{lij} &= \oint c_1 \eta_i \eta_j ds, & K_{lij} &= \oint k_1 \eta_i \eta_j ds, & i, j &= 2,2 \vee (2,3) \vee (3,3) \\ \kappa_{li\hat{\omega}} &= \oint c_1 \eta_i \hat{\omega} ds, & K_{li\hat{\omega}} &= \oint k_1 \eta_i \hat{\omega} ds, & i &= 2,3 \\ \kappa_{1\hat{\omega}\hat{\omega}} &= \oint c_1 (\hat{\omega})^2 ds, & K_{1\hat{\omega}\hat{\omega}} &= \oint k_1 (\hat{\omega})^2 ds \\ \kappa_{ijj} &= \oint c_i (\eta_j)^2 ds, & K_{ijj} &= \oint k_i (\eta_j)^2 ds, & i, j &= 2,3 \vee (3,2)\end{aligned}\quad (3)$$

Wpływ bezwładności przekroju poprzecznego pręta (dźwigara) o gęstości ρ :

$$\begin{aligned}\mu &= \oint \rho dA, & M &= \oint \rho^* dA^* \\ S_{2M} &= \oint \rho \eta_3^* dA^*, & S_{3M} &= \oint \rho \eta_2^* dA^* \\ S_{2m} &= \oint \rho \eta_3 \delta ds = \oint \rho \eta_3 dA, & S_{3m} &= \oint \rho \eta_2 \delta ds = \oint \rho \eta_2 dA, & S_{\hat{\omega}m} &= \oint \rho \hat{\omega} dA \\ I_{2m} &= \oint \rho (\eta_3)^2 dA, & I_{3m} &= \oint \rho (\eta_2)^2 dA, & I_{\hat{\omega}m} &= \oint \rho (\hat{\omega})^2 dA \\ I_{2\hat{\omega}m} &= \oint \rho \eta_2 \hat{\omega} dA, & I_{3\hat{\omega}m} &= \oint \rho \eta_3 \hat{\omega} dA, & I_{23m} &= \oint \rho \eta_2 \eta_3 dA\end{aligned}\quad (4)$$

Wpływ oddziaływania aero- lub hydrodynamicznego o współczynniku oporu ośrodka \bar{c}_i

$$\bar{\kappa}_i = \oint \bar{c}_i ds, \quad i=1,2,3; \quad \bar{\kappa}_{ij} = \oint \bar{c}_i \eta_j ds, \quad i, j=2,3 \vee (3,2) \quad (5)$$

Ogólne równania ruchu (1) opracowano początkowo dla potrzeb *Teorii Prętów Cienkościennych* (TPC). Teoria ta publikowana była już wcześniej, lecz w całości wydrukowana została w skryptach [7, 8]. Zawiera ona statykę, dynamikę i teorię drugiego rzędu, w tym stateczność pojedynczego pręta. Po drobiazgowych badaniach ustalono, że pręty przyzmatyczne mogą w tej teorii mieć dowolne przekroje poprzeczne, złożone z kilku materiałów, otwarte i zamknięte i różne jego warunki brzegowe. Uwzględniono tam również skręcanie pręta. Równania ruchu pręta cienkościennego według teorii drugiego rzędu (1), [7], uwzględniają dodatkowo interakcję pręta z otaczającym go ośrodkiem: gruntem, gazem (powietrze) i cieczą (np. woda). Przyjęto, że ośrodek może opływać pręt z pewną prędkością. Te właściwości ośrodka można zadeklarować odrębnie inne dla każdego z trzech kierunków osi układu odniesienia. Dzięki takim założeniom, opracowana teoria może być stosowana do bardzo wielu zadań.

Po pominięciu wyrazów z grupy (3) oraz Q_i^l , \bar{Q}_i^l , $D_{\eta_2}^l$, $D_{\eta_2}^p$, τ_l , τ_p ((2) pewne ciągłe obciążenia podłużne [7]), co jest oczywiste dla dźwigara mostowego, układ równań (1) zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad \overline{E}A v_1'' - \mu \ddot{v}_1 - M \ddot{v}_1 + \ddot{v}_2' S_{3m} + \ddot{v}_3' S_{2m} + \ddot{\Theta}' S_{\dot{\omega}m} - \dot{v}_1^2 \bar{\kappa}_1 = -q_1^w \\
 & 2) \quad \overline{E}I_3 v_2^{IV} - N v_2'' + [\Theta(M_2 - N\eta_{3A}) + Q_2]'' + \ddot{v}_2(\mu + M) - \ddot{\Theta}(S_{2m} - \eta_{3A}\mu) + \\
 & \quad + \dot{v}_2^2 \bar{\kappa}_2 + 2V_2 \dot{v}_2 \bar{\kappa}_2 + \dot{v}_1' S_{3m} - \ddot{v}_2' I_{3m} - \dot{v}_3'' I_{23m} - \ddot{\Theta}'' I_{2\dot{\omega}m} = q_2^w + \int \eta_2 (p_1^w)' ds \\
 & 3) \quad \overline{E}I_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [\Theta(M_3 - N\eta_{2A}) + Q_3]'' + \ddot{v}_3(\mu + M) + \ddot{\Theta}(S_{3m} - \eta_{2A}\mu) + \\
 & \quad + \dot{v}_3^2 \bar{\kappa}_3 + 2V_3 \dot{v}_3 \bar{\kappa}_3 + \dot{v}_1' S_{2m} - \ddot{v}_2'' I_{23m} - \dot{v}_3'' I_{2m} - \ddot{\Theta}'' I_{3\dot{\omega}m} = q_3^w + \int \eta_3 (p_1^w)' ds \\
 & 4) \quad \overline{E}I_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_s \Theta'' + v_2''(M_2 - N\eta_{3A}) + v_3''(M_3 + N\eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 - 2\beta_2 M_3 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)] + \\
 & \quad - \Theta[\eta_{2A} q_2^w - \bar{m}_2 + \eta_{3A} q_3^w - \bar{m}_3 - \eta_{2A}(V_2^2 \bar{\kappa}_2) - \eta_{3A}(V_3^2 \bar{\kappa}_3)] + \\
 & \quad - \ddot{\Theta}[2\eta_{2A} S_{3m} + 2\eta_{3A} S_{2m} - I_{2m} - I_{3m} - \mu(\eta_{2A}^2 + \eta_{3A}^2)] + \\
 & \quad - \ddot{\Theta}'' I_{\dot{\omega}m} + \dot{v}_3^2 (\bar{\kappa}_{32} - \eta_{2A} \bar{\kappa}_3) - \dot{v}_2^2 (\bar{\kappa}_{23} - \eta_{3A} \bar{\kappa}_2) + \\
 & \quad - \dot{v}_2 [2V_2 (\bar{\kappa}_{23} - \eta_{3A} \bar{\kappa}_2)] + \dot{v}_3 [2V_3 (\bar{\kappa}_{32} - \eta_{2A} \bar{\kappa}_3)] + \\
 & \quad - \ddot{v}_2 [S_{2m} + S_{2M} - \eta_{3A}(\mu + M)] + \ddot{v}_3 [S_{3m} + S_{3M} - \eta_{2A}(\mu + M)] + \dot{v}_1' S_{\dot{\omega}m} - \dot{v}_2'' I_{2\dot{\omega}m} - \dot{v}_3'' I_{3\dot{\omega}m} + \\
 & \quad = m_1^w + \int \dot{\omega} (p_1^w)' ds + V_2^2 (\bar{\kappa}_{23} + \eta_{3A} \bar{\kappa}_2) - V_3^2 (\bar{\kappa}_{32} + \eta_{2A} \bar{\kappa}_3)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Wszystkie cztery równania w (1) i (6) są ze sobą powiązane przez przemieszczenia v_i (w tym poprzeczne – ugięcia) i skręcenia Θ względem osi podłużnej dźwigara.

Dla potrzeb zadania testowego pominięto: prędkość ośrodka (wiatru) V_i i opory (lepkość) powietrza – wyrażenia z grupy (5) oraz przemieszczenia i obciążenia podłużne dźwigara mostowego v_1 , p_1^w . Otrzymujemy wtedy dalsze znaczne uproszczenie tych równań:

$$\begin{aligned}
 & 1) \ddot{v}_2' S_{3m} + \ddot{v}_3' S_{2m} + \ddot{\Theta}' S_{\dot{\omega}m} = 0 \\
 & 2) \frac{\overline{EI}_3 v_2^{IV} - N v_2'' + [\Theta(M_2 - N\eta_{3A}) + Q_2]''}{\overline{EI}_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [\Theta(M_3 - N\eta_{2A}) + Q_3]''} + \ddot{v}_2(\mu + M) - \ddot{\Theta}(S_{2m} - \eta_{3A}\mu) + \\
 & \quad + \ddot{v}_2'' I_{3m} - \ddot{v}_3'' I_{23m} - \ddot{\Theta}'' I_{2\dot{\omega}m} = q_2^w \\
 & 3) \frac{\overline{EI}_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [\Theta(M_3 - N\eta_{2A}) + Q_3]''}{\overline{EI}_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [\Theta(M_3 - N\eta_{2A}) + Q_3]''} + \ddot{v}_3(\mu + M) + \ddot{\Theta}(S_{3m} - \eta_{2A}\mu) + \\
 & \quad + \ddot{v}_2'' I_{23m} - \ddot{v}_3'' I_{2m} - \ddot{\Theta}'' I_{3\dot{\omega}m} = q_3^w \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4) \frac{\overline{EI}_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_3 \Theta'' + v_2''(M_2 - N\eta_{3A}) + v_3''(M_3 + N\eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 - 2\beta_2 M_3 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)]'' +}{\overline{EI}_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_3 \Theta'' + v_2''(M_2 - N\eta_{3A}) + v_3''(M_3 + N\eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 - 2\beta_2 M_3 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)]'' +} \\
 & \quad - \Theta[\eta_{2A} q_2^w - \bar{m}_2 + \eta_{3A} q_3^w - \bar{m}_3] - \ddot{\Theta}[2\eta_{2A} S_{3m} + 2\eta_{3A} S_{2m} - I_{2m} - I_{3m} - \mu(\eta_{2A}^2 + \eta_{3A}^2)] + \\
 & \quad - \ddot{\Theta}'' I_{\dot{\omega}m} - \ddot{v}_2[S_{2m} + S_{2M} - \eta_{3A}(\mu + M)] + \ddot{v}_3[S_{3m} + S_{3M} - \eta_{2A}(\mu + M)] - \ddot{v}_2'' I_{2\dot{\omega}m} - \ddot{v}_3'' I_{3\dot{\omega}m} = m_1^w
 \end{aligned}$$

Następnie pominięto gęstość ρ^* ciągłych mas skupionych, zebranych z obszaru A^* nie należącego do przekroju poprzecznego pręta (powłoki), a stąd $M = S_{2M} = S_{3M} = 0$ (masy skupione wewnątrz dźwigara M – jako tu niezidentyfikowane [7]). Pominięto również inne ciągłe momenty $\bar{m}_i = 0$ i całe równanie pierwsze, nie mające tu już sensu. Przyjęto również z powodu braku wiatru, że ciągłe obciążenie poziome $q_2^w = 0$. Dźwigar drga tylko w płaszczyźnie pionowej pod wpływem obciążeń wywołanych ruchem pojazdów, skąd $v_2 = 0$ oraz $M_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 & 2) \frac{[\Theta(M_2 - N\eta_{3A}) + Q_2]''}{[\Theta(M_2 - N\eta_{3A}) + Q_2]''} - \ddot{\Theta}(S_{2m} - \eta_{3A}\mu) - \ddot{v}_3'' I_{23m} - \ddot{\Theta}'' I_{2\dot{\omega}m} = 0 \\
 & 3) \frac{\overline{EI}_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [Q_3]''}{\overline{EI}_2 v_3^{IV} - N v_3'' + [Q_3]''} + \ddot{v}_3(\mu) + \ddot{\Theta}(S_{3m} - \eta_{2A}\mu) - \ddot{v}_3'' I_{2m} - \ddot{\Theta}'' I_{3\dot{\omega}m} = q_3^w \\
 & 4) \frac{\overline{EI}_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_3 \Theta'' + v_3''(N\eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)]''}{\overline{EI}_{\dot{\omega}} \Theta^{IV} - K_3 \Theta'' + v_3''(N\eta_{2A}) - [\Theta'(T_1 r^2 + 2\beta_3 M_2 + 2\beta_{\dot{\omega}} B)]''} + \\
 & \quad - \Theta[\eta_{2A} q_2^w + \eta_{3A} q_3^w] - \ddot{\Theta}[2\eta_{2A} S_{3m} + 2\eta_{3A} S_{2m} - I_{2m} - I_{3m} - \mu(\eta_{2A}^2 + \eta_{3A}^2)] + \\
 & \quad - \ddot{\Theta}'' I_{\dot{\omega}m} + \ddot{v}_3[S_{3m} - \eta_{2A}(\mu)] - \ddot{v}_3'' I_{3\dot{\omega}m} = m_1^w \tag{8}
 \end{aligned}$$

Symbole $Q_2 = \int_0^{\eta} q_1'(v_{3o1} - v_{3t}) dt$ i $Q_3 = \int_0^{\eta} q_1'(v_{2o1} - v_{2t}) dt$ oznaczające wpływ danych ciągłych obciążeń podłużnych przyłożonych do dźwigara (patrz [7]), będą dalej pominięte.

Ponadto dźwigar mostowy jest symetryczny względem osi pionowej jego przekroju poprzecznego, skąd biegun główny leży na osi symetrii tego przekroju i wtedy $\eta_{2A} = 0$, $\eta_{3A} \neq 0$. Ograniczając również analizę do teorii pierwszego rzędu, pomijamy wyrazy podkreślone.

Podobnie, dla dźwigara mostowego jednorodnego, monosymetrycznego (względem osi η_3) $S_{3m} = I_{23m} = S_{\hat{o}m} = I_{3\hat{o}m} = \eta_{2A} = 0$.

Z uwagi na to, że oś główna przekroju przechodzi przez jego środek ciężkości, dla jednorodnego dźwigara mamy dodatkowo

$$S_2 = \int \eta_3 dA = 0, \quad S_{2m} = \rho S_2 = 0$$

a stąd nasz układ równań jeszcze bardziej się uprości:

$$\begin{aligned} 2) \quad & -\ddot{\Theta}(-\eta_{3A}\mu) - \ddot{\Theta}'' I_{2\hat{o}m} = 0 \\ 3) \quad & \overline{EI}_2 v_3^{IV} + \ddot{v}_3(\mu) - \ddot{v}_3'' I_{2m} = q_3^w \quad (9) \\ 4) \quad & \overline{EI}_{\hat{o}} \Theta^{IV} - K_s \Theta'' - \ddot{\Theta}[-I_{2m} - I_{3m} - \mu(\eta_{3A}^2)] - \ddot{\Theta}'' I_{\hat{o}m} = m_1^w \end{aligned}$$

Należy pamiętać, że dla bisymetrycznego PC wykonanego z jednorodnego materiału, tzn. gdy $\rho = \text{const}$, układy (1, 9) znacznie się uproszczą (w naszym zadaniu to nie wystąpi), gdyż:

$$S_{2m} = S_{3m} = I_{23m} = S_{\hat{o}m} = S_{2M} = S_{3M} = I_{2\hat{o}m} = I_{3\hat{o}m} = \eta_{2A} = \eta_{3A} = 0$$

Drugie równanie nie zależy od sztywności giętej w płaszczyźnie poziomej i z tego powodu zostaje odrzucone. Dwa pozostałe równania stały się niezależne od siebie. Równanie trzecie opisuje zginanie w płaszczyźnie pionowej, a równanie czwarte tylko uwzględnia skręcanie dźwigara mostowego.

Ostatecznie w zadaniu testowym przyjęto dwa niezależne różniczkowe równania ruchu:

$$\begin{aligned} 3) \quad & \overline{EI}_2 v_3^{IV} + \mu \ddot{v}_3 - \ddot{v}_3'' I_{2m} = q_3^w \\ 4) \quad & \overline{EI}_{\hat{o}} \Theta^{IV} - K_s \Theta'' + \ddot{\Theta}[I_{2m} + I_{3m} + \mu(\eta_{3A})^2] - \ddot{\Theta}'' I_{\hat{o}m} = m_1^w \quad (10) \end{aligned}$$

3. RÓŻNICOWE RÓWNANIA RUCHU DLA OBCIĄŻEŃ MOSTU

Jak zapowiedziano już we wstępie, zastosujemy tu *Metodę Czasoprzestrzeni* (3D-TSM) z wykorzystaniem *Metody Różnic Skończonych* (MRS).

Podejście to umożliwia uzyskanie odpowiedzi konstrukcji na praktycznie dowolne obciążenia ruchome, pokazując odkształcenia układu jednocześnie w każdej z rozpatrywanych chwil czasowych. Wadą metody jest konieczność zaangażowania przy dużych i skomplikowanych zadaniach komputera o dużej mocy. W zadaniach dotyczących mostu przyjmowano, że jest to dużych rozmiarów belka cienkościenna o długości L podzielona na „ n ” odcinków o wymiarze $a = \Delta\eta = L/n$, z punktami podziału oznaczonymi kolejnymi numerami „ i ”. Dodatkowo, określa się kształt osi ugięcia belki w „ m ” kolejnych chwilach czasowych o numerze „ t ”.

Dwa różniczkowe równania ruchu (10) zostały w sposób formalny zamienione na operatory różnicowe, zastępując poszczególne pochodne, w tym i cząstkowe, ich odpowiednikami różnicowymi [8]. W ten sposób otrzymano dwa równania (11), gdzie dolne indeksy oddzielone przecinkiem wskazują odpowiednią chwilę czasową i punkt podziału belki. Aktualny punkt w czasoprzestrzeni jest oznaczony indeksem (t, i) . Ten sam punkt „ i ” podziału belki w chwili poprzedniej oznaczono $(t-1, i)$, a dla następnej $(t+1, i)$. Podobnie dla chwili czasowej „ t ” poprzednie kolejne punkty podziału belki oznaczono odpowiednio $(t, i-2)$, $(t, i-1)$ i następne $(t, i+1)$, $(t, i+2)$. Sposób zamiany pochodnych na odpowiadające im operatory różnicowe czytelnie przedstawiają równania (11), gdzie wprowadzono uproszczone oznaczenie $w = v_3$ jako ugięcie pionowe belki.

$$\begin{aligned}
 & \bar{E}I_2 \frac{1}{(\Delta\eta)^4} (w_{t,i-2} - 4w_{t,i-1} + 6w_{t,i} - 4w_{t,i+1} + w_{t,i+2}) + \mu \frac{1}{(\Delta t)^2} (w_{t-1,i} - 2w_{t,i} + w_{t+1,i}) + \\
 3) & -I_{2m} \frac{1}{(\Delta\eta)^2 (\Delta t)^2} [w_{t-1,i-1} - 2w_{t,i-1} + w_{t+1,i-1} + \\
 & -2w_{t-1,i} + 4w_{t,i} - 2w_{t+1,i} + w_{t-1,i+1} - 2w_{t,i+1} + w_{t+1,i+1}] = q_3^w \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{E}I_{\phi} \frac{1}{(\Delta\eta)^4} (\theta_{t,i=2} - 4\theta_{t,i-1} + 6\theta_{t,i} - 4\theta_{t,i+1} + \theta_{t,i+2}) - K_s \frac{1}{(\Delta\eta)^2} (\theta_{t,i-1} - 2\theta_{t,i} + \theta_{t,i+1}) + \\
 4) & + [I_{2m} + I_{3m} + \mu(\eta_{3A})^2] \frac{1}{(\Delta t)^2} (\theta_{t-1,i} - 2\theta_{t,i} + \theta_{t+1,i}) - I_{\phi m} \frac{1}{(\Delta\eta)^2 (\Delta t)^2} [\theta_{t-1,i-1} - 2\theta_{t,i-1} + \theta_{t+1,i-1} + \\
 & -2\theta_{t-1,i} + 4\theta_{t,i} - 2\theta_{t+1,i} + \theta_{t-1,i+1} - 2\theta_{t,i+1} + \theta_{t+1,i+1}] = m_1^w
 \end{aligned}$$

Po przemnożeniu trzeciego równania przez $\frac{a^4}{\bar{E} I_2}$ oraz czwartego przez $\frac{a^4}{\bar{E} I_{\phi}}$, otrzymano następującą postać powyższych dwóch różnicowych równań ruchu

$$3) \quad \begin{aligned} & (w_{t,i-2} - 4w_{t,i-1} + 6w_{t,i} - 4w_{t,i+1} + w_{t,i+2}) + M(w_{t-1,i} - 2w_{t,i} + w_{t+1,i}) + \\ & -T[w_{t-1,i-1} - 2w_{t,i-1} + w_{t+1,i-1} \quad -2w_{t-1,i} + 4w_{t,i} - 2w_{t+1,i} \quad + w_{t-1,i+1} - 2w_{t,i+1} + w_{t+1,i+1}] = Q \end{aligned} \quad (12)$$

$$4) \quad \begin{aligned} & (\theta_{t,i-2} - 4\theta_{t,i-1} + 6\theta_{t,i} - 4\theta_{t,i+1} + \theta_{t,i+2}) - B(\theta_{t-1,i} - 2\theta_{t,i} + \theta_{t+1,i}) + C(\theta_{t-1,i-1} - 2\theta_{t,i} + \theta_{t+1,i}) + \\ & -D[\theta_{t-1,i-1} - 2\theta_{t,i-1} + \theta_{t+1,i-1} \quad -2\theta_{t-1,i} + 4\theta_{t,i} - 2\theta_{t+1,i} \quad + \theta_{t-1,i+1} - 2\theta_{t,i+1} + \theta_{t+1,i+1}] = W \end{aligned}$$

W równaniach tych dodatkowo oznaczono:

$$M = \frac{\mu a^4}{E \bar{I}_2 (\Delta t)^2}, \quad T = \frac{a^2 I_{2m}}{E \bar{I}_2 (\Delta t)^2}, \quad Q = \frac{a^4}{E \bar{I}_2} q_3, \quad (13)$$

$$B = \frac{\alpha^2 K_s}{E \bar{I}_{\dot{\omega}}} = \alpha^2 \alpha^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{K_s}{E \bar{I}_{\dot{\omega}}}}, \quad C = \frac{a^4 [I_{2m} + I_{3m} + \mu(\eta_{3A})^2]}{E \bar{I}_{\dot{\omega}} (\Delta t)^2}, \quad (14)$$

$$D = \frac{a^2 I_{\dot{\omega}m}}{E \bar{I}_{\dot{\omega}} (\Delta t)^2}, \quad W = \frac{a^4}{E \bar{I}_{\dot{\omega}}} m_1^w$$

Po przegrupowaniu wyrazów w równaniach (12) zapiszemy je w następującej postaci:

$$3) \quad \begin{aligned} & [w_{t-1,i-1}(-T) + w_{t-1,i}(M + 2T) + w_{t-1,i+1}(-T)] + \\ & + [w_{t,i-2} + w_{t,i-1}(-4 + 2T) + w_{t,i}(6 - 2M - 4T) + w_{t,i+1}(-4 + 2T) + w_{t,i+2}] + \\ & + [w_{t+1,i-1}(-T) + w_{t+1,i}(M + 2T) + w_{t+1,i+1}(-T)] = Q \end{aligned} \quad (15)$$

$$4) \quad \begin{aligned} & [\theta_{t-1,i-1}(-D) + \theta_{t-1,i}(C + 2D) + \theta_{t-1,i+1}(-D)] + \\ & + [\theta_{t,i-2} + \theta_{t,i-1}(-4 - B + 2D) + \theta_{t,i}(6 + 2B - 2C - 4D) + \theta_{t,i+1}(-4 - B + 2D) + \theta_{t,i+2}] + \\ & + [\theta_{t+1,i-1}(-D) + \theta_{t+1,i}(C + 2D) + \theta_{t+1,i+1}(-D)] = W \end{aligned}$$

Są to dwa niezależne równania. Trzy wiersze tych wzorów opisują kolejne chwile czasowe. Wyeksponowano tu funkcje przemieszczeń (ugięć i obrotów) oraz ich indeksy dla chwil czasowych t i punktów podziału i przyjętych wzdłuż dźwigara mostowego.

Każde z równań różnicowych, a więc również (15) można zapisać w następującej postaci [12, 16, 20]:

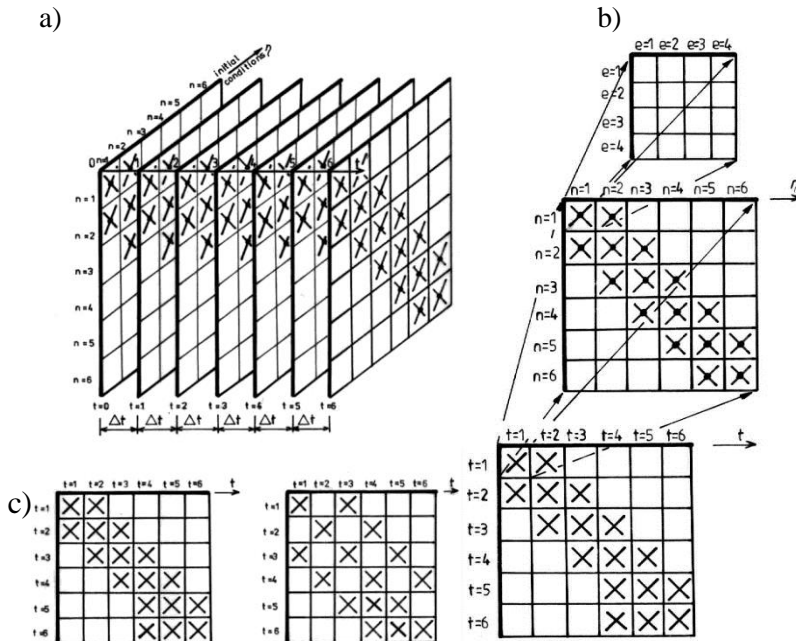
$$C_r \sum_{t=1}^{t+1} \left(A_{ro} + \sum_{\Lambda=1}^n A_{r\Lambda} E_{\Lambda} \right) \Phi_r = Q_r \quad (16)$$

Dzięki programowi MRS (autorstwa Jana Bogdana Obrębskiego, o objętości tylko 17,5 KB!), zadanie takie można zadeklarować z klawiatury w systemie interakcyjnym [8].

4. RÓŻNICOWA DYNAMICZNA MACIERZ SZTYWNOŚCI MOSTU

Po zamianie równań różniczkowych na operatory różnic skończonych (15) i zapisaniu ich dla wszystkich punktów podziału belki „i” otrzymuje się *dynamiczną macierz sztywności* zawierającą informacje o schemacie dźwigara, prędkości i położeniu pojazdów na moście dla wszystkich założonych chwil czasowych (tablica 1). Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych (17)₁. Jeśli do opisu zadania wykorzystuje się więcej niż jedno różnicowe równanie ruchu, to wzór (16) uzupełniamy o wpływ czasu (17)₂ i zastępujemy różnicowo macierzowym równaniem równowagi węzła o postaci (17)₃, [19, 20].

$$Kx=Q, \quad C_r \sum_{r=1}^{t+1} \left(A_{r0} + \sum_{\Lambda=1}^n A_{r\Lambda} E_{\Lambda} \right) \Phi_r = Q_r, \quad \sum_{r=1}^{t+1} \left[\sum_{\Lambda=1}^N (W_{\Lambda}^o + W_{\Lambda} E_{\Lambda}) \right] x = q \quad (17)$$



Rys. 1. Objasnienie sposobu tworzenia tzw. dynamicznej macierzy sztywności konstrukcji a), b) [9, 23, 16] oraz skutek uwzględnienia warunków końcowych c) [16]

Fig. 1. Explanation of sense for dynamical stiffness matrix a) b) and result of influence final conditions

Mówimy wówczas o *Metodzie Równań Różnicowo-Macierzowych (MRRM)*, tym razem zastosowanej do czasoprzestrzeni (porównaj tablica 5).

Opis taki implementowano do bardzo zaawansowanego numerycznie systemu obliczeniowego o nazwie WDKM [19, 20].

Czasoprzestrzeń jako metoda komputerowa (*3D-Time Space Method* [12]) z punktu widzenia numerycznego jest zadaniem dwuwymiarowym [12]. Tam w każdym momencie czasowym t rozpatruje się stan równowagi konstrukcji indywidualnie, rys. 1a. Jednakże dynamiczne równania ruchu konstrukcji zależą od trzech kolejnych chwil czasowych, $(15)_2$, rys. 1a. Ostatecznie zadanie daje się przedstawić w postaci (17), rys. 1b, tablica 1.

Tablica 1. Dynamiczna macierz sztywności K i wyrazy Q dla belki swobodnie podpartej $m = 5, n = 5, l = 1$

Table 1. Dynamical stiffness matrix K and terms Q for the freely supported beam

t	t=1					t=2					t=3					t=4					t=5					Q		
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅			
1	r ₁	4,97	-4	1		0,01																						
	r ₂	-4	5,97	-4	1		0,01																					
	r ₃	1	-4	5,97	-4	1			0,01																			1,354
	r ₄		1	-4	5,97	-4				0,01																		
	r ₅			1	-4	4,97					0,01																	
2	r ₁	0,01				4,97	-4	1			0,01																	
	r ₂		0,01			-4	5,97	-4	1			0,01																
	r ₃			0,01		1	-4	5,97	-4	1			0,01															
	r ₄				0,01		1	-4	5,97	-4				0,01														
	r ₅					0,01			1	-4	4,97				0,01													
3	r ₁					0,01				4,97	-4	1			0,01													
	r ₂						0,01			-4	5,97	-4	1			0,01												
	r ₃							0,01		1	-4	5,97	-4	1			0,01											
	r ₄								0,01		1	-4	5,97	-4				0,01										
	r ₅									0,01		1	-4	4,97					0,01									
4	r ₁									0,01				4,97	-4	1			0,01									
	r ₂										0,01			-4	5,97	-4	1			0,01								
	r ₃											0,01		1	-4	5,97	-4	1			0,01							
	r ₄												0,01		1	-4	5,97	-4				0,01						
	r ₅													0,01		1	-4	4,97									0,01	
5	r ₁													0,01				4,97	-4	1								
	r ₂														0,01			-4	5,97	-4	1							
	r ₃															0,01		1	-4	5,97	-4	1						
	r ₄																0,01		1	-4	5,97	-4						
	r ₅																	0,01		1	-4	4,97						

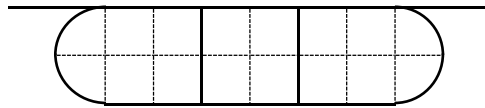
Analiza dynamiczna konstrukcji za pomocą 3D-TSM sprowadza się do rozwiązania równania macierzowego (17)₁, gdzie K jest nazywana *dynamiczną macierzą sztywności*, Obrębski i Szmít [9].

Ma ona liczbę wierszy i kolumn $N = l \times n \times m$, gdzie l jest liczbą równań ruchu opisujących zadanie (np. cztery w (1)), n jest liczbą węzłów (punktów podziału belki), m określa liczbę rozpatrywanych punktów czasowych oddalonych od siebie o odcinek czasu Δt . Każdy element globalnej dynamicznej macierzy sztywności \mathbf{K} jest tradycyjną macierzą sztywności \mathbf{K} , o wymiarach $(l \times n)$ [9]. Jako warunki brzegowe uwzględnia się w sposób tradycyjny sposób podparcia konstrukcji [8] oraz warunek początkowy dla $t = 0$ (znany lub równy zeru) i końcowy (najczęściej jako różnica „wstecz”, rys. 1c. W ten sposób są eliminowane momenty czasoprzestrzeni dla $t = -1$ oraz dla $t = m+1$.

Stosując czasoprzestrzeń w ujęciu 3D-TSM, możemy dowolnie dobrać kroki dla jednego wymiaru rzeczywistego (belki) czy dla dwu wymiarów rzeczywistych (płyty, tarcze) i odrębny krok w sposób naturalny dla czasu [16].

5. MOŻLIWOŚCI OPISU KONSTRUKCJI I OBCIĄŻEŃ MOSTOWYCH

Czasoprzestrzeń testowano wielokrotnie na różnych przykładach [9-20]. Jednym z ciekawszych jest ostatnie zadanie studenckie [1, 22] dotyczące mostu stalowego o przekroju pokazanym na rys. 2.



Rys. 2. Analizowany przekrój mostu stalowego, zbliżony do rzeczywistego [1, 22]

Fig. 2. Analysed cross-section of the bridge, close to reality

Polecenia podane w sześciu zadaniach porównawczych zakładały, że dźwigar mostowy jest swobodnie podparty i ma w dwu przeciwnych kierunkach po 3 pasy ruchu samochodowego o szerokości 3 m, pas rowerowy i pas pieszy, rys. 2. Dla skręcania na końcach przęsła przyjęto zerowe obroty i swobodę deplanacji. Dźwigar w każdym zadaniu miał przekrój o podobnym rysunku i trzy obwody zamknięte. W sumie szerokość dźwigara mostowego wynosi 30 m, przy jego wysokości 6 m.

W każdym zadaniu założono, że pośrodku jednego z pasów kołowych porusza się masa 20 t (modelowana jako siła 200 kN). Założono długości dźwigara $L = 50, 60, 70, 80, 90$ i 100 m. Grubości ścian dźwigara należało tak dobrać (z dokładnością 0,01 mm), aby przy sile nieruchomej ugięcia były mniejsze (ale zbliżone) od 0,001 L rozpiętości przęsła.

Jako rezultat obliczeń należało wyznaczyć postacie ugięcia i kąty skręcenia przęsła pod działaniem jadącego obciążenia z prędkościami: 50 km/h; 100 km/h; 200 km/h; 300 km/h; 600 km/h.

Należało przyjąć podział belki do 10 odcinków i do 20 chwil czasowych: w tym 10 dla obciążenia masą przęsła i 10 – gdy masa jest już poza przęsłem.

Jak to pokazały dwie pierwsze oddane prace [1, 22], wykonanie zadania mimo uchybień i odstępstw od poleceń tematów nie nastęrczało kłopotów.

Wykonane poprzednio prace, inne niż tu wspomniane, wykazały duże możliwości modelowania konstrukcji budowlanych za pomocą 3D-TSM.

Z uwagi na to, że zachowanie dźwigarów mostowych jest opisywane w poszczególnych chwilach czasowych, staje się możliwe:

- określanie dla każdego punktu w czasoprzestrzeni innego obciążenia;
- obciążenie może poruszać się z różną prędkością, w dowolnym kierunku;
- obciążenie może mieć charakter stały, tętniący, uderzeniowy;
- drgania mogą być swobodne i wymuszone;
- jest duża swoboda w modelowaniu warunków brzegowych, początkowych i końcowych;
- dotychczasowe testy dotyczyły różnego rodzaju belek, płyt i budynków wysokich traktowanych jako cienkościenne wieloobwodowe wsporniki;
- można deklarować zmienną sztywność belki lub płyty.

Do tej listy trzeba dodać nowe możliwości wynikające z pokazanych w tym rozdziale zadań:

- po moście mogą poruszać się całe zespoły obciążeń ruchomych;
- jazda odbywa się po różnych pasach ruchu, nawet w przeciwnych kierunkach;
- można opisać zmianę pasów ruchu przez obciążenia (pojazdy).

Każdy z wymienionych tu sposobów opisu zadania wymaga odpowiedniego nakładu pracy.

6. WNIOSKI Z POPRZEDNIO WYKONANYCH OBLICZEŃ PORÓWNAWCZYCH

Warto tu wymienić przykłady poprzednich obliczeń wykorzystujących 3D-TSM, ich cel i wynikające z nich wnioski praktyczne. Oprócz zalet tej metody, wymienionych w poprzednim rozdziale, należy zwrócić uwagę na wiele dalszych, czasem zaskakujących obserwacji.

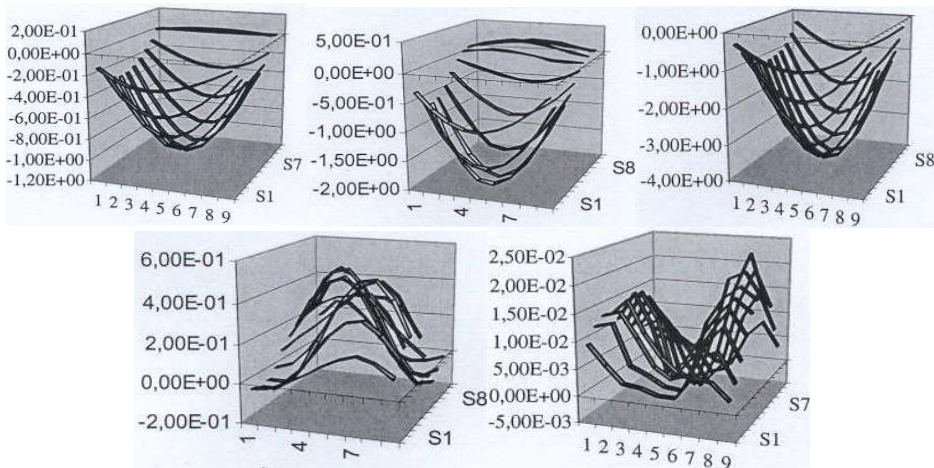
Bez wątpienia najpoważniejszą pracę wykonał w ramach doktoratu Robert Szmít, wykazując przydatność metody czasoprzestrzeni do analizy dynamicznego zachowania się budynków wysokich, traktując je jako kompozytowy, wieloobwodowy pręt cienkościenny. Wykorzystał tu cztery równania ruchu.

Zastosowanie do opisu zadań czasoprzestrzeni z wykorzystaniem Metody Różnic Skończonych spowodowało daleko idącą dyskretyzację zadań. W ten sposób jesteśmy w stanie w każdym punkcie czterowymiarowej przestrzeni zadeklarować aktualny stan konstrukcji, wraz z jej obciążeniem w danej chwili czasowej. Dotyczy to zarówno obciążeń, sztywności konstrukcji, jak i jej sposobu podparcia. Są to wręcz niesamowicie szerokie możliwości.

Z drugiej jednak strony należy pamiętać, że i ta metoda ma swoje ograniczenia. Niektóre zagadnienia czekają na testy. Do ciekawych obserwacji wynikających z już wykonanych obliczeń, często o charakterze porównawczym, należą:

- wpływ wielkości masy i jej prędkości na odpowiedź konstrukcji – ugięcia, momenty zginające,
- zaskakujące są obserwacje, jak niewiele różni się zawartość macierzy sztywności konstrukcji i dynamicznej macierzy sztywności, gdy zmieniamy belkę o przekroju pełnym na cienkościenną, kompozytową lub spoczywającą na podłożu sprężystym,
- zmiana sposobu podparcia i obciążenia konstrukcji jest tu zadziwiająco prosta,
- możliwe jest obserwowanie drgań dźwigara mostowego, gdy ruchome obciążenie już z niego zjechało (rys. 3).

Ta lista możliwości metody 3D-TSM z całą pewnością może być o wiele dłuższa. W pracach [14, 18] porównano ugięcia belki mostowej o długości $L = 100$ m, rys. 3. W zadaniu tym przyjęto: $E = 20500$ kN/cm², $I = 1\,016\,260\,163$ cm⁴, masa dźwigara $\mu = 0,022\,695\,016$ kNs²/cm, jego sztywność $EI = 2,083\,333E + 13$ kNcm², $a = 1000$ cm. Wszystkie obliczenia wykonano programem MRS przeznaczonym do dydaktyki o objętości tylko 17,52 kB!



Rys. 3. Porównanie wykresów ugięć belki mostowej obciążonej masą 100 t poruszającej się z prędkościami 36, 180, 360, 720 i 3600 km/h [14, 18].

W jedenastej chwili czasowej jadąca masa jest już poza belką

Fig. 3. Comparison of deflections a bridge girded loaded by mass moving with quoted above velocities. In eleventh time moment, the traveling mass is out of girder

7. WYKORZYSTANE PROGRAMY KOMERCYJNE

O stosowaniu programów komercyjnych do obliczeń różnych zadań była mowa w poprzednich pracach autora [16, 17] i na ostatniej Szkole Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji zorganizowanej w Juracie w 2016 r. Tym razem warto wspomnieć wykorzystanie w pracy domowej [1] programów: *Wolfram Mathematica 10.4* – obliczenia; *AutoCAD 2013* – rysunki; *MS Excel 2013* – obliczenia pomocnicze. Ponadto programem *Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2016* wykonano obliczenia charakterystyk przekroju z rys. 2. Wyniki uzyskane z ostatniego programu są raczej nieliczne i mało przejrzyste.

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Pokazany w rozdziale 2 sposób wyeksponowania z bardzo ogólnych równań ruchu, układ dwóch równań zorientowanych na konkretne zadanie, był wykorzystywany do innych zadań, gdzie istotne było np. uwzględnienie różnych interakcji ze sprężystym ośrodkiem.

Wart podkreślenia jest fakt, że stosując opis w czasoprzestrzeni, gdzie kolejnym (czwartym) wymiarem jest czas, uzyskuje się w prosty sposób rozwiązania, które przy innych podejściach są trudne do otrzymania. Tu można wymienić, że z łatwością modeluje się obciążenia impulsowe, ruchome, o intensywności dowolnie zmiennej w czasie, obciążenia o dowolnym programie zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. To samo może dotyczyć problemów kontaktowych, istnienia i zanikania podpór, oddziaływania ośrodka otaczającego pręt, działanie wiatru z różnych kierunków itp. Takie możliwości jak dotąd wydają się przy innych podejściach prawie niemożliwe.

W obecnej pracy zwrócono uwagę na wnioski wypływające z porównawczych obliczeń dotyczących tu przede wszystkim mostów i obciążeń ruchomych. Na podstawie dokonanych obserwacji wyciągnięto kilka następujących wniosków:

- na zachowanie się jezdni drogowych i lotniskowych pasów startowych oraz mostów widoczny wpływ ma wiele parametrów: poruszająca się masa i jej prędkość, masa drogi lub dźwigara, charakter sprężystego podłoża sposób obciążenia zarówno w przestrzeni, jak i w czasie,
- mosty ze względu na ich dynamiczne zachowanie powinny być precyzyjnie testowane na różne obciążenia ruchome co do ich mas i prędkości,
- pewne prędkości obciążających mas należy określić jako krytyczne, powodujące istotną zmianę przemieszczeń dźwigara mostowego,
- ugięcia dźwigarów mostowych pod działaniem obciążeń ruchomych nie są proporcjonalne do ich mas i prędkości,

- szczególnie na zmianę wielkości poruszających się mas i ich prędkości są czułe siły przekrojowe – testowano momenty zginające,
- obecne badania nie objęły charakteru interakcji pojazd-podłoże (resorowanie, tłumienie),
- obliczenia nie objęły też reakcji dźwigara itp. na obciążenie grupami pojazdów oraz budynków wysokich.

Autor zwrócił tu uwagę na zaproponowaną przez siebie czasoprzestrzeń 3D-TSM jako na silne i skuteczne narzędzie numeryczne przydane dla wielu zastosowań drogowych, mostowych i budynków wysokich. Przedstawioną metodę powinno dać się zastosować również do analizy desantowych mostów pontonowych istotnych dla zastosowań wojskowych.

LITERATURA

- [1] Franus Aleksander. 2017. *Domowa praca studencka na specjalności „teoria konstrukcji”, na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej*. Warszawa (na prawach rękopisu).
- [2] Góźdź Aldona. 1987. *Analiza dynamiczna pala wbijanego w grunt z zastosowaniem metody elementów czasoprzestrzennych*. Warszawa: Rozprawa doktorska, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska.
- [3] Kączkowski Zbigniew. 1975. „The method of finite space-time elements in dynamics of structures”. *J. Techn. Physics*. 16(1) : 69-84.
- [4] Kączkowski Zbigniew. 1976. „Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych”. *Arch. Inż. Ląd.* 22(3) : 365-378.
- [5] Kączkowski Zbigniew. 1986. „Niesprężone układy równań w metodzie elementów czasoprzestrzennych (MECZ)”. *Arch. Inż. Ląd.* 32(1) : 39-50.
- [6] Kączkowski Zbigniew, Marek Witkowski. 1977. Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych. W *Materiały Konf. Nauk. Wydz. Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej*, 171-186, Warszawa.
- [7] Obrębski Jan Bogdan. 1999. *Cienkościenne sprężyste pręty proste*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [8] Obrębski Jan Bogdan. 1997. *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa: Micro-Publisher J.B. Obrębski Wydawnictwo Naukowe.
- [9] Obrębski Jan Bogdan, Robert Szmit. 2000. Dynamics and dynamical stability of tall buildings. In *Proceedings of International Conference ICSSD*, 85-94. Taipei, Taiwan.
- [10] Obrębski Jan Bogdan. 2002. Examples of 3d-Time space application for dynamical analysis of structures. In *Proceedings of IASS/LSCE 2002 Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering*, 936-945. June 24-28, 2002, Warsaw, Poland.

- [11] Obrębski Jan Bogdan. 2002. Approaches to dynamics of bar structures. In *Proceedings of International Conference ICSSD*, 254-259. Singapore.
- [12] Obrębski Jan Bogdan. 2003. Advantages of 3D-Time Space Description for Dynamical Analysis of Structures. In *Proceedings of International Conference IASS-APCS*, 40-41. Taipei, Taiwan, 22-25.10.2003.
- [13] Obrębski Jan Bogdan. 2004. Some new possibilities for dynamical analysis of structures. In *Proceedings of the 8th International Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques*. Vilnius, Lithuania.
- [14] Obrębski Jan Bogdan. 2004. Examples of some parameters influence on bridges behaviour under moving loadings. In *Proceedings of The Second Internat. Conf. on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, 171 (abstract), 859-864 (CD). 5-7 July, 2004, Cape Town, South Africa. A.A.BALKEMA PUBLISHERS Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore.
- [15] Obrębski Jan Bogdan. 2004. Przykłady komputerowego wspomaganie dydaktyki w zakresie mechaniki budowlanych konstrukcji inżynierskich. W *Materiały Jubileuszowej Konferencji Naukowej WNT*, UWM w Olsztynie, 103-118. Olsztyn, 15-16.06.2004.
- [16] Obrębski Jan Bogdan. 2006. Przykłady i ocena metod projektowania dla budownictwa wspomaganym komputerem. W *Materiały X Międzynarodowej Szkoły Komputerowego Wspomaganie Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji*, 109-125. Jurata, 05.2006.
- [17] Obrębski Jan Bogdan. 2009. Metody analizy prętów cienkościennych wspomaganie komputerem i ich ocena. W *Materiały XIII Międzynarodowej Szkoły Komputerowego Wspomaganie Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji*, 239-254. Jurata, 11-15 maja, 2009.
- [18] Obrębski Jan Bogdan. 2009. Theory for thin-walled bars – performed investigations and tests. In *Proceedings of XV LSCE – Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems, International Seminar of IASS Polish Chapter*, 124-143. Warsaw, 4-5 December, 2009.
- [19] Obrębski Jan Bogdan: (Editor of 20 books) *Int. Conf. on Lightweight Structures in Civil Engineering*. (LSCE-1995-2014), Micro Publisher (...), Warsaw, Rzeszów, Częstochowa, Wrocław, Olsztyn, Poland.
- [20] Obrębski Jan Bogdan. 2013. (Editor) *Jan Bogdan Obrębski – Own papers published in LSCE books 1995-2012*. Micro Publisher (...), Warsaw.
- [21] Osiński Zbigniew. 1979. *Tłumienie drgań mechanicznych*. Warszawa: Wydawnictwo PWN.
- [22] Rawiak Jakub. 2017. *Domowa praca studencka na specjalności Teoria Konstrukcji* (na prawach rękopisu). Warszawa: Wydział Inżynierii Łądowej Politechniki Warszawskiej.
- [23] Szmít Robert. 2001. *Pręt kompozytowy jako model obliczeniowy budynku wysokiego*. Rozprawa doktorska, Warszawa.

3D-Time Space in Dynamical Analysis of Bridges

JAN Bogdan OBREBSKI

*Warsaw University of Technology
16 Armii Ludowej Street, 00-637 Warsaw, Poland*

Abstract. The paper presents next application and possibilities of dynamical analysis for engineering structures by means of 3D-Time Space Method in numerical edition proposed by the author with application of finite differences. These structures can be charged by different kinds of loadings. This time, it is a bridge girder with a car or the whole group of different carriages moving with certain velocity. The considerations were taken, starting from general differential equations of motion, through their simplified versions - resulting from taken assumptions for a bridge, until a set of two equations describing its bending-torsion behaviour. There are given examples of particular applications of the method.

Keywords: mechanics, dynamics, 3D-time space, finite differences, bridge