

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PŁYTY PRZY DZIAŁANIU OBCIĄŻENIA ZMIENNEGO PROPORCJONALNIE W CZASIE

Streszczenie

Artykuł dotyczy stateczności dynamicznej płyty przegubowo podpartej na obwodzie, przy działaniu obciążenia zmiennego proporcjonalnie w czasie. Zakładając umiarkowany wzrost obciążenia przyłożonego w płaszczyznę środkową płyty, można pominąć efekty falowe, zatem problem ruchu drgającej płyty opisany jest tylko przez stan zgięciowy, równaniem różniczkowym drugiego rzędu, które nie posiada rozwiązania zamkniętego. W pracy do uzyskania rozwiązania zastosowano metodę całkowania numerycznego Rungego - Kuty. Wyznaczano przebiegi drgań, będące rezultatem utraty stateczności dynamicznej w funkcji szybkości narastania obciążenia, z uwzględnieniem ugięć wstępnych płyty. Do zweryfikowania wyników drgań płyty zastosowano metodę elementów skończonych.

1. SFORMUŁOWANIE RÓWNIANIA RUCHU DRGAJĄCEGO PŁYTY

W literaturze [1] zamieszczono równanie równowagi statycznej dla płyty ortotropowej obciążonej przez wydatki n_x , n_y i q , ma ono postać

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Pomijając obciążenie q prostopadłe do powierzchni płyty oraz obciążenie n_y pozostawiając tylko n_x , działające w płaszczyźnie środkowej płyty, otrzymamy równanie dla problemu stateczności statycznej płyty. Zmieniając rodzaj obciążenia ze statycznego na dynamiczne $n_x = p = st$, (s - stała szybkość narastania obciążenia), otrzymamy dołączając siły bezwładności problem stateczności dynamicznej płyty przy obciążeniu ściskającym proporcjonalnym w czasie.

Jeżeli prędkość wzrostu obciążenia jest umiarkowana, to można pominąć efekty falowe, wówczas pozostaną tylko drgania giętne płyty.

W pracy [1] znajduje się równanie opisujące drgania giętne płyty izotropowej

$$\ddot{w}_m + \frac{S}{4}(m^2 + \lambda^2)^2 w_m - m^2 St(w_m + w_{0m}) + \frac{1 - \nu^2}{8} S(m^4 + \lambda^4)(w_m + w_{0m})(w_m + 2w_{0m})w_m = 0$$

gdzie poszczególne wielkości bezwymiarowe są postaci

$$\left(\frac{\pi}{sa}\right)^2 \frac{p_b^3}{\rho} \equiv S, \quad \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 D \equiv p_b, \quad h - \text{grubość płyty,}$$

$$\lambda = a/b, \quad \rho - \text{masa właściwa,} \quad \frac{s\bar{t}}{p_b} \equiv t, \quad \bar{t} - \text{czas fizyczny,}$$

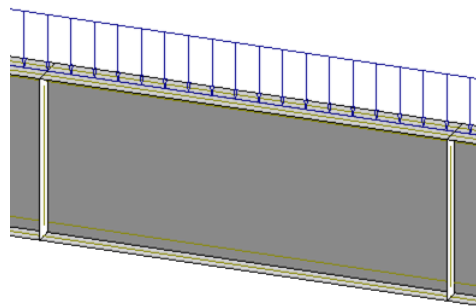
$$\frac{d^2 w_m}{dt^2} \equiv \ddot{w}_m.$$

Funkcja stanowiąca rozwiązanie drgań płyty jest postaci

$$w(x, y, t) = hw_m(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

2. OBLICZENIA DYNAMICZNE PŁYTY POD OBCIĄŻENIEM PROPORCJONALNYM W CZASIE

Jako przykład do obliczeń problemu stateczności dynamicznej posłuży fragment środknika blachownicy między żebrami poprzecznymi. Do pasa górnego blachownicy przyłożone jest obciążenie ciągle $p=st$, natomiast pas dolny spoczywa na sztywnym podłożu. Wymiary boku obciążonego $a = 2$ m, drugiego boku $b = 0,8$ m (rys.1).

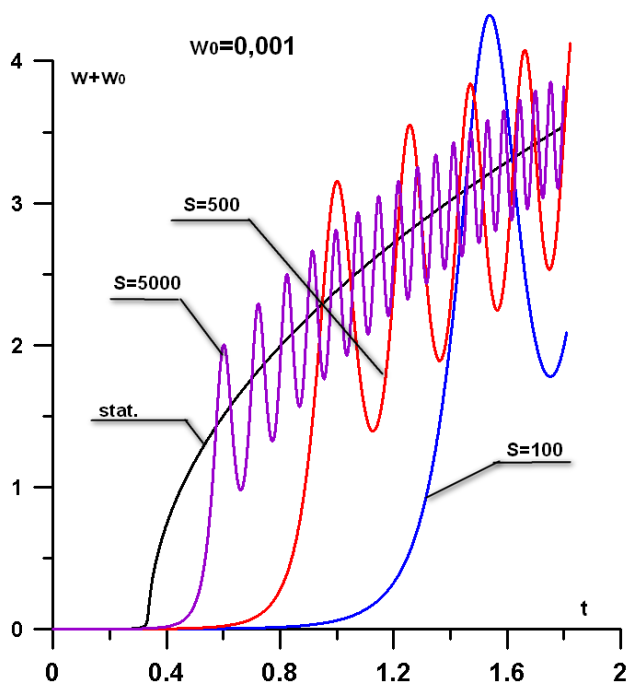


Rys. 1. Fragment segmentu blachownicy

Ponieważ równanie stateczności dynamicznej płyty przy tym obciążeniu nie posiada rozwiązania zamkniętego, można zastosować metody numerycznego całkowania, w artykule zastosowano metodę Rungego-Kuty, wykonując autorski program obliczeniowy.

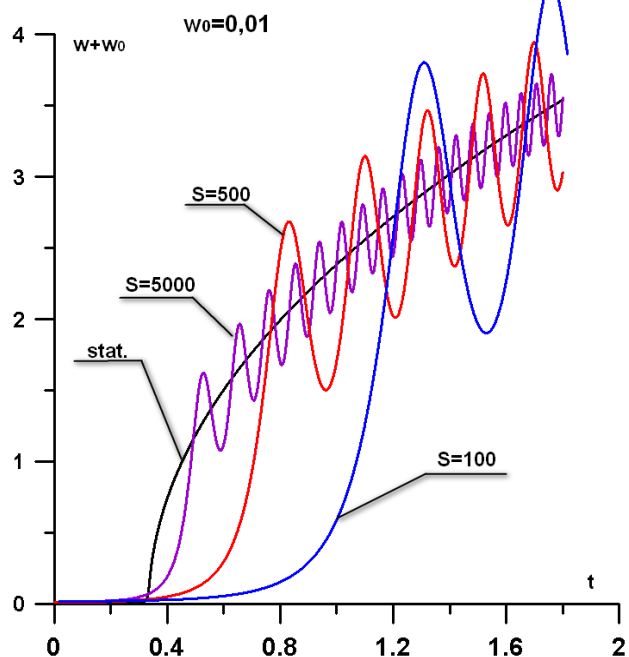
Na rys. 2 zamieszczono obraz drgań środknika płyty w funkcji różnych prędkości narastania obciążenia, przy wstępnej imperfekcji geometrycznej $w_0 = 0,001$.

Przebiegi drgań oscylują wokół krzywej równowagi statycznej. Wielkość tych oscylacji uzależniona jest od wielkości narastania obciążenia, im większa jest szybkość narastania, tym oscylacja amplitudy wokół krzywej równowagi stanu pokrytycznego płyty, jest też większa. Drgania te następują po dłuższym upływie czasu, niż w sytuacji przeciwniej dla mniejszych szybkości narastania obciążenia. Opóźnienie czasowe w wystąpieniu drgań związane jest z oporami bezwładności do pokonania, których układ musi zgromadzić dostateczną energię sprężystą odkształcenia.



Rys. 2. Przebieg drgań płyty dla $w_0 = 0,001$

Ugięcia dynamiczne początkowo rosną wolno monotonicznie, ich szybkość narastania uzależniona jest głównie od wielkości wygięcia wstępnego, dopiero gdy obciążenie przekroczy wartość krytyczną p_b , to następuje gwałtowny wzrost ugięć o charakterze oscylacyjnym.

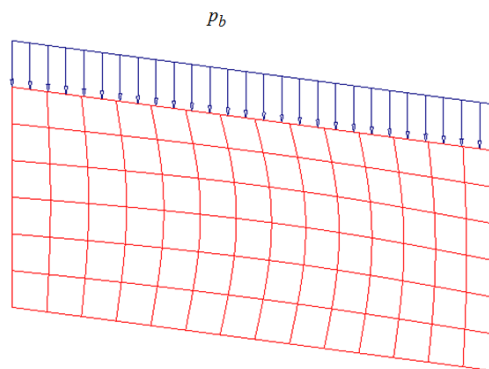


Rys. 3. Przebieg drgań płyty dla $w_0 = 0,01$

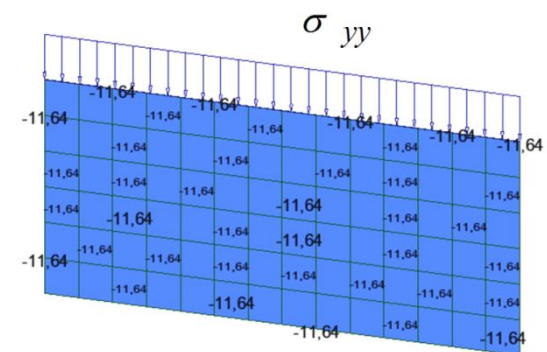
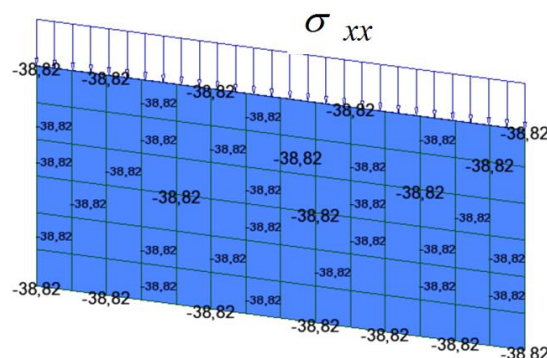
Podobne przebiegi (rys. 3), otrzymano przy tych samych parametrach narastania prędkości obciążenia, ale przy innym niż poprzednio wygięciu wstępnym, teraz $w_0 = 0,01$ płyty.

Sprawdzenie wartości naprężeń wykonano za pomocą programu komputerowego Robot [5], płyta traci stateczność bifurkacyjną w zakresie sprężystym, bowiem wartość naprężeń wynosi

$$\sigma_{xx} = 38,82 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 11,64 \text{ MPa}.$$



Rys. 4. Pierwsza postać wyboczeńiowa płyty



Rys. 5. Naprężenia normalne σ_{xx} i σ_{yy}

W pracy [3] zamieszczono sformułowania i analizy płyt w stanie pokrytycznym wyznaczając ścieżki równowagi statycznej, której tutaj z racji obliczeń dynamicznych nie zamieszczono.

3. OBLICZENIA DYNAMICZNE PŁYTY POD OBCIĄŻENIEM OKRESOWO ZMIENNYM W CZASIE

W pracy [2] przedstawiono przykłady rozwiązań płyt i powłok pod obciążeniem okresowo zmiennym w czasie w postaci

$$p(t) = \alpha + \beta \cos \theta t$$

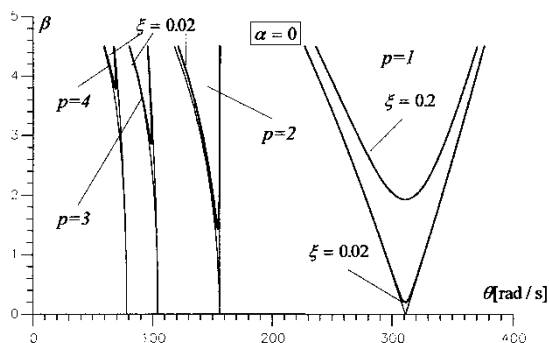
Zastosowano, jako narzędzie do zapisu równań ruchu drgań konstrukcji, metodę elementów skończonych, a do ich rozwiązania metodę bilansu harmonicznych oraz metody bezpośredniego całkowania.

Przykładowe rozwiązanie płyty zaczerpnięte z [2] przedstawiono na rys. 6, która przedstawia mapę Ince'a-Strutta częstości rezonansowych i nierezonansowych głównego i pobocznych obszarów niestatecznych, z uwzględnieniem tłumienia ξ .

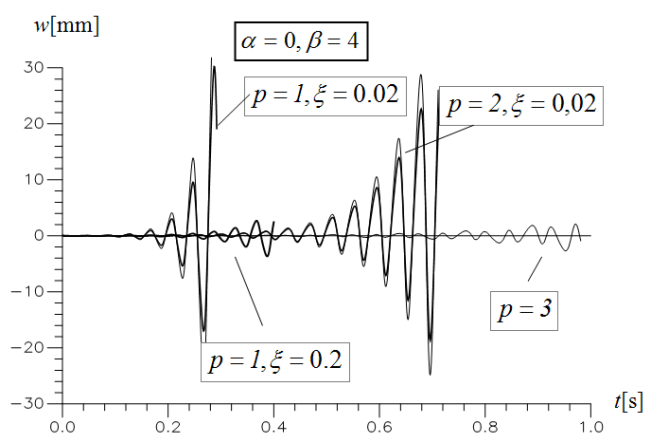
Wyznaczono także przebiegi drgań (rys. 7) punktu środka płyty wykorzystując częstości wymuszeń θ z obszarów niestatecznych częstości rezonansowych, dla wartości modulacji $\beta = 4$.

Analizując przebiegi drgań płyty widocznym jest, że w stosunkowo krótkim czasie występują rezonansowe amplitudy drgań, dla

rezonansów $p = 1$ i $p = 2$ (rys. 7). Także, po upływie nieco dłuższego czasu wystąpią drgania rezonansowe dla rezonansów dalszych rzędów rezonansowych na przykład $p = 3$.



Rys. 6. Granice obszarów dla $p=1,2,3,4$ pierwszej częstotliwości rezonansowej płyty



Rys. 7. Przebiegi drgań płyty

PODSUMOWANIE

Podczas użytkowania dowolnej konstrukcji mogą i występują zmiany warunków związanych z jej obciążeniem, zwłaszcza w jej lokalnym obszarze. Mogą wystąpić takich obciążenia, na które konstrukcja nie była sprawdzana, z racji wymagań określonych w stanach granicznych norm projektowych. Przeprowadzenie analiz zachowania się konstrukcji dla różnego rodzaju wymuszeń, dostarcza informacji na etapie projektowania, o jej możliwym zachowaniu się w warunkach rzeczywistych, uzależnionych od działających wymuszeń.

Przy obecnie dostępnych programach komputerowych obliczeń, można wykonać analizy odpowiedzi konstrukcji na różne formy działających na nią wymuszeń. Dlatego też, w artykule zamieszczono obliczenia z wymuszeniami dynamicznymi, jako uzupełnienie obliczeń statycznych.

BIBLIOGRAFIA

1. Gryboś R.: Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym, PWN, Warszawa-Poznań 1980
2. Misiak J., Stachura S. : Wybrane zagadnienia stateczności statycznej i dynamicznej konstrukcji prętowych i powłokowych, Monografia Wyższa szkoła Ekologii i Zarządzania, Warszawa 2010
3. Rykaluk K., Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, DWE, Wrocław 2012r

4. Autodesk Robot Structural Analysis Professional, Licencja dla Wyższej Szkoły Ekologii i Zarządzania, Warszawa ul. Olszewska 12
5. Autodesk Robot Structural Analysis

DYNAMIC STABILITY OF THE PLATE UNDER LOAD VARIABLE PROPORTIONATELY WITH TIME

Abstract

The paper refers to dynamic stability of a plate that is hinged supported on its perimeter under the action of a variable load proportionately over time. Assuming that increase of the load imposed to the middle surface of the plate is moderate, wave effects may be passed over and the problem of plate's oscillating motion is described by flexural state only - with a differential equation of the second order that is not of a closed-form solution. Runge-Kutta method of numerical integration was used to obtain the solution. Oscillation courses resulting from dynamic stability loss were determined as a function of load increase rate, taking into account plate's initial deflections. Finite element method was used to verify the results regarding plate's oscillations.

Autor:

Dr inż. Sławomir Stachura

Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu