

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI
 Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji, Wydział Inżynierii Produkcji
 Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
 Dr inż. Zbigniew ŻUK
 Katedra Maszyn Roboczych i Metodologii Badań
 Dr inż. Piotr SZCZYGLAK
 Katedra Budowy Eksploatacji Pojazdów i Maszyn
 Wydział Nauk Technicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

MATEMATYCZNE MODELOWANIE KSZTAŁTU NASIENIA GORCZYCY BIAŁEJ (*SINAPIS ALBA L.*)[®]

Mathematical modeling of the shape of the seed of white mustard (*Sinapis alba L.*)[®]

Słowa kluczowe: gorczyca biała, nasiona, kształt, model matematyczny.

W modelu matematycznym do opisu kształtu nasienia gorczycy zastosowano krzywą Béziera, którą obrócono względem osi Z układu współrzędnych, a uzyskaną powierzchnię skalowano. Krzywa Béziera opisywała linię połowy konturu wzdłużnego przekroju nasienia gorczycy. Kształt nasienia gorczycy aproksymowano też za pomocą elipsoidy i kuli. Opracowany model matematyczny powstały przez obrót krzywej Béziera może służyć do opisu brył 3D podobnych pod względem kształtu i podstawowych wymiarów do nasion gorczycy. W modelu matematycznym istnieje możliwość zmiany wartości długości, szerokości, grubości nasienia oraz współrzędnych punktów węzłowych i kontrolnych krzywej Béziera opisującej linię połowy konturu wzdłużnego przekroju nasienia gorczycy.

Key words: white mustard, seeds, shape, mathematical model.

The mathematical model to describe the shape of mustard seed is used Bézier curve, which is rotated relative to the axis Z of the coordinate system, and the subjected to scaling surface. Bézier curve described the mid contour line of the section longitudinal of mustard seed. The shape of a mustard seed approximated using an ellipsoid and sphere. The mathematical model developed by the rotation of the Bézier curve can be used to describe the 3D solids are similar in shape and basic dimensions of the mustard seed. The mathematical model is possible to change the length, width, thickness of seed and coordinates of nodal point, of control points Bézier curve describing the mid contour line of the longitudinal section of mustard seed.

WSTĘP

Gorczyca biała (*Sinapis alba L.*) jest rośliną przyprawową, a nasiona są podstawowym składnikiem musztardy. Ze względu na zawartość substancji czynnych (olejek gorczycowy) są cennym surowcem dla przemysłu spożywczego.

Nasiona gorczycy białej według Świetlikowskiej [15] mają kształt kulisty. Grochowicz [6] uważa, że kształt kulisty nasion jest wówczas, gdy podstawowe wymiary (długość, szerokość, grubość) są równe. Kształt nasion gorczycy jest uwzględniany podczas projektowania maszyn i urządzeń wykorzystywanych w produkcji musztard np. obłuskiwanie nasion [16].

Metody zarządzania nasionami stosowane w przedsiębiorstwach produkcyjnych, handlowych [1, 2] i w przemyśle spożywczym a szczególnie przy robotyzacji produkcji [14], pozwalają uporządkować ich dane oraz zidentyfikować cechy geometryczne i strukturalne mające wpływ na parametry robocze maszyn i decyzje projektowe wpływające na jakość produktu.

Do opisu kształtu nasion mogą być wykorzystane metody opisu surowców pochodzenia rolniczego proponowane przez

wielu badaczy [4, 5, 11, 12]. Ze względu na niewielkie wymiary nasion, metody proponowane przez Frączka i Wróbla [5] oraz Kęskę i Federa [8] są trudne do praktycznego zastosowania.

Informacji potrzebnych do modelowania 3D obiektów różnego pochodzenia dostarcza grafika komputerowa [3, 9]. Sprawdzić należy, czy można zastosować inne modele, które dokładniej niż kula reprezentować mogą kształt zewnętrzny nasion gorczycy białej.

Celem artykułu jest przedstawienie opracowanego matematycznego modelu opisującego zewnętrzny kształt nasienia gorczycy białej.

METODYKA

Materiałem do badań były nasiona gorczycy zakupione w Centrali Nasiennej w Olsztynie. Pomiaru długości, szerokości i grubości wybranych nasion dokonano za pomocą metalograficznego mikroskopu warsztatowego typu BK MWM 2325 z dokładnością do 0,01 mm. Liczebność nasion gorczycy w próbach przeznaczonych do pomiarów cech geometrycznych (długości, szerokości i grubości) wyznaczono

przyjmując błędy szacunkowe cech geometrycznych na poziomie 5%. Liczba nasion w jednej próbce wynosiła 400 sztuk. Analizę statystyczną uzyskanych wyników pomiarów przeprowadzono korzystając z programu Statistica PL, [10, 13]. Do opisu kształtu połowy konturu przekroju wzdłużnego nasienia gorczycy zastosowano krzywą Béziera. Dokonując jej obrotu względem osi Z uzyskano powierzchnię obrotową. Do opisu kształtu nasienia gorczycy zastosowano też parametryczne równanie elipsoidy i kuli. Utworzona powierzchnia obrotowa bryły i powierzchnia elipsoidy poddano skalowaniu, by kształt był zbliżony do kształtu modelowanego nasienia gorczycy. Wizualizacji wymienionych modeli brył 3D dokonano za pomocą matematycznego programu komputerowego.

W celu porównania kształtu nasienia z modelami matematycznymi opisującymi kształt nasienia gorczycy wykonano nałożone na siebie zrzutowane na płaszczyznę XZ fotografie podłużnego przekroju nasienia gorczycy oraz modeli i pokazano je na tle poziomych linii wykresu. Linie poziome przecinają obraz rzutu modelu i obraz rzutu rzeczywistego podłużnego przekroju bryły nasienia gorczycy. Poszczególne linie poziome, przecinając się z konturami rzutów, wyznaczają długości przekrojów na zaznaczonych poziomach.

WYNIKI POMIARÓW

W tabeli 1 zamieszczono charakterystykę statystyczną podstawowych wymiarów nasion gorczycy białej. Zawarte w tabeli 1 wyniki wskazują, że długość nasion gorczycy białej zawiera się od 2,49 do 2,53 mm, szerokość od 2,3 do 2,34 mm, a grubość od 2,06 do 2,1 mm. Różnica między najmniejszym a największym średnim wymiarem wynosi 0,22 mm, zatem nasiono gorczycy nie jest podobne ani do kuli ani do elipsoidy.

OPIS MODELU

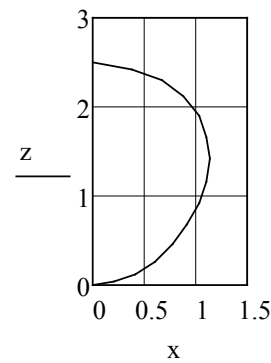
Macierzowe równania współrzędnych x, z punktów krzywej Béziera połowy konturu nasienia gorczycy mają postać:

$$x_t = x_1 \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right]^3 + x_2 \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right]^2 + x_3 \cdot 3 \cdot \left[\frac{t}{N}\right]^2 \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right] + x_4 \cdot \left[\frac{t}{N}\right]^3 \quad (1)$$

$$z_t = z_1 \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right]^3 + z_2 \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right]^2 + z_3 \cdot 3 \cdot \left[\frac{t}{N}\right]^2 \cdot \left[1 - \frac{t}{N}\right] + z_4 \cdot \left[\frac{t}{N}\right]^3 \quad (2)$$

Współrzędne punktów węzłowych i kontrolnych, występujących w równaniach (1, 2), dla krzywej Béziera nasienia gorczycy, są zapisane w macierzy 3:

$$\begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2,51 \\ 1,96 & 2,26 \\ 0,98 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$



Rys. 1. Kontur połowy wzdłużnego przekroju nasienia gorczycy.

Fig. 1. Contour half of a longitudinal section of a mustard seed.

Źródło: Opracowanie własne / Source: The own study

Tabela 1. Charakterystyka statystyczna podstawowych wymiarów nasion gorczycy białej

Table 1. Statistical characteristics of white mustard seed dimensions

Cecha Parameter	Wartość średnia Mean value \bar{x} (mm)	Przedział ufności Confidence interval		Odchylenie stan- dardowe Standard devia- tion S (mm)	Błąd szacunku Standard er- ror of the esti- mate d_z (mm)	Minimalna li- czebność próby Minimum sam- ple size n (-)	Przyjęta liczeb- ność próby Assumed sam- ple size n_0 (-)	Współczynnik zmienności Coefficient of variation, Thickness V (%)
		m_{min} (mm)	m_{max} (mm)					
Grubość Thickness (a)	2,08	2,06	2,10	0,1807	0,05	51	400	8,69
Szerokość Width (b)	2,32	2,30	2,34	0,1677	0,05	44	400	7,24
Długość Length (c)	2,51	2,49	2,53	0,1891	0,05	55	400	7,53
Średnica Diameter (d_z)	2,30	2,28	2,34	0,1621	0,05	41	400	7,05

Źródło: Opracowanie własne / Source: The own study

W celu uzyskania powierzchni obrotowej reprezentującej nasienie gorczycy należy obrócić krzywą Béziera względem osi Z wykorzystując równania:

$$XI_{t,j} = x_t \cdot \sin(s_j) \quad (4)$$

$$YI_{t,j} = x_t \cdot \cos(s_j) \quad (5)$$

$$ZI_{t,j} = z_t \quad (6)$$

gdzie:

$$\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{N} \quad (7)$$

$$s_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{N} \quad (8)$$

$$i = 0 \dots N \quad (9)$$

$$j = 0 \dots N \quad (10)$$

$$t = 0 \dots N \quad (11)$$

gdzie: N – rozmiar macierzy (przyjęto $N = 14$),

t, i – liczba wierszy,

j – liczba kolumn.

Wymiary długości a , szerokości b , grubości c , jako wartości średnie (tab.1), pochodzące z pomiarów rzeczywistych nasion gorczycy zamieszczono w wektorze 12.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,51 \\ 2,32 \\ 2,08 \end{bmatrix} \quad (12)$$

W celu uzyskania zadanych wymiarów (a, b, c) modelu nasienia gorczycy należy dokonać skalowania równań 4, 5, 6. Wyskalowane macierzowe równania współrzędnych X, Y, Z punktów węzłowych siatki powierzchni opisującej kształt nasienia gorczycy mają następującą postać:

$$X = \frac{b}{\max(XI) - \min(XI)} \cdot XI \quad (13)$$

$$Y = \frac{c}{\max(YI) - \min(YI)} \cdot YI \quad (14)$$

$$Z = \frac{a}{\max(ZI) - \min(ZI)} \cdot ZI \quad (15)$$

Macierzowe równania współrzędnych Xe, Ye, Ze punktów leżących na powierzchni elipsoidy aproksymującej kształt zewnętrzny nasienia gorczycy mają postać:

$$Xe_{i,j} = \frac{b}{2} \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \cos(s_j) \quad (16)$$

$$Ye_{i,j} = \frac{c}{2} \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \sin(s_j) \quad (17)$$

$$Ze_{i,j} = \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha_i) + \frac{a}{2} \quad (18)$$

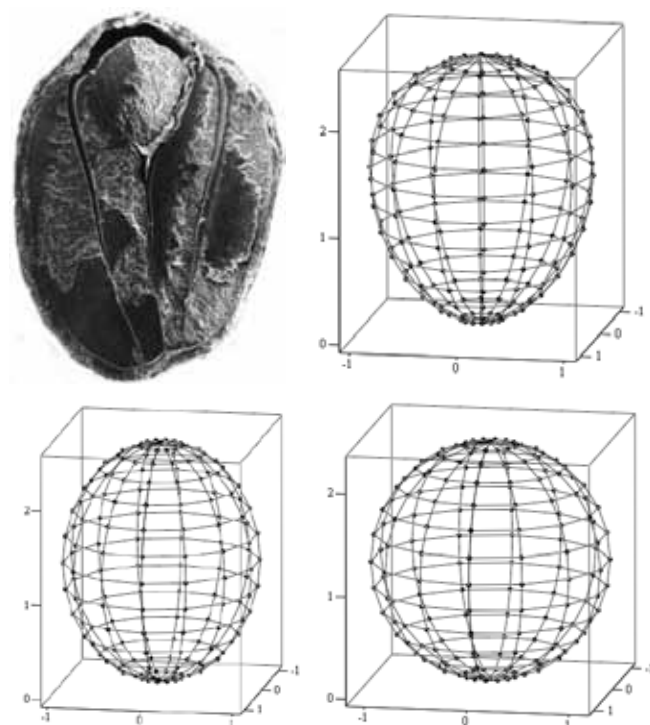
Macierzowe równania współrzędnych Xk, Yk, Zk punktów leżących na powierzchni kuli aproksymującej kształt zewnętrzny nasienia gorczycy mają postać:

$$Xk_{i,j} = \frac{r}{2} \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \cos(s_j) \quad (19)$$

$$Yk_{i,j} = \frac{r}{2} \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \sin(s_j) \quad (20)$$

$$Zk_{i,j} = \frac{r}{2} \cdot \cos(\alpha_i) + \frac{r}{2} \quad (21)$$

Przekrój podłużny nasienia gorczycy i jego modele kształtu zamieszczono na rysunku 2.

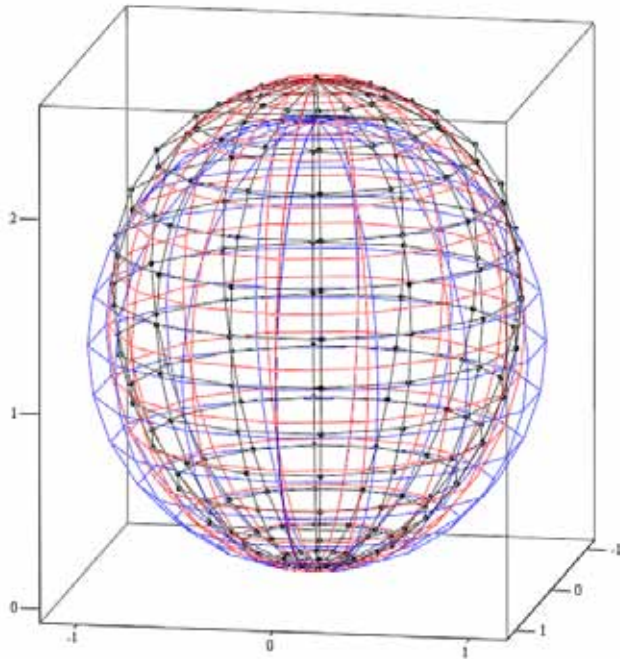


Rys. 2. Przekrój nasienia gorczycy białej; jej model otrzymany przez obrót krzywej Béziera, model wyrażony za pomocą elipsoidy, model wyrażony za pomocą kuli.

Fig. 2. Cross section of white mustard seed; the model obtained by rotation of the Bézier curve, the model is expressed by means of an ellipsoid model expressed using a sphere.

Źródło: Opracowanie własne / **Source:** The own study

Nałożone na siebie modele 3D nasienia gorczycy przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Nałożone na siebie modele nasienia gorczycy białej.

Fig. 3. Overlapping models of white mustard seed.

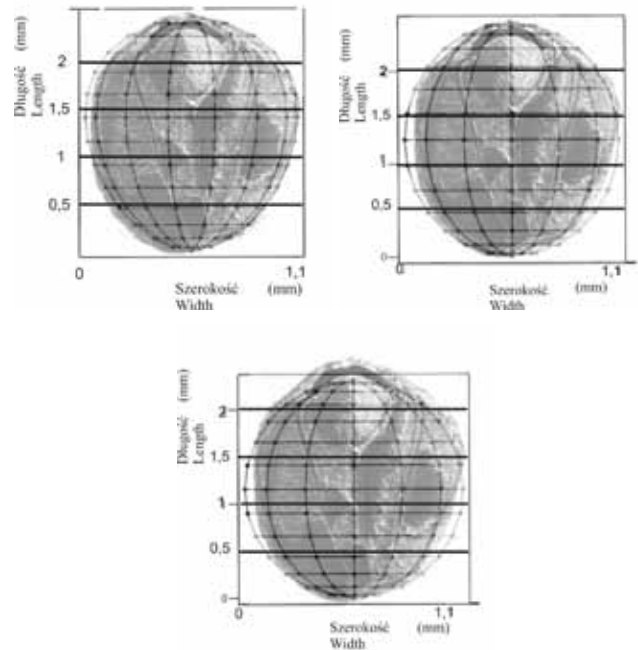
Źródło: Opracowanie własne / Source: The own study

WERYFIKACJA MODELU

Z rysunku 3 wynika, że między modelami reprezentującymi kształt nasienia gorczycy białej występują różnice profilowe.

Opracowane modele matematyczne opisujące kształt nasienia gorczycy poddano weryfikacji przez porównanie nałożonych na siebie rzutów na płaszczyzny XZ podłużnego przekroju nasienia gorczycy i jego modeli (rys. 4). Porównując nałożone na siebie rzuty modeli nasienia gorczycy, stwierdza się, że model powstały przez obrót krzywej Béziera dokładniej niż model elipsoidy i kuli aproksymuje kształt nasienia gorczycy. Wymiary podstawowe, jak długość, szerokość grubość, zachowuje model powstały przez obrót krzywej Béziera

i model, który reprezentuje elipsoida (wynik skalowania), natomiast model reprezentowany przez kulę nie zachowuje wymiarów podstawowych nasienia gorczycy. Wyznaczone różnice między długościami linii przecinających obrazy rzutów modeli i obraz rzutu podłużnego przekroju nasienia gorczycy na zaznaczonych poziomach przekrojów, a także obliczony błąd względny zamieszczono w tabeli 2.



Rys. 4. Rzuty na płaszczyznę XZ fotografii podłużnego przekroju nasienia gorczycy oraz modelu powstałego przez obrót krzywej Béziera, modelu reprezentowanego przez elipsoidę, modelu reprezentowanego przez kulę pokazane na tle poziomych linii wykresu.

Fig. 4. Projection onto a plane the XZ of photographs mustard seed and the model derived by the rotation of the Bézier curve, the model represented by the ellipsoid, the model represented by a sphere shown in the background horizontal line graph.

Źródło: Opracowanie własne / Source: The own study

Tabela 2. Różnice pomiaru długości przekrojów modeli i długości podłużnego przekroju nasienia gorczycy na zaznaczonych poziomach oraz błąd względny (I – model powstały przez obrót krzywej Béziera, II – model reprezentowany przez elipsoidę, III – model reprezentowany przez kulę)

Table 2. Length measurement differences sectional models, and the sectional longitudinal length of the mustard seed at selected levels and the relative error (I - model created by the rotation of the Bézier curve, II - model represented by an ellipsoid, III - model represented by a sphere)

Odległość między zaznaczonymi przekrojami nasienia gorczycy i jego modeli <i>The distance between the selected cross-sections of mustard seed and its models (mm)</i>	Różnice między długościami przekrojów modeli i długościami przekrojów nasienia gorczycy na zaznaczonych poziomach <i>The difference between the lengths of cross-sectional models and lengths of cross-sectional the mustard seed at selected levels (mm)</i>			Błąd względny <i>The relative error (%)</i>		
	I	II	III	I	II	III
0,5	0,084	-0,168	-0,163	4,94	-9,88	-9,58
1	0,022	-0,13	-0,158	1,04	-6,17	-7,5
1,5	-0,019	-0,046	0,031	-0,86	-2,09	1,4
2	0,001	0,059	0,388	0,05	3,11	20,47

Źródło: Opracowanie własne / Source: The own study

Błąd względny odwzorowania nasienia gorczycy za pomocą modelu powstałego z obrotu krzywej Béziera dla przekrojów na poszczególnych poziomach zawiera się od -0,86 do 4,95%.

W przypadku modelu reprezentowanego przez elipsoidę (tab.2.) niedokładność odwzorowania wystąpiła w przekrojach w odległości 0,5 mm (błąd względny -9,88%) i 1 mm (błąd względny -6,17%). W przypadku modelu reprezentowanego przez kulę (tab.2.) niedokładność odwzorowania wystąpiła w przekrojach w odległości 0,5 mm (błąd względny -9,58%), 1 mm (błąd względny -7,5%) i 2 mm (błąd względny 20,47%).

Z przedstawionych trzech modeli matematycznych model powstały z obrotu krzywej Béziera może służyć do generowania brył 3D podobnych pod względem kształtu i podstawowych wymiarów nasion gorczycy białej. Modele mogą być wykorzystywane w inżynierii rolniczej i inżynierii żywności, tam gdzie jest wymagana duża dokładność odwzorowania.

WNIOSKI

1. Opracowany model matematyczny reprezentowany powierzchnią uzyskaną przez obrót krzywej Béziera po wyskalowaniu może służyć do generowania brył 3D zbliżonych pod względem kształtu i podstawowych wymiarów do nasion gorczycy białej.
2. W proponowanym modelu matematycznym parametrami sterującymi kształtem są podstawowe wymiary nasienia gorczycy (długość, szerokość, grubość) oraz współrzędne punktów węzłowych i kontrolnych krzywej Béziera opisującej linię połowy konturu wzdłużnego przekroju nasienia.
3. Proponowana metoda modelowania może ułatwić odwzorowanie kształtów rzeczywistych nasion gorczycy białej i może być stosowana przez projektantów do konstruowania separatorów i obłuskiwaczy.

LITERATURA

- [1] **BULIŃSKI J., WASZKIEWICZ CZ., BURACZEWSKI P. 2012.** Stock management as an element of enterprise strategy. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW.* No 60; 137-148.
- [2] **BULIŃSKI J., WASZKIEWICZ CZ., BURACZEWSKI P. 2013.** Utilization of ABC/XYZ analysis in stock planning in the enterprise. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW.* No 61; 89-96.
- [3] **FOLEY J. D., VAN DAM A., FEINER S. K., HUGHES J. F., PHILLIPS R. L. 2001.** Wprowadzenie do grafiki komputerowej. WNT, Warszawa, ISBN 83-204-2662-6.
- [4] **FRĄCZEK J., WRÓBEL M. 2006.** *Metodyczne aspekty oceny kształtu nasion.* Inżynieria Rolnicza. Nr 12, 155-163.
- [5] **FRĄCZEK J., WRÓBEL M. 2009.** *Zastosowanie grafiki komputerowej w rekonstrukcji 3D nasion.* Inżynieria Rolnicza. Nr 6 (115), 87-94.
- [6] **GROCHOWICZ J. 1971.** Maszyny do czyszczenia i sortowania nasion. Państwowe Wydawnictwo Rolnicze i Leśne. Warszawa.
- [7] **JANASZEK M., TRAJER J. 2010.** Classification system as diagnostics tool for the plant products. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW.* No 56; 51-56.
- [8] **KĘSKA W., FEDER S. 1997.** Trójwymiarowa rekonstrukcja kształtu elementów roślinnych z dwuwymiarowych obrazów rastrowych. *Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych,* 15-17.
- [9] **KICIAK P. 2000.** Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowanie w grafice komputerowej. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- [10] **KREFTT R., CHOSZCZ D. 2000.** Statystyka (Zagadnienia wybrane), Wszechnica Mazurska w Olecku.
- [11] **MABILLE F., ABECASSIS J. 2003.** *Parametric modelling of wheat grain morphology: a new perspective.* *Journal of Cereal Science,* 37, 43-53.
- [12] **MIESZKALSKI L. 2011.** *Metoda matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy za pomocą parametrycznej krzywej przestrzennej i czterowęzłowej siatki.* *Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego.* Nr 1. Tom 21/38, 41-45.
- [13] **RABIEJ M. 2012.** *Statistica.* Wyd. Helion Gliwice.
- [14] **SHVOROV S., RESHETYUK V., BOLBOT I., SHTEPA V., CHIRCHENKO D. 2012.** Teoretical issues construction and operation of agricultural mission robotic system. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW.* No 60; 97-102.
- [15] **ŚWIETLIKOWSKA K. (red.). 2008.** Surowce spożywcze pochodzenia roślinnego. Wydawnictwo SGGW. Warszawa, ISBN 978-83-7244-929-0.
- [16] **ŻUK Z. 2011.** Metoda obłuskiwania nasion gorczycy. Rozprawa doktorska. Wydział Nauk Technicznych. Uniwersytet Warmińsko-Mazurski.