Tadeusz J. Sobczyk
Politechnika Krakowska,
Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii

ALGORYTM OKREŚLANIA STANÓW USTALONYCH W MASZYNACH PRĄDU PRZEMIENNEGO BEZPOŚREDNIO W DZIEDZINIE CZASU

ALGORITHM DETERMINING STEADY-STATES FOR AC MACHINES DIRECTLY IN TIME DOMAIN

Streszczenie: W pracy opisano algorytm wyznaczania stanów ustalonych w maszynach elektrycznych prądu przemiennego dla przypadków ich dwu-okresowego charakteru. Algorytm umożliwia określenie rozwiązań ustalonych bezpośrednio w dziedzinie czasu pomimo, że przebiegi dwu-okresowe są niepowtarzalne w żadnym skończonym przedziale czasu. Bazą dla rozważań jest dyskretny operator różniczkowania określający chwilowe wartości pochodnej funkcji dwu-okresowej w wybranym zbiorze punktów na podstawie wartości funkcji w tym zbiorze. Umożliwia on zapisanie równań algebraicznych określających wartości rozwiązania ustalonego w tym zbiorze punktów, a na ich podstawie określenie wartości rozwiązania ustalonego w dowolnej chwili nieskończonego przedziału czasu. Algorytm opisany w pracy jest konkurencyjny w stosunku do znanych w literaturze równań wyznaczających takie stany ustalone w dziedzinie częstotliwości metodą bilansu harmonicznych.

Abstract: The main aim of consideration is to find relations for direct determination in time domain of periodic steady-state solutions for differential equations. Consideration starts from a case of a set of linear periodic differential equations having periodic steady-state solution, for which that solution can be find in frequency domain by harmonic balance method. Required equations have been find using relations between Fourier coefficients and values of periodic function in time, which has been done in the matrix form. A new discrete operator of differentiating has been defined. As a result a set of algebraic equations has been written. Base on it an algorithm for nonlinear differential equations has been proposed. Numerical tests have been done both for a new discrete operator and for steady-state analysis in a simply electromechanical converter.

Słowa kluczowe: *maszyny prądu przemiennego, analiza stanów ustalonych, rozwiązania prawie-okresowe, analiza w dziedzinie czasu, dyskretny operator różniczkowania*
Keywords: *periodic steady-state solution, analysis in time domain, discrete differentiating operator*

1. Wstęp

Stany ustalone w maszynach elektrycznych są przedmiotem szczególnego zainteresowania, gdyż na ich podstawie są określane parametry techniczno-ekonomiczne. Metody wyznaczania stanów ustalonych należą do elementarnych problemów elektrotechniki i są podstawowym narzędziem poznawania właściwości układów elektrycznych. Problem określania rozwiązań ustalonych w maszynach elektrycznych prądu przemiennego znacznie się komplikuje gdyż należy poszukiwać rozwiązań układu równań różniczkowych o postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{L}(\mathbf{i},\varphi)\,\mathbf{i}\big)+\mathbf{R}\,\mathbf{i}=\mathbf{u}(t) \tag{1a}$$

$$\mathrm{J}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{D}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=T_{\mathrm{em}}(\mathbf{i},\varphi)+T_{\mathrm{m}}(t,\varphi) \tag{1b}$$

Jest to układ nieliniowych równań różniczkowych, do których nie można bezpośrednio stosować metod wyznaczania rozwiązań ustalonych znanych z teorii obwodów elektrycznych.

W wielu przypadkach dla maszyn o symetrycznej budowie i przy odpowiednio dobranych założeniach upraszczających udaje się sprowadzić równania elektryczne maszyny (1a) do układu liniowego o współczynnikach niezależnych od kąta obrotu w postaci

$$\mathbf{L}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{i}}{\mathrm{d}t}+\mathbf{R}\,\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{M}\,\mathbf{i}=\mathbf{u}(t)$$

dla których stosunkowo łatwo jest określić stany ustalone przy założeniu stałej prędkości obrotowej maszyny. Jest to podejście szeroko rozpowszechnione w praktyce inżynierskiej. Jednak w przypadkach konieczności uwzględnienia nieliniowości obwodu magnetycznego, rzeczywistych rozkładów pola w szczelinie powietrznej czy zaburzeń zewnętrznego momentu mechanicznego konieczne jest łączne rozwiązywanie równań (1a) oraz (1b). Poszukiwanie rozwiązań ustalonych dla równań elektrycznych (1a), nawet przy założeniu stałej prędkości obrotowej, stwarza poważne problemy obliczeniowe. Rozwiązań ustalonych należy bowiem poszukiwać w postaci dwu-okresowych szeregów Fouriera, z których pierwszy wynika z okresu zmienności napięć zasilających, a drugi z okresu zmienności indukcyjności, wynikającego z prędkości kątowej wirnika maszyny.

W pracy [3] podano algorytm wyznaczania rozwiązań okresowych dla równań (1a) przy założeniu liniowości obwodu magnetycznego maszyny przy uwzględnieniu wielo-harmonicznej zależności indukcyjności uzwojeń maszyny od kąta obrotu. W pracy [5] uogólniono ten algorytm na przypadek nieliniowego obwodu magnetycznego. W pracach [6][7][8] opisano algorytm wyznaczania stanu ustalonego dla symetrycznej maszyny synchronicznej przy założeniu liniowości obwodu magnetycznego i mono-harmoniczności przepływów uzwojeń poddawanie okresowych zaburzeniom momentu mechanicznego, co wymagało łącznego rozwiązywania równań (1a) oraz (1b). Wszystkie te algorytmy wyznaczały rozwiązania w dziedzinie częstotliwości, czyli wyznaczały rozwiązania w postaci dwuokresowego szeregów Fouriera funkcji prawie-okresowej. Algorytmy te komplikowały się znacząco w przypadkach nieliniowego charakteru układu równań gdyż wymagały wielokrotnego obliczania wartości nieliniowych funkcji w wybranych chwilach czasu na podstawie ich szeregów Fouriera oraz powtórnego obliczania współczynników szeregów Fouriera dla nowych wartości tych funkcji.

W niniejszej pracy opisano algorytm umożliwiający bezpośrednie obliczanie chwilowych wartości dwuokresowych przebiegów ustalonych w przypadkach, gdy należy rozwiązywać łącznie równania (1a) oraz (1b).

2. Sformułowanie problemu

Z punktu widzenia matematyki postawiony w pracy problem sprowadza się do poszukiwania rozwiązania układu nieliniowych równań różniczkowych o postaci

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

w którym $\mathbf{x}$ jest wektorem poszukiwanych rozwiązań, zawierającym zarówno zmienne elektryczne jak i mechaniczne, a $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem nieliniowych funkcji względem tych zmiennych. Rozwiązania ustalone dla maszyn elektrycznych prądu przemiennego można w większości przypadków przewidzieć w postaci szeregu Fouriera funkcji dwuokresowej

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{r,s} \mathrm{e}^{\mathrm{j}r\boldsymbol{\Omega}_m t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}s\boldsymbol{\Omega}_e t} \tag{3}$$

o dwóch niezależnych okresach bazowych: $\mathrm{T_m} = 2\pi/\Omega_\mathrm{m}$ - wynikającym z prędkości kątowej wirnika maszyny oraz $\mathrm{T_e} = 2\pi/\Omega_\mathrm{e}$ - wynikającym z okresowości napięć zasilających. Na użytek dalszych rozważań układ (2) należy sprowadzić do postaci

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{3}$$

aproksymując nieliniowe funkcje w wektorze $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ szeregami Taylora względem zmiennych wektora $\mathbf{x}$. W tym równaniu wektor $\mathbf{b}(t)$ musi być dwuokresową funkcją czasu aby rozwiązanie ustalone było dwuokresowe.

W celu utworzenia algorytmu wyznaczania rozwiązania ustalonego bezpośrednio w dziedzinie czasu zostanie zdefiniowany dyskretny operator różniczkowania funkcji dwuokresowej określający wartości jej pochodnej w wybranym zbiorze chwil czasowych na podstawie wartości funkcji w tym samym zbiorze chwil czasowych. Operator taki, działający bezpośrednio na chwilowych wartościach funkcji stanowiącej rozwiązanie układu (3), pozwoli zbudować algorytm iteracyjny prowadzący do poszukiwanego rozwiązania.

3. Określenie dyskretnego operatora różniczkowania funkcji dwuokresowej w dziedzinie czasu

Stosunkowo prosto można określić operator różniczkowania funkcji dwuokresowej w dziedzinie częstotliwości. Jeżeli założyć, ze poszukiwana funkcja dwuokresowa posiada pierwszą pochodną to zachodzi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_{r=\infty}^{\infty} \sum_{s=\infty}^{\infty} j(r\Omega_m + s\Omega_e) \quad \mathbf{X}_{r,s} \mathrm{e}^{jr\Omega_m t} \mathrm{e}^{js\Omega_e t} \tag{4}$$

Relację między współczynnikami szeregu Fouriera tej funkcji i jej pierwszej pochodnej można zapisać w postaci

$$\mathbf{X}' = \mathrm{j}\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{X} \tag{5}$$

W tym związku $\mathbf{X}'$ jest odpowiednio uporządkowanym hiper-wektorem współczynników Fouriera pochodnej funkcji dwuokresowej złożonym z wektorów $\mathbf{X}'_r$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{X}'_{-1} & \mathbf{X}'_0 & \mathbf{X}'_1 & \cdots \end{bmatrix}^T$$

z których każdy ma postać

$$\mathbf{X}'_r = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{X}'_{r,-1} & \mathbf{X}'_{r,0} & \mathbf{X}'_{r,1} & \cdots \end{bmatrix}^T.$$

Analogicznie $\mathbf{X}$ jest odpowiednio uporządkowanym hiper-wektorem współczynników Fouriera funkcji dwuokresowej złożonym z wektorów $\mathbf{X}_r$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{X}_{-1} & \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1 & \cdots \end{bmatrix}^T$$

z których każdy ma postać

$$\mathbf{X}_r = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{X}_{r,-1} & \mathbf{X}_{r,0} & \mathbf{X}_{r,1} & \cdots \end{bmatrix}^T.$$

Macierz $\boldsymbol{\Omega}$ jest dla funkcji dwuokresowej operatorem różniczkowania w dziedzinie częstotliwości i ma postać hiper-macierzy diagonalnej

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{-1} & \boldsymbol{\Omega}_0 & \boldsymbol{\Omega}_1 & \cdots \end{bmatrix}$$

w której poszczególne macierze $\boldsymbol{\Omega}_r$ są diagonalne i mają postaci

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \cdots & \Omega_{r,-1}\mathbf{E} & \Omega_{r,0}\mathbf{E} & \Omega_{r,1}\mathbf{E} & \cdots \end{bmatrix}.$$

gdzie $\Omega_{r,s} = r\Omega_m + s\Omega_e$ oraz $\mathbf{E}$ jest macierzą jednostkową.

Aby otrzymać operator różniczkowania w dziedzinie czasu należy powiązać współczynniki Fouriera funkcji dwuokresowej i jej pochodnej z ich wartościami. Można to zrobić jeżeli uwzględnić w szeregu (3) skończoną liczbę wyrazów $-\mathrm{R} \le r \le \mathrm{R}$ oraz $-\mathrm{S} \le s \le \mathrm{S}$. W tym celu przewidywane rozwiązanie (3) należy zapisać w postaci funkcji dwóch zmiennych [5]

$$\mathbf{x}_\mathrm{a}(\rho,\sigma) = \sum_{r=-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\sum_{s=-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} \mathbf{X}_{r,s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}r\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{j}s\sigma} \tag{6}$$

definiując $\rho = \Omega_m t$ oraz $\sigma = \Omega_e t$ jako niezależne zmienne. Taka funkcja jest okresowa dla każdej z tych zmiennych

$$\mathbf{x}_\mathrm{a}(\rho,\sigma) = \mathbf{x}_\mathrm{a}(\rho + 2\pi,\sigma)$$
$$\mathbf{x}_\mathrm{a}(\rho,\sigma) = \mathbf{x}_\mathrm{a}(\rho,\sigma + 2\pi)$$

Dla takiej funkcji określić można jednoznaczne związki między jej wartościami a współczynnikami szeregu (6) wybierając następujące zbiory punktów

$$\rho_k = k\,\alpha, \quad -\mathrm{R} \le k \le R, \quad \alpha = 2\pi/(2\mathrm{R}+1)$$
$$\sigma_l = l\,\beta, \quad -\mathrm{S} \le l \le S, \quad \beta = 2\pi/(2\mathrm{S}+1).$$

Po odpowiednim uporządkowaniu można je zapisać w postaci

$$\mathbf{x}_\mathrm{a} = \mathbf{T}\,\mathbf{X}_\mathrm{a} \tag{7}$$

W tym zapisie $\mathbf{x}_\mathrm{a}$ jest hiper-wektorem wartości funkcji (6) w punktach (ρ_k,σ_l), uporządkowanych zgodnie z poniższym zapisem. Wektor $\mathbf{x}_\mathrm{a}$ tworzy 2R+1 wektorów $\mathbf{x}_k^\mathrm{a}$

$$\mathbf{x}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{-\mathrm{R}}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{x}_{-1}^\mathrm{a} & \mathbf{x}_0^\mathrm{a} & \mathbf{x}_1^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{x}_\mathrm{R}^\mathrm{a} \end{bmatrix}^T$$

z których każdy ma postać

$$\mathbf{x}_k^\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k,-\mathrm{S}}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{x}_{k,-1}^\mathrm{a} & \mathbf{x}_{k,0}^\mathrm{a} & \mathbf{x}_{k,1}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{x}_{k,\mathrm{S}}^\mathrm{a} \end{bmatrix}^T$$

i zawiera wartości funkcji (6) w punktach (ρ_k,σ_l).

Wektor $\mathbf{X}_\mathrm{a}$ jest hiper-wektorem utworzonym ze współczynników szeregu (6) uporządkowanych analogicznie. Tworzy go 2R+1 wektorów $\mathbf{X}_k^\mathrm{a}$

$$\mathbf{X}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{-\mathrm{R}}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{X}_{-1}^\mathrm{a} & \mathbf{X}_0^\mathrm{a} & \mathbf{X}_1^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{X}_\mathrm{R}^\mathrm{a} \end{bmatrix}^T$$

z których każdy ma postać

$$\mathbf{X}_k^\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k,-\mathrm{S}}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{X}_{k,-1}^\mathrm{a} & \mathbf{X}_{k,0}^\mathrm{a} & \mathbf{X}_{k,1}^\mathrm{a} & \cdots & \mathbf{X}_{k,\mathrm{S}}^\mathrm{a} \end{bmatrix}^T$$

i zawiera współczynniki $\mathbf{X}_{k,l}^\mathrm{a}$ szeregu (6). Hiper-macierz $\mathbf{T}$ ma postać

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}^{\mathrm{R}^2}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{\mathrm{R}}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{-\mathrm{R}}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{-\mathrm{R}^2}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a}^{\mathrm{R}}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{1}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{-\mathrm{R}}\mathbf{B} \\ \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} \\ \mathrm{a}^{-\mathrm{R}}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{-1}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{1}\mathbf{B} & \cdots & \mathrm{a}^{\mathrm{R}}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a}^{-\mathrm{R}^2}\mathbf{B} & & \mathrm{a}^{-\mathrm{R}}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{0}\mathbf{B} & \mathrm{a}^{\mathrm{R}}\mathbf{B} & & \mathrm{a}^{\mathrm{R}^2}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b^{S^2} & \cdots & b^{S} & b^{0} & b^{-S} & \cdots & b^{-S^2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{S} & \cdots & b^{1} & b^{0} & b^{-1} & \cdots & b^{-S} \\ b^{0} & \cdots & b^{0} & b^{0} & b^{0} & \cdots & b^{0} \\ b^{-S} & \cdots & b^{-1} & b^{0} & b^{1} & \cdots & b^{S} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{-S^2} & & b^{-S} & b^{0} & b^{S} & & b^{S^2} \end{bmatrix},$$

$$b = e^{j\beta}$$

Macierze **B** są mnożone w macierzy $\mathbf{T}$ przez wersor $a = e^{j\alpha}$ w odpowiednich potęgach. Macierz $\mathbf{T}$ jest kwadratowa, ma wymiary [(2R+1)(2S+1)x(2R+1)(2S+1)]. Można wykazać że jest unitarna i spełnia warunek

$$\mathbf{T}\,(\overset{*}{\mathbf{T}}{}^{T}) = (2R+1)(2S+1)\,\mathbf{E}$$

gdzie przez **E** oznaczono macierz jednostkową o stosownych wymiarach. Macierz odwrotna ma więc postać

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{(2R+1)(2S+1)}\,(\overset{*}{\mathbf{T}}{}^{T})$$

Pozwala to zapisać związek między współczynnikami szeregu Fouriera (6) oraz wartościami funkcji $x_a(\rho,\sigma)$ w punktach (ρ_k,σ_l) w postaci

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{x}_a \qquad (8)$$

Związki (7) oraz (8) pozwalają zdefiniować dyskretny operator różniczkowania w dziedzinie czasu w oparciu o operator (5) w dziedzinie częstotliwości, ograniczony do rozmiarów wynikających z (6). W tym celu należy wykonać operacje przedstawione w poniższym równaniu

$$\mathbf{T}\,\mathbf{X}'_a = j\,(\mathbf{T}\,\mathbf{\Omega}_a\mathbf{T}^{-1})\,(\mathbf{T}\,\mathbf{X}_a)$$

Prowadzi to do relacji między wartościami pochodnej funkcji (6) oraz jej wartościami w zbiorze punktów (ρ_k,σ_l)

$$\mathbf{x}'_a = \mathbf{D}\,\mathbf{x}_a \qquad (9)$$

Macierz $\mathbf{D}$ jest poszukiwanym dyskretnym operatorem różniczkowania funkcji dwuokresowej

$$\mathbf{D} = j\,\mathbf{T}\,\mathbf{\Omega}_a\mathbf{T}^{-1} \qquad (10)$$

Operator ten zostanie wykorzystany do utworzenia algorytmu wyznaczania ustalonych rozwiązań dwuokresowych układu nieliniowych równań różniczkowych (3).

3. Określanie ustalonych rozwiązań dwu-okresowych w dziedzinie czasu dla równań maszyn prądu przemiennego

W celu utworzenia równań algebraicznych określających dwuokresowe rozwiązanie ustalone bezpośrednio w dziedzinie czasu należy zastąpić pochodną czasową po lewej stornie równania (3) dyskretnym operatorem różniczkowania (10), a funkcje prawej strony ich wartościami w punktach (ρ_k,σ_l), uporządkowane tak jak w wektorze poszukiwanych wartości rozwiązania. Prowadzi to do układu równań algebraicznych o ogólnej postaci

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}_a = \mathbf{A}(\mathbf{x}_a)\,\mathbf{x}_a + \mathbf{b}_a \qquad (11)$$

w którym diagonala hiper-macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_a)$ jest utworzona z wartości macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ z (3) w zbiorze punktów (ρ_k,σ_l), uporządkowanych jak w wektorze $\mathbf{x}_a$. Tworzą ją macierze $\mathbf{A}_k$

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{-R} & \cdots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_R\end{bmatrix}$$

z których każda ma postać

$$\mathbf{A}_k = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{k,-S} & \cdots & \mathbf{A}_{k,-1} & \mathbf{A}_{k,0} & \mathbf{A}_{k,1} & \cdots & \mathbf{A}_{k,S}\end{bmatrix}$$

gdzie $\mathbf{A}_{k,l}$ są to wartości macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ w punkcie (ρ_k,σ_l). Wektor $\mathbf{b}_a$ jest tworzony na podstawie wektora $\mathbf{b}(t)$ analogicznie jak $\mathbf{x}_a$.

Macierz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_a)$ zależy od wartości rozwiązania, co symbolicznie zaznaczono, więc układ równań (11) musi być rozwiązywany interacyjnie

$$\mathbf{x}_a^{i+1} = \left(\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_a^{i})\right)^{-1}\mathbf{b}_a \qquad (12)$$

Dyskretny operator różniczkowania może być zastosowany bezpośrednio do równań maszyny w postaci (1a,b), gdyż ich sprowadzenie do postaci (3) w pewnych przypadkach może być kłopotliwe. Dla przykładu, gdy należy rozwiązać jedynie równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}(\mathbf{i},t)\,\mathbf{i}\right) + \mathbf{R}\,\mathbf{i} = \mathbf{u}(t) \qquad (13)$$

odpowiadające przypadkowi gdy ruch obrotowy jest określony lecz uwzględniana jest nieliniowość obwodu magnetycznego oraz rzeczywiste zależności indukcyjności własnych i wzajemnych od kąta obrotu, równanie odpowiadające (12) ma

$$\left(\mathbf{D}\,\mathbf{L}(\mathbf{i}_a^{i}) + \mathbf{R}\right)\mathbf{i}_a^{i+1} = \mathbf{u}_a \qquad (14)$$

Macierze w tym równaniu są utworzone na zasadach opisanych dla równań (12).

W przypadku gdy zachodzi konieczność rozwiązywania równań (1a,b) łącznie należy im nadać postać

$$\mathbf{A}_2 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{A}_1(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\right) + \mathbf{A}_0\,\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \qquad (15)$$

Odpowiadające mu równanie określające wartości chwilowe rozwiązań w punktach (ρ_k, σ_l) ma postać

$$\left(\mathbf{A}_2\,\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}\,\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_a^i) + \mathbf{A}_0\right)\mathbf{x}_a^{i+1} = \mathbf{b}_a \qquad (16)$$

Wszystkie macierze i wektory w tym równaniu są tworzone analogicznie jak w (12).

Równania (12), (14) i (16) wyznaczają wartości rozwiązań w wybranym zbiorze punktów (ρ_k, σ_l) w obszarze

$$-\pi \le \rho_k \le \pi \qquad -\pi \le \sigma_k \le \pi \qquad (17)$$

W celu określenia rozwiązania w dowolnej chwili czasu z przedziału $t \in \{\infty, \infty\}$ należy obliczyć wartości zmiennych pomocniczych (ρ_t, σ_t) dla tej chwili czasowej, zlokalizować ten punkt w obszarze (17), a następnie aproksymować wartość rozwiązania w chwili '*t*' na podstawie wartości w najbliższych punktach (ρ_k, σ_l).

6. Wnioski

W pracy wyprowadzono równania umożliwiające bezpośrednie obliczanie wartości chwilowych ustalonych rozwiązań dwuokresowych dla nieliniowych równań maszyn prądu przemiennego. Mają one postać układów nieliniowych równań algebraicznych i eliminują potrzebę posługiwania się szeregami Fouriera. Istotnym elementem tych układów jest dyskretny operator różniczkowania funkcji dwuokresowej, który jest kluczowym elementem prezentowanego w pracy sposobu określania ustalonego rozwiązania niepowtarzalnego w skończonym przedziale czasu.

7. Literatura

[1] Boyce W.E., DiPrima R.C.: *Elementary Differential equations*, John Wiley & Sons, New York, 1969.

[2] Demidowicz B.P.: *Matematyczna teoria stabilności*,WNT, Warszawa, 1972.

[3] Sobczyk T.: *A reinterpretation of the Floquet solution of the ordinary differential equation system with periodic coefficients as a problem of infinite matrix*, Compel, Vol.5, No.1, Dublin, Boole Press Ltd, 1986, pp.(1-22).

[4] Burden R.L., Faires J.D.: *Numerical analysis*, PWS-KENT Pub. Comp., Boston, 1985.

[5] Sobczyk T.: *Direct determination of two-periodic solution for nonlinear dynamic systems*, Compel, James & James Science Pub. Ltd., 1994, Vol.13, No.3, pp. (509-529).

[6] Sobczyk T.J., Radzik M.: *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach synchronicznych z uwzględnieniem równania ruchu metodą bilansu harmonicznych*, Maszyny Elektryczne, Wyd. BOBRME-KOMEL, Zeszyty Problemowe Nr. 83, 2009, str. 83-88.

[7] Sobczyk T. J., Radzik M.: *Numeryczny test zbieżności algorytmu bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Vol.107, 2010, Z.1-E/2010, pp. 87-97.

[8] Radzik M., Sobczyk T.J.: *Steady-state analysis of synchronous machines loaded by an angle depended torque*, Przegląd Elektrotechniczny, Wyd. Sigma NOT, Vol. 89, 2013/2b, pp.158-161.

[8] Sobczyk T.: *Bezpośrednie wyznaczanie w dziedzinie czasu okresowych rozwiązań ustalonych dla równań różniczkowych*, Materiały Konferencji PTETiS "Wybrane Zagadnienia Elektrotechniki i Elektroniki", Rzeszów-Czarna, 2013, CD.

[9] Radzik M., Sobczyk T.J.: *Bezpośrednie wyznaczanie rozwiązań okresowych dla przetworników elektromechanicznych w dziedzinie czasu*, Zeszyty Problemowe - Maszyny Elektryczne, Wyd. Instytut Maszyn i Napędów Elektrycznych, (KOMEL), Nr. 103, 3/2014, str.223-228.

Autor

Tadeusz J. Sobczyk, Prof. dr hab. inż.
Politechnika Krakowska,
Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii,
Katedra Diagnostyki Maszyn Elektrycznych,
Kraków, 31-155, ul. Warszawska 24,
tadeusz.sobczyk@pk.edu.pl