

THE JOURNAL BIULETYN OF POLISH SOCIETY

FOR GEOMETRY AND ENGINEERING GRAPHICS



POLSKIEGO TOWARZYSTWA
GEOMETRII I GRAFIKI INŻYNIERSKIEJ

VOLUME 31 / DECEMBER 2018

**THE JOURNAL
OF POLISH SOCIETY
FOR GEOMETRY AND
ENGINEERING GRAPHICS**

VOLUME 31

Gliwice, December 2018

Editorial Board

International Scientific Committee

Anna BŁACH, Ted BRANOFF (USA), Modris DOBELIS (Latvia),
Bogusław JANUSZEWSKI, Natalia KAYGORODTSEVA (Russia),
Cornelie LEOPOLD (Germany), Vsevolod Y. MIKHAILENKO (Ukraine), Jarosław MIRSKI,
Vidmantas NENORTA (Lithuania), Pavel PECH (Czech Republic), Stefan PRZEWŁOCKI,
Leonid SHABEKA (Belarus), Daniela VELICHOVÁ (Slovakia), Krzysztof WITCZYŃSKI

Editor-in-Chief

Edwin KOŹNIEWSKI

Associate Editors

Renata GÓRSKA, Maciej PIEKARSKI, Krzysztof T. TYTKOWSKI

Secretary

Monika SROKA-BIZOŃ

Executive Editors

Danuta BOMBIK (vol. 1-18), Krzysztof T. TYTKOWSKI (vol. 19-31)

English Language Editor

Barbara SKARKA

Marian PALEJ – PTGiGI founder, initiator and the Editor-in-Chief of BIULETYN between 1996-2001

All the papers in this journal have been reviewed

Editorial office address:

44-100 Gliwice, ul. Krzywoustego 7, POLAND
phone: (+48 32) 237 26 58

Bank account of PTGiGI : Lukas Bank 94 1940 1076 3058 1799 0000 0000

ISSN 1644 - 9363

Publication date: December 2018 Circulation: 100 issues.

Retail price: 15 PLN (4 EU)

CONTENTS**PART I: THEORY (TEORIA)**

- 1 A. Borowska: APPROXIMATION OF THE SPHEROID OFFSET SURFACE AND THE TORUS OFFSET SURFACE 3

PART II: GRAPHICS EDUCATION (DYDAKTYKA)

- 1 K. Banaszak: CONIC SECTIONS IN AXONOMETRIC PROJECTION 11
- 2 B. Kotarska-Lewandowska: BETWEEN DESCRIPTIVE GEOMETRY AND CAD 3D 15
- 3 C. Łapińska, A. Ogorzałek: CHARACTERISTIC POINTS OF CONICS IN THE NET-LIKE METHOD OF CONSTRUCTION 21
- 4 O. Nikitenko, I. Kernytskyy, A. Kalinin, V. Dumanskaja: DESCRIPTIVE GEOMETRY COURSE ADDRESSED TO THE CIVIL ENGINEERING STUDENTS AT ODESSA STATE ACADEMY 29
- 5 F. N. Pritykin, N. V. Kaygorodtseva, M. N. Odinets, I.V. Krysova: ROBOTICS AS MOTIVATION OF LEARNING TO GEOMETRY AND GRAPHICS 35

PART III: APPLICATIONS (ZASTOSOWANIA)

- 1 A. Borowska: APPROXIMATION OF THE ELLIPSE OFFSET CURVES IN TURBO ROUNDABOUTS DESIGN 43
- 2 A. Borowska: APPROXIMATION OF THE OFFSET CURVES IN THE FORMATION OF TURBO ROUNDABOUTS 53
- 3 O. Nikitenko, I. Kernytskyy: GEOMETRIC MODELLING OF CONJUGATE RULED SURFACES WITH USING THE KINEMATIC SCREW DIAGRAM 61
- 4 K. Panchuk, E. Lyubchinov SPATIAL CYCLOGRAPHIC MODELING ON NAUMOVICH HYPERDRAWING 69

PART IV: HISTORY OF DESCRIPTIVE GEOMETRY (HISTORIA GEOMETRII WYKREŚLNEJ)

- 1 . E. Koźniewski: WYBRANE KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE W SŁOWNIKU WYRAZÓW TECHNICZNYCH TYCZĄCYCH SIĘ BUDOWNICTWA TEOFILA ŻEBRAWSKIEGO 79

PART V: INFORMATION AND NEWS (WYDARZENIA I INFORMACJE)

- 1 REVIEWERS 2018 14

WYBRANE KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE W SŁOWNIKU WYRAZÓW TECHNICZNYCH TYCZĄCYCH SIĘ BUDOWNICTWA TEOFILA ŻEBRAWSKIEGO¹

Edwin KOŹNIEWSKI

Białystok University of Technology, Faculty of Civil and Environmental Engineering,
ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok, POLAND
e-mail: e.kozniewski@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedmiotem analizy autora niniejszej pracy są pojęcia i konstrukcje geometryczne krzywych mających zastosowanie w budownictwie Teofila Żebrowskiego, zamieszczone w opublikowanym w roku 1883 Słowniku [8]. Szczegółowym celem niniejszego rozdziału jest sprawdzenie poprawności konstrukcji, czyli udowodnienie ich poprawności oraz wskazanie zastosowań, o których Żebrowski nie wspomina. Zakres opracowania obejmuje omówienie 15. rysunków Słownika Żebrowskiego.

Słowa kluczowe: cykloida, kabłąk, kassynida, obłącznica, obłączystość, łańcuchówka, wstawa, dostawa, dostyczna, dosieczna

1 Wstęp

W „*Gazecie Polskiej*” z 1880 roku (nr 142) pojawił się następujący anons pióra wielkiego polskiego pisarza, laureata nagrody Nobla, Henryka Sienkiewicza: „*Dotychczas mieliśmy tylko jeden słownik wyrazów polskich w budownictwie używanych, ułożony przez Podczaszyńskiego w Warszawie w roku 1839. Książka ta, jakkolwiek szacowna, nie zawiera jednak wielu wyrazów tak dawniejszych, jak i stworzonych później, natomiast, ponieważ sama powstała w czasach manii kucia nowych wyrazów, objęła wiele prawdziwych dziwolałów językowych tworzonych na sposób Trentowskiego. Skutkiem powyższych przyczyn dawał i daje się czuć wielki brak dobrego słownika, odpowiadającego dzisiejszym wymaganiom. Brakowi temu zapobiegł dr Teofil Żebrowski, ułożywszy kompletny słownik, który wyjdzie w listopadzie w Krakowie rb. Pan Żebrowski, niegdy nauczyciel w Szkole Kwatermistrzostwa w Warszawie, następnie naczelnik komunikacji lądowych w Rządowej Krakowskiej, obecnie zaś członek Akademii Umiejętności i profesor Wszechnicy Jagiellońskiej, posiada wszelkie dane do stworzenia w zakresie, jaki wybrał, dzieła prawdziwie znakomitego. Dotychczasowe prace jego podtrzymują nas tylko w naszym mniemaniu. Pożądanym wielce przez wszystkich słownik ma wyjść na wzór znakomitego w naukowym świecie «*Illustriertes Bau-Lexicon*», z którego to dzieła przeniesione będą także do polskiej książki rysunki techniczne najrozmaitszych wzorów budownictwa w liczbie 250. Przy wyrazach polskich mają być dodawane odpowiednie terminy zagraniczne. Całkowite dzieło ma objąć 50 arkuszy druku. Przedpłata zaś na nie wynosi tylko 5 złr za egzemplarz. Po 15 sierpnia cena ma być podniesiona. Zamówienia przyjmuje się w Krakowie przy ulicy Grodzkiej Nr. 117, w redakcji Słownika.*”

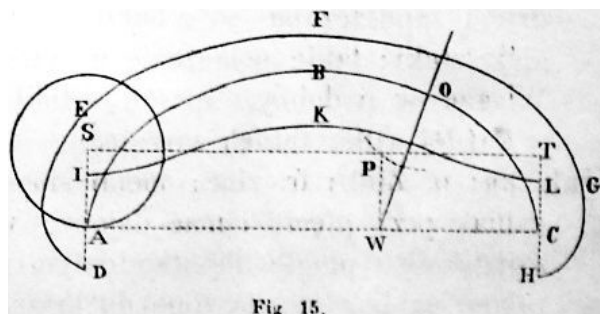
¹ W stulecie odzyskania niepodległości przez Polskę opublikowano niniejszy artykuł w języku polskim ze względu na znaczenie ojczystej terminologii naukowej zawartej w omawianym Słowniku Teofila Żebrowskiego (1800–1887) – znakomitego polskiego uczonego, erudyty i patrioty.

2 Uwagi o geometryczno-matematycznych rysunkach Żebrowskiego

W bogatej spuściznie po Teofilu Żebrowskim zachowały się rysunki jego autorstwa. Duża część z nich została opublikowana w książkach, których był autorem. Rysunki zamieszczone w *Słowniku* charakteryzują się oszczędnością treści (tj. linii) i zwięzłością przekazu tekstowego geometrycznych algorytmów tych konstrukcji. Interesującym jest zatem, jakie byłyby (mogły być w źródłach, z których czerpał Żebrowski) uzasadnienia do poszczególnych konstrukcji.

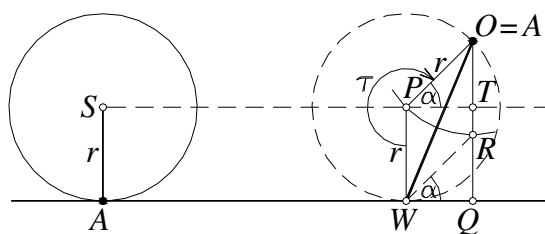
3 Charakterystyka ilustracji w Słowniku

Pierwszym spośród analizowanych w *Słowniku* rysunków jest konstrukcja normalnej do cykloidy [1] w zadanym punkcie (rys. 1), nazywanej wówczas „węgielną” [8, fig. 15, s. 45]. Pisząc o cykloidzie autor zwraca uwagę na zastosowanie jej w projektowaniu przekładni kół zębatych w maszynach, ale także dodaje, że krzywa ta może być wykorzystana (ściśle w budownictwie) do kreowania kształtu łuków ościeży, wówczas nazywanych *oblącznicami* [8, s. 46].



Rys. 1: Rysunek opisujący konstrukcję normalnej do cykloidy w punkcie O [8, fig. 15, s. 45]

Figure 1: A drawing describing the construction of the normal line to a cycloid at the point [8, fig. 15, s. 45]



Rys. 2: Ilustracja do analizy geometrycznej konstrukcji normalnej do cykloidy w punkcie O (*opr. własne*)

Figure 2: An illustration for the geometrical analysis of normal line to a cycloid at the point O (*own work*)

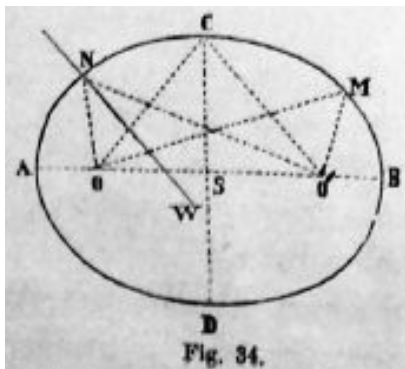
Niezwykle prosta konstrukcja normalnej w wybranym na okręgu punkcie O polega na skonstruowaniu okręgu o środku w tym punkcie i promieniu r oraz znalezieniu punktu wspólnego P z prostą poziomą ST przechodzącą przez środek S okręgu tworzącego cykloidę. Prosta pionowa przechodząca przez punkt P na prostej AQ toczenia się okręgu wyznacza punkt W , który po połączeniu z punktem O daje prostą normalną OW do cykloidy.

Uzasadnienie poprawności prostej konstrukcji normalnej do cykloidy można uzyskać posługując się opisem parametrycznym cykloidy (rys. 2):

$$\begin{cases} x = r(\tau - \sin \tau) \\ y = r(1 - \cos \tau) \end{cases}, \tau \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

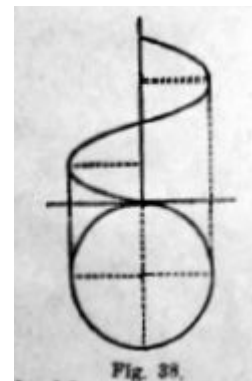
Wektor normalny w dowolnym punkcie dla parametru $\tau \neq 2k\pi$, $k=0,1,2,\dots$ ma, jak wiadomo z geometrii różniczkowej, współrzędne $[-r\sin \tau, r(1-\cos \tau)]$. Wystarczy więc pokazać, że $WQ = lr\sin \tau$ i $OQ = lr(1-\cos \tau)$. Druga z nierówności jest natychmiast widoczna z postaci drugiego z równań (1), mianowicie $QR = -r\cos \tau$. Równocześnie widać, że $OS = lr\cos \tau$. Wtedy $l\sin \alpha = l\cos \tau$, zatem $l\cos \alpha = l\sin \tau$. Stąd $lr\cos \alpha = lr\sin \tau$. Ale $lr\cos \alpha = WQ$, czyli rzeczywiście $WQ = lr\sin \tau$. Konstrukcja Żebrowskiego jest prosta i zgrabna. Oczywiście, z naciskiem należy zauważyć, że sama konstrukcja cykloidy wymaga umiejętności „prostowania okręgu”, czyli np. konstrukcji Kochańskiego, którą to konstrukcję Żebrowski bardzo dobrze znał, choćby jako autor pracy o Adamie Kochańskim [7].

Ważną krzywą w zastosowaniach budowlanych jest *elipsa*. Żebrawski w *Słowniku* prezentuje elipsę jako krzywą określoną za pomocą sumy promieni wodzących, tj. krzywą spełniającą warunek $r_1+r_2=2a$ (rys. 3) [8, fig. 34, s. 70]. W budownictwie promuje ją, poprzez elipsoidę, jako sklepienie dające ciekawą własność akustyczną (własność skupiania fal dźwiękowych). Z pewnością zna własności akustyczne sklepienia komnaty w zamku Lubomirskich w Starym Wiśniczu, chociaż o tym ze zrozumiałych względów (szczupłość miejsca na poszczególne hasła *Słownika*) nie wspomina.



Rys. 3: Elipsa oraz konstrukcja normalnej do elipsy w punkcie N [8, fig. 34, s. 70]

Figure 3: An ellipse and the construction of the normal to an ellipse at the point N [8, fig. 34, s. 70]



Rys. 4: Rzuty linii spiralnej (helisy) [8, fig. 38, s. 96]

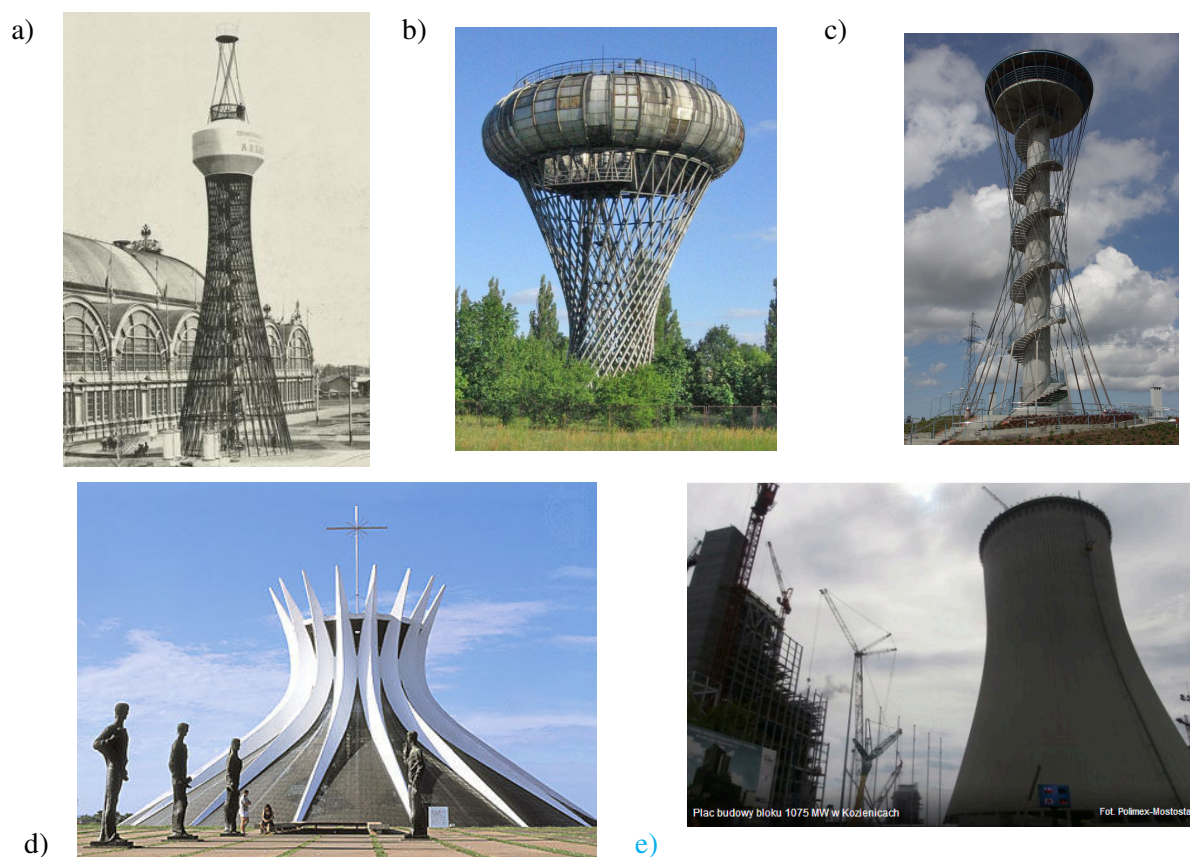
Figure 4: The horizontal and vertical projection of the spiral line (helix) [8, fig. 38, s. 96]

W następnym haśle *Słownika* pojawia się *elipsoida*. W kształtowaniu sklepienia ważną rolę odgrywa położenie normalnej (węgielnej) elipsy jako przekroju, w tekście opisany jest więc sposób jej wyznaczenia. Mamy tu znaną, łatwą do wykonania (nie wymagającą dodatkowego komentarza), konstrukcję normalnej (rys. 3). Żebrawski zapisuje też elipsę, o danych półosiach, za pomocą równania kanonicznego: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

W *Słowniku* nie mogło zabraknąć skośnej krzywej trójwymiarowej – *linii śrubowej* (*helisy*), zwanej przez autora „krzywą podwójnie krzywą”, otrzymaną w wyniku ruchu punktu, będącego złożeniem ruchu obrotowego z prostoliniowym jednostajnym. W *Słowniku* krzywą tę przedstawiono w dwóch rzutach prostokątnych [8, il. 38, s. 96], z zaznaczeniem, że rzut pionowy linii śrubowej jest sinusoidą, zaś poziomy – okręgiem (rys. 4). Następne hasło dotyczy *helikoidy*, powierzchni opisanej również w sposób mechaniczny – za pomocą złożenia ruchów obrotowego i jednostajnie prostoliniowego prostej nachylonej pod jednakowym kątem do osi obrotu. Autor nie wiąże pojęcia linii śrubowej z helikoidą. Nie mówi, że jest to powierzchnia prostokreślna, aczkolwiek zaznacza, że należy ona do rodziny (określając: *rzędu*) wichrowatych. Helikoidę Żebrawski wiąże jednoznacznie, co jest niemal oczywiste, ze schodami kręconymi (w *Słowniku* nazywane *krętymi*) podkreślając zastosowanie tego pojęcia w budownictwie [8, s. 97].

W *Słowniku* znajdujemy geometryczną, ogniskową definicję *hiperboli*, jako zbioru punktów, dla których różnica odległości od dwóch danych (czyli: ognisk) jest stała. [8, il. 39, s. 98]. Żebrawski podaje inną, niż obowiązująca obecnie, definicję mimośrodu hiperboli. Podaje bowiem, że jest to odległość ognisk, a nie jak obecnie przyjmuje się: stosunek odległości pomiędzy ogniskami a wierzchołkami rzeczywistymi. Zapisuje kanoniczne równanie hiperboli. Mówiąc w następnym haśle o hiperboloidzie podkreśla jej liniowo-wichrowaty charakter, tzn., że jest to powierzchnia prostokreślna. Nic dziwnego, że nie mówi nic o zastosowaniach hiperboloidy w budownictwie, wszak dopiero w 1896 roku pojawia się pierwsza budowla projektu V. Shukhova. Jest to wieża ciśnień w Niżnym

Nowogrodzie (rys. 5a) o konstrukcji nośnej w kształcie hiperboloidy. Obecnie hiperboloidę spotykamy w konstrukcjach chłodni kominowych, wież widokowych, brył świątyń [5, il. 9.14, s. 298] (rys. 5d).



Rys. 5: Wieże: a) ciśnien (pierwsza w świecie w kształcie hiperboloidy) w Niżnym Nowogrodzie (1896, Rosja) wg projektu Vladimira Shukhova; b) w Ciechanowie (1972) wg projektu Jerzego Michała Bogusławskiego; c) widokowa w Gniewinie (2006); d) katedra wg projektu Oscara Niemeyera (1970, Brazylia); e) największa w Europie chłodnia kominowa w Kozienicach (2015)

Figure 5: Towers: a) Water Tower (the world's first hyperboloid) in Nizhny Novgorod, (1896, Russia) by Vladimir Shukhov; b) Water Tower in Ciechanów (1972) by Jerzy Michał Bogusławski; c) Observation Tower in Gniewino (2006); d) A cathedral (1970) in Brasilia by Oscar Niemeyer; e) Europe's largest Cooling Tower in Kozienice (2015)

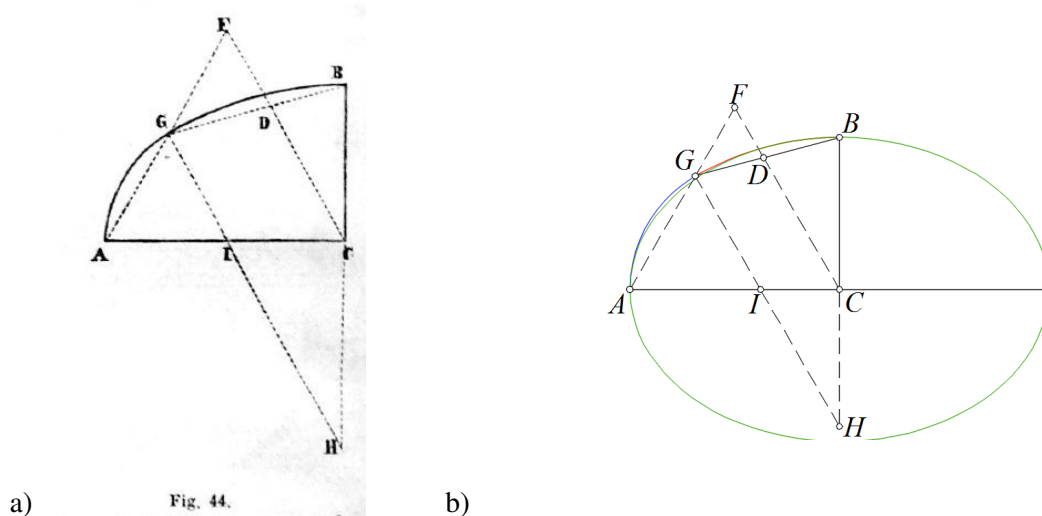
Źródło/Source: a) & d)[5, fig. 9.14, s. 298]; b) [12]; c) [11]; e) [10]

Kabłąk [8, il. 44, s. 107] jest sklejeniem dwóch łuków okręgów w ten sposób, że środki tych okręgów wraz z punktem połączenia łuków są współliniowe. Zapewnia to gładkość krzywej (tj. istnienie stycznej w punkcie połączenia, która jak wiadomo musi być prostopadła do promienia). Kształtem kabłąka przypomina elipsę, jak zauważa autor *Słownika*. Algorytm konstrukcji kabłąka jest następujący. Przy danych półosiach AC i CB szukanego kabłąka:

- 1) konstruujemy trójkąt równoboczny ACF , następnie
- 2) konstruujemy okrąg $o(C, CB)$ o środku C i promieniu CB ;
- 3) znajdujemy punkt wspólny D odcinka CF z okręgiem $o(C, CB)$;
- 4) prowadzimy prostą BD i jeśli prosta BD przecina odcinek AF , to punkt przecięcia G jest punktem połączenia dwóch łuków, które konstruujemy jak następuje;

5) przez punkt G prowadzimy prostą równoległą do odcinka CF , która przecina wówczas odcinek AC w punkcie I i prostą BC w punkcie H ; punkty I oraz H są środkami łuków stanowiących kabląk AGB .

Omawiając kabląk Żebrawski podkreśla użyteczność tej krzywej w kształtowaniu sklepień [8, s. 107] i jej podobieństwo do elipsy. Nie wspomina jednak nic o dwu ważnych sprawach: o wykonalności konstrukcji oraz nic nie mówi o dokładności aproksymacji elipsy. Nie podaje także wskazań praktycznych co do stosunku długości wyjściowych półosi AC i CB kabląka, jak czyni to np. w przypadku krzywej Cassiniego [8, s. 96]. A tu uwaga taka byłaby pożyteczna. Kwestię dokładności aproksymacji pominiemy pozostawiając jako oddzielny temat do rozstrzygnięcia, zaś wykonalność przedyskutujemy poniżej. Zastosujemy metodę analityczną (rys. 6b).



Rys. 6: Kabłąk: a) rysunek opisujący konstrukcję krzywej o półosiach AC i BC [8, fig. 44, s. 44]; b) o stosunku osi $AC:BC=0,727273\dots$ wraz z odpowiednią elipsą (*opr. własne*)

Figure 6: A bow: a) a drawing describing an bow with axes AC i BC and its construction; b) the bow with axes ratio $BC/AC=0,727273\dots$ together with the corresponding ellipse a) [8, fig. 44, s. 44]; b) (*own work*)

Niech punkt C będzie początkiem prostokątnego układu współrzędnych, gdzie punkt A leży na ujemnej części osi odciętych, zaś punkt B leży na dodatniej części osi rzędnych. Zapiszmy równanie okręgu $o(C, CB)$.

$$x^2 + y^2 = CB^2 (=r^2). \quad (2)$$

oraz równanie prostej CF

$$y = -\sqrt{3}x. \quad (3)$$

Wówczas współrzędne $x = -\frac{1}{2}r$, $y = r\frac{\sqrt{3}}{2}$ punktu D znajdujemy rozwiązując układ równań

(2), (3). Nie zmniejszając ogólności przyjmijmy, że punkt A ma współrzędne $(-1; 0)$.

Prezentowana w *Słowniku* konstrukcja ma sens, gdy punkt G jest punktem odcinka AF . Dokonajmy analizy granicznych położań punktu G . Zauważmy, że $G=A$, gdy punkty $B=(0, r)$,

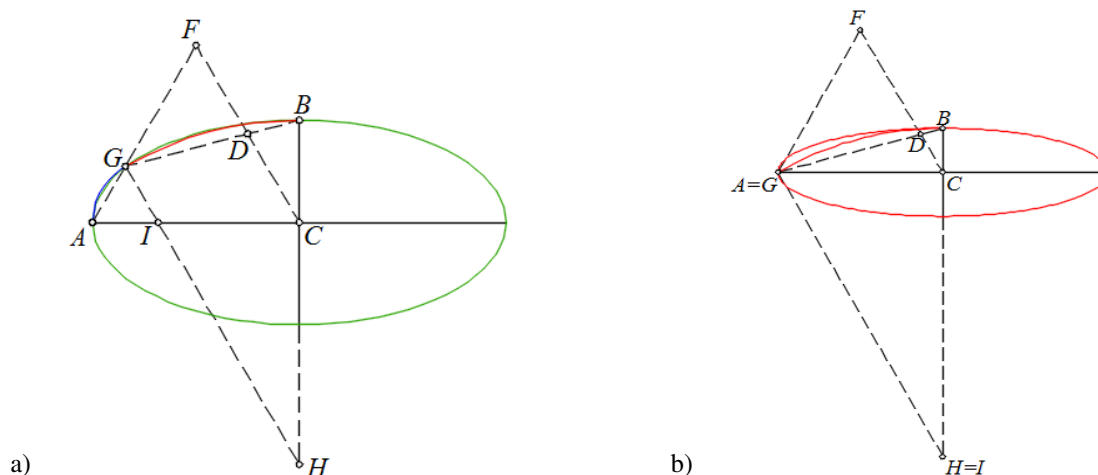
$D=(-\frac{1}{2}r, r\frac{\sqrt{3}}{2})$, $A=(-1,0)$ są współliniowe. Ma to miejsce wówczas, gdy $r=2-\sqrt{3}$, tzn. gdy

$BC:AC = 2-\sqrt{3} (=0,267949)$. Jest to graniczne położenie punktu G . Wówczas $A=G$ oraz $H=I$.

Drugie graniczne położenie punktu G jest gdy $G=F$, tzn. jeśli $AC=CB$. W pierwszym przypadku kabląk jest jednym łukiem okręgu $o(H, HB)$, w drugim – ćwiartką okręgu $o(C, CB)$. Zatem, by konstrukcja kabląka była wykonalna musi zachodzić nierówność.

$$2 - \sqrt{3} \leq \frac{BC}{AC} \leq 1. \quad (4)$$

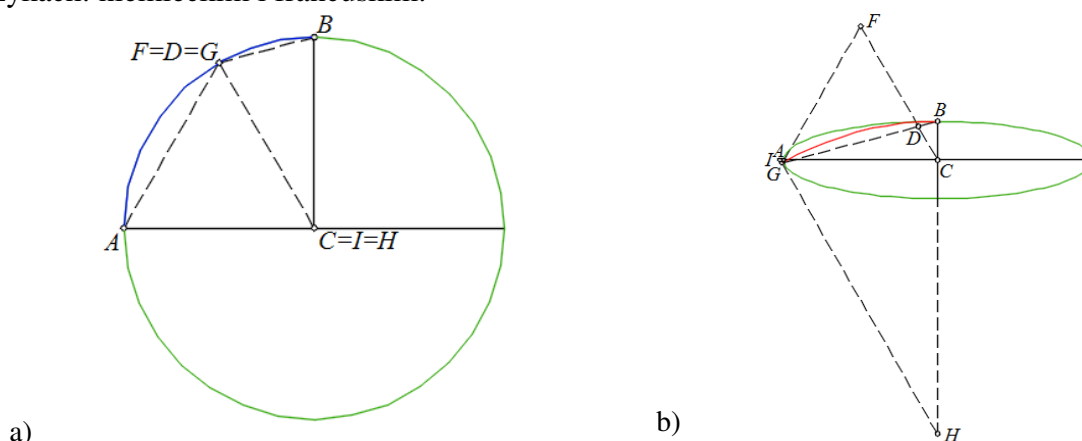
Na rys. 6b mamy konstrukcję kabłąka dla $BC:AC = 0,727273\dots$; na rys. 7a dla $BC:AC = 0,5$; na rys. 7b dla $BC:AC = 2 - \sqrt{3} (=0,267949)$, czyli pierwsze położenie graniczne; na rys. 8a dla $BC:AC = 1$, czyli drugie położenie graniczne oraz na rys. 8b $BC:AC = 0,25$ (poza zakresem) – przypadek, w którym konstrukcja kabłąka nie jest możliwa.



Rys. 7: Kabłąk o stosunku osi: a) $BC:AC = 0,5$; b) $BC:AC = 2 - \sqrt{3} (=0,267949\dots)$ – położenie graniczne – jest to łuk jednego okręgu o środku ($H=I$), wyraźnie kształtem odbiegający od elipsy (*opr. własne*)

Figure 7: The bow with the axes ratio: a) $AC:BC = 0,5$; b) $BC:AC = 2 - \sqrt{3} (=0,267949\dots)$ – the limit position of the point G ($A=G$) – this is the arc of one circle with the center ($H=I$). Definitely a form that differs from the ellipse (*own work*)

Omawiając kabłąk autor *Słownika* wskazuje na użyteczność tej krzywej w budownictwie jako *oblączystość wewnętrzną sklepień*. Tę oblączystość u Żenczykowskiego znajdujemy jako „podniebienie” sklepienia, zaś samą krzywą autor nazywa *krzywą koszową* [9, rys. 7-5, s. 340-341]. Tę ostatnią nazwę pośrednio sam autor *Słownika* przytacza, podając nazwy w językach: niemieckim i francuskim.



Rys. 8: Kabłąk: a) o stosunku osi $BC:AC = 1$, czyli okrąg; b) o stosunku osi $BC:AC = 0,25$, $0,25 < 2 - \sqrt{3}$ – położenie graniczne – jest to łuk jednego okręgu o środku ($H=I$), wyraźnie kształtem odbiegający od elipsy (*opr. własne*)

Figure 8: The bow: a) with the axes ratio $BC:AC = 1$, that is a circle; b) with the axes ratio $BC:AC = 2 - \sqrt{3} (=0,267949)$ – the limit position of the point G ($A=G$) – this is the arc of one circle with the center ($H=I$). Definitely a form that differs from the ellipse, out of range (*own work*)

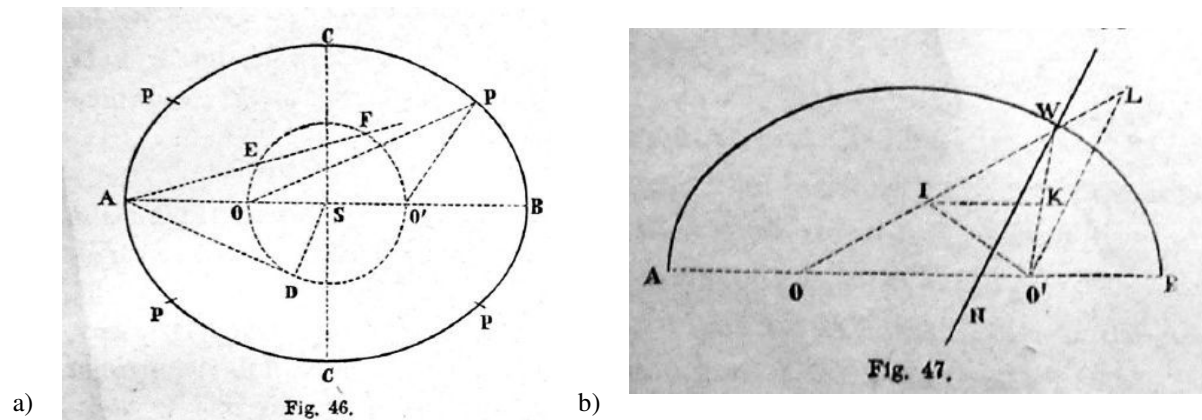
Kassynida, kolejna krzywa omawiana w *Słowniku* znana jest także w literaturze jako owal Cassini'ego [1, s. 106-107]. Owal Cassini'ego otrzymuje się jako przekrój torusa. Żebrawski podaje czytelną definicję i, tym samym, efektywną konstrukcję owalu [8, fig. 38, s.96]. Krzywa Cassiniego jest bowiem zbiorem punktów na płaszczyźnie o tej własności, że iloczyn odległości dowolnego punktu tej krzywej od dwóch danych punktów jest stały. Owal będzie określony, jeżeli przyjmiemy dwa punkty O, O' oraz symetryczne względem środka odcinka OO' punkty A, B , takie że $SO < SA$. Jeżeli $SO = SO' = r$ i $SA = SB = a$, to dowolny punkt P krzywej spełnia warunek

$$PO \cdot PO' = a^2 - r^2. \quad (5)$$

Konstrukcja geometryczna opiera się na własności tzw. potęgi punktu względem okręgu. Krzywą Cassiniego konstruujemy wtedy punkt po punkcie. Równie prostą, frapującą, konstrukcją węgielnej, czyli normalnej, do owalu Cassiniego podaje Żebrawski wykorzystując dwukrotnie twierdzenie Talesa. Po skonstruowaniu dowolnego punktu W owalu otrzymamy w prosty sposób od razu prostą normalną [8, fig. 47, s. 96]. Na odcinku OW odkładamy odcinek $WI = WO'$; przez punkt I prowadzimy prostą równoległą do AB i na odcinku WO' znajdujemy punkt K ; na prostej OW odkładamy z punktu W odcinek WK i znajdujemy punkt L tak, by punkt W leżał między punktami O i L ; prosta równoległa przechodząca przez W i równoległa do $O'L$ jest szukaną prostą normalną (rys. 9b). Tak jak konstrukcja owa jest prosta, tak jej dowód poprawności prosty już nie jest. Poprowadzimy go metodą analityczną korzystając z pojęć geometrii różniczkowej.

Pozostaniemy przy rysunkach 9a i 9b [8, fig. 46-47, s. 96]. Niech punkt W ma współrzędne x, y w układzie SXY , gdzie S jest początkiem (środkiem), punkt B leży na dodatniej części osi SX (odpowiednio A na ujemnej), zaś punkt C na dodatniej części osi SY (rys. 9a). Wtedy współrzędne poszczególnych punktów są następujące: $O = (-r, 0)$, $O' = (r, 0)$, $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $W = (x, y)$. Wówczas odległości WO i WO' zapisujemy następująco

$$WO = \sqrt{(x+r)^2 + y^2}, \quad WO' = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}. \quad (6)$$



Rys. 9: Schemat konstrukcji: a) owalu Cassiniego [8, fig. 46, s. 114]; b) węgielnej do owalu Cassiniego [8, fig. 47, s. 114]

Figure 9: Design scheme of: a) Cassini oval [8, fig. 46, s. 114]; b) of the construction of a normal line to the Cassini oval at the point W [8, fig. 47, s. 114]

Krzywa Cassiniego może być więc zapisana w postaci

$$C = \{(x, y): \sqrt{(x+r)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-r)^2 + y^2} = a^2 - r^2\} \quad (7)$$

lub równoważnie w postaci

$$C = \{(x, y): ((x+r)^2 + y^2) \cdot ((x-r)^2 + y^2) = (a^2 - r^2)^2\}. \quad (8)$$

Owal Cassiniego określony jest więc równaniem

$$((x+r)^2+y^2) \cdot ((x-r)^2+y^2) - (a^2 - r^2)^2=0 \quad (9)$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$F(x, y)=((x+r)^2+y^2) \cdot ((x-r)^2+y^2) - (a^2 - r^2)^2. \quad (10)$$

Z klasycznej geometrii różniczkowej wiadomo, że współrzędne wektora normalnego do krzywej $F(x,y)=0$ mają postać $\mathbf{n}=[F_x, F_y]$, gdzie F_x, F_y są odpowiednio pochodnymi cząstkowymi funkcji $F(x,y)$. Po obliczeniu pochodnych i uporządkowaniu otrzymujemy

$$F_x = 4x(x^2+y^2-r^2), \quad F_y = 4y(x^2+y^2+r^2). \quad (11)$$

Nie zmniejszając ogólności wektor normalny do krzywej Cassiniego możemy zapisać w postaci $(\mathbf{n}'||\mathbf{n})$

$$\mathbf{n}'=[x(x^2+y^2-r^2), y(x^2+y^2+r^2)]. \quad (12)$$

Aby wykazać poprawność konstrukcji przytoczonej przez Żebrawskiego, opiszmy tę konstrukcję również analitycznie. Zgodnie z rys. 9b niech

$$\begin{aligned} O'W=IW=q &= \sqrt{(x-r)^2 + y^2}, \\ OW=p &= \sqrt{(x+r)^2 + y^2}, \\ WK=WL &= u, \\ NO' &= v, \\ ON=2r-v, \quad SN &= r-v. \end{aligned} \quad (13)$$

Z twierdzenia Talesa zapiszemy

$$\frac{O'W}{OW} = \frac{WK}{IW} \leftrightarrow \frac{q}{p} = \frac{u}{q} \leftrightarrow u = \frac{q^2}{p} \quad (14)$$

oraz

$$\frac{OW}{ON} = \frac{WL}{OO'} \leftrightarrow \frac{p}{2r-v} = \frac{p+u}{2r} \leftrightarrow v = \frac{2ru}{p+u}. \quad (15)$$

Po podstawieniu w (15) wyrażenia (14) i przekształceniu otrzymamy

$$v = \frac{2rq^2}{p^2 + q^2}, \quad SN=r-v. \quad (16)$$

W (16) podstawiamy (12)

$$SN = r - \frac{2r((x-r)^2 + y^2)}{(x-r)^2 + y^2 + (x+r)^2 + y^2}. \quad (17)$$

Zgodnie z przyjętym układem współrzędnych możemy zapisać współrzędne punktu

$$N = \left(r - \frac{2r((x-r)^2 + y^2)}{(x-r)^2 + y^2 + (x+r)^2 + y^2}, 0 \right). \quad (18)$$

Kierunek normalnej (węgielnej) w punkcie $W=(x,y)$ wyznacza wektor

$$\overrightarrow{NW} = \left[x-r + \frac{2r((x-r)^2 + y^2)}{(x-r)^2 + (x+r)^2 + 2y^2}, y \right], \quad (19)$$

który po przekształceniu pierwszej współrzędnej osiągnie postać

$$\overrightarrow{NW} = \left[\frac{x(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2}, y \right]. \quad (20)$$

Po pomnożeniu wektora \overrightarrow{NW} przez $x^2+y^2+r^2$ otrzymujemy wektor $\mathbf{n}'=[x(x^2+y^2-r^2), y(x^2+y^2+r^2)]$. Ostatni fakt dowodzi, że konstrukcja normalnej do krzywej Cassiniego podana w Słowniku jest poprawna.

Zastosowanie krzywej Cassiniego Żebrawski widzi w optymalnym ukształtowaniu sklepienia ościeży okien w odniesieniu do elipsy i kabłąka o tych samych półosiach. Przy

czym ma to miejsce przy stosunku $AS:SO=10:4$, przy założeniu, że mniejsza półoś b spełnia warunek $a \frac{\sqrt{3}}{3} \leq b \leq a$. Jako optymalny stosunek $AS:SO$ Żebrawski podaje liczbę $10:4 (=2,5)$.

Wówczas, po przyjęciu oznaczenia $b=SC$ zgodnie z rysunkiem 9a możemy z definicji owalu Cassiniego zapisać zależność $OC^2=AD^2$, ale z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do dwóch trójkątów mamy zależności:

$$AD^2 = a^2 - r^2 \text{ i } SC^2 + r^2 = OC^2, \quad (21)$$

które prowadzą do równości

$$2r^2 = a^2 - b^2. \quad (22)$$

Po uwzględnieniu $AS:SO=10:4$, przy $a=\frac{5}{2}r$, otrzymamy $b=\frac{\sqrt{17}}{2}r$ i ostatecznie

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{17}}{5}. \quad (23)$$

Weryfikacja ostatniego stosunku polegałaby na wykazaniu, że pole obszaru półelipsy (e) i kabłąka (k) w odniesieniu do owalu Cassiniego (c) o stosunku wymiarów półosi $\frac{\sqrt{17}}{5}$ jest z korzyścią dla owalu (c).

Obliczmy pola poszczególnych figur:

- (e) - pole czwartej części elipsy o półosiach a i b wynosi

$$P_e = \frac{1}{4} \pi ab, \quad (24)$$

- (k) - aby wyznaczyć pole „połowy” kabłąka o półosiach a i b (dokładniej: pola figury o brzegu składającego się z dwu półosi i łuku kabłąka będącego sumą łuków dwóch okręgów) wyznaczmy współrzędne punktów G i H . Niech $A=(-a,0)$, $B=(0,b)$, wtedy $D=(-\frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$.

Równanie prostej BD jest postaci

$$y-b = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b-b}{-\frac{b}{2}-0} (x-0),$$

czyli

$$y = (2-\sqrt{3})x+b. \quad (25)$$

Prosta AF ma równanie $y = \sqrt{3}(x+a)$. Współrzędne $(\frac{a\sqrt{3}-b}{2(1-\sqrt{3})}, \frac{a(2\sqrt{3}-3)-b\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})})$ punktu G otrzymamy jako przecięcie prostych AF i BD . Zatem

$$G = (\frac{a\sqrt{3}-b}{2(1-\sqrt{3})}, \frac{a(2\sqrt{3}-3)-b\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})}). \quad (26)$$

Prosta przechodząca przez G równoległa do CF ma równanie

$$y - \frac{a(2\sqrt{3}-3)-b\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} = -\sqrt{3} (x - \frac{a\sqrt{3}-b}{2(1-\sqrt{3})}). \quad (27)$$

Punkt I ma współrzędne $(\frac{a-b}{1-\sqrt{3}}, 0)$, zaś punkt H ma współrzędne $(0, \frac{(a-b)\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})$, czyli

$$I = \left(\frac{a-b}{1-\sqrt{3}}, 0 \right), \quad H = \left(0, \frac{(a-b)\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right). \quad (28)$$

W celu wyznaczenia długości odcinka GI korzystamy ze wzoru na odległość punktów (zauważmy, że $GI=AI$), zaś odległość CH mamy natychmiast, mianowicie $CH = \left| \frac{(a-b)\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})} \right|$.

Promienie okręgów o środkach I oraz H są następujące:

$$r_I = AI = \frac{a-b}{1-\sqrt{3}} + a = \frac{b-a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}, \quad r_H = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + b = \frac{a\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}-1},$$

tzn.

$$r_I = \frac{b-a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}, \quad r_H = \frac{a\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}-1}. \quad (29)$$

$$P_{t(AIGA)} = P_{w(IGA)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot r_I^2, \quad P_{c(IGBCI)} = P_{w(HGB)} - P_{t(HIC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot r_H^2 - \frac{(a-b)^2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)^2},$$

gdzie $t(AIGA)$ oznacza trójkąt krzywoliniowy (wycinek koła $w(IGA)$ środkiem I , o promieniu GI), $c(IGBCI)$ – czworokąt krzywoliniowy, $w(HGB)$ – wycinek koła o środku H i promieniu HB , $t(HIC)$ – trójkąt o wierzchołkach H, I, C .

Wzory na dwie składowe pola kabłąka są następujące:

$$P_{t(AIGA)} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{b-a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1} \right)^2, \quad P_{c(IGBCI)} = \frac{\pi}{12} \left(\frac{a\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}-1} \right)^2 - \frac{(a-b)^2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)^2}. \quad (30)$$

Ostatecznie, pole „połowy” kabłąka o półosiach a, b wyraża się

$$P_k = \frac{\pi}{6} \left(\left(\frac{b-a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}-1} \right)^2 \right) - \frac{(a-b)^2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)^2}. \quad (31)$$

Pole owalu Cassiniego oblicza się w sposób jeszcze bardziej złożony, metodą przybliżoną.

- (c) - Zapiszmy równanie owalu Cassiniego (9) we współrzędnych biegunowych. Wcześniej przekształćmy to równanie do postaci

$$(x^2+y^2)^2 - 2r^2(x^2-y^2) = a^2(a^2 - 2r^2). \quad (32)$$

Wobec $b^2+r^2 = a^2-r^2$ mamy $b^2 = a^2-2r^2$. Stąd $a^2-2r^2 > 0$.

Podstawiając $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, otrzymamy

$$\rho^4 - 2r^2\rho^2 \cos 2\varphi - a^2(a^2 - 2r^2) = 0. \quad (33)$$

Rozwiązując równanie kwadratowe mamy

$$\rho^2 = r^2 \cos 2\varphi + \sqrt{r^4 \cos^2 2\varphi + a^2(a^2 - 2r^2)} \quad \text{lub} \quad (34)$$

$$\rho^2 = r^2 \cos 2\varphi - \sqrt{r^4 \cos^2 2\varphi + a^2(a^2 - 2r^2)}.$$

Drugie z rozwiązań jako, że prawa strona jest ujemna odrzucamy. Pozostaje funkcja opisująca połowę owalu Cassiniego (w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych kartezjańskich)

$$\rho^2 = r^2 \cos 2\varphi + \sqrt{r^4 \cos^2 2\varphi + a^2(a^2 - 2r^2)}, \quad (35)$$

gdzie $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Sprawdzamy, że dla $\varphi=0$ jest $\rho^2 = a^2$, zaś dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jest $\rho^2 = r^2$.

Wzór na pole wyraża się całką

$$P_c = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi, \quad (36)$$

czyli

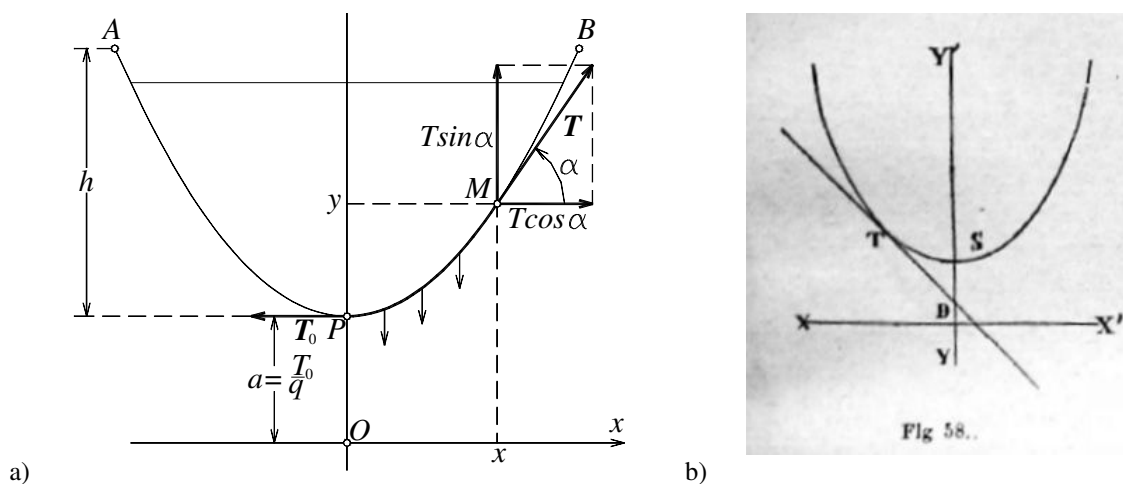
$$P_c = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos 2\varphi + \sqrt{r^4 \cos^2 2\varphi + a^2(a^2 - 2r^2)}) d\varphi. \quad (37)$$

Łańcuchówka, to krzywa mająca zastosowanie wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z modelami zwisającego łańcucha. W podręcznikach akademickich z matematyki wprowadzana jest jako przykład rozwiązania równania różniczkowego. Zadanie formułuje się następująco: W punktach A i B zawieszono linę, o której zakładamy, że jest nierozciągliwa i giętka (rys. 10a). Lina zwisa jedynie pod wpływem własnego ciężaru. Przez q oznaczmy stałą wartość przedstawiającą ciężar liny przypadający na jej jednostkę długości. Należy wyznaczyć kształt krzywej zwisu jako wykresu pewnej funkcji $y(x)$. Za oś Ox obieramy pewną prostą poziomą poniżej poziomego odcinka AB , a za oś Oy prostą pionową przechodzącą przez najniższy punkt P krzywej zwisu. Oznaczmy przez T długość wektora T w punkcie $M(x,y)$ krzywej zwisu, a przez T_0 długość wektora T_0 w punkcie P tej krzywej. Wektory te są styczne do krzywej, a ze względu na symetrię krzywej wektor T_0 jest równoległy do osi Ox . Weźmy pod uwagę łuk PM krzywej.

Zauważmy, że ze względu na stan równowagi liny suma utworzona z sił T_0 , T i z sumy ciężkości poszczególnych elementarnych odcinków łuku PM równa się zero. To samo dotyczy sumy ich składowych odpowiednio względem osi Ox osi Oy . A więc biorąc jeszcze pod uwagę wzór na długość łuku otrzymamy

$$-T_0 + T \cos \alpha = 0, \quad T \sin \alpha - \int_0^x q \sqrt{1 + y'^2} dx = 0, \quad (38)$$

gdzie α jest kątem, jaki tworzy wektor T z osią Ox . Stąd



Rys. 10: Krzywa łańcuchowa: a) schemat napięcia zwisającego łańcucha (*opr. własne*); b) krzywa łańcuchowa w *Słowniku* [8, fig. 58, s. 156]

Figure 10: Chain curve: a) a scheme of the tension of the hanging chain (*own construction*); b) chain curve in *Słownik* [8, fig. 58, s. 156]

$$T \cos \alpha = T_0 = \text{const}, \quad \text{oraz} \quad T_0 \tan \alpha - \int_0^x q \sqrt{1 + y'^2} dx = 0. \quad (39)$$

Różniczkując względem x obie strony ostatniego wzoru i zauważając, że $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ otrzymamy

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \quad (40)$$

jako równanie krzywej zwisu. Oznaczyliśmy przy tym $\frac{T_0}{q} = a$. Jest to równanie typu $F(x, y', y'') = 0$. Podstawiając $y' = u$ w równaniu (40) mamy

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{a}. \quad (41)$$

Całkując obustronnie otrzymujemy

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \frac{x}{a} + C_1. \quad (42)$$

Równanie (42) możemy przekształcić korzystając z pojęcia funkcji sinus hiperboliczny.

Mamy bowiem $\ln(w + \sqrt{1 + w^2}) = v \Leftrightarrow w + \sqrt{1 + w^2} = e^v \Leftrightarrow e^v - w = \sqrt{1 + w^2} \Leftrightarrow (e^v - w)^2 = 1 + w^2 \Leftrightarrow e^{2v} - 2e^v w + w^2 = 1 + w^2 \Leftrightarrow e^{2v} - 1 = 2e^v w \Leftrightarrow w = \frac{e^{2v} - 1}{2e^v} \Leftrightarrow w = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$, czyli $w = \sinh(v)$.

Przekształcając więc (42) otrzymujemy

$$u = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right), \text{ czyli } y' = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right). \quad (43)$$

Po ponownym scałkowaniu ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$) otrzymamy całkę ogólną równania (40):

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2. \quad (44)$$

Dla ustalenia warunków początkowych obieramy tak oś Ox , by rzędna punktu P równała się a (rys. 8a). Należy zatem przyjąć $y'(0) = 0$, $y(0) = a$. Stąd $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ i równanie otrzymanej krzywej zwanej *krzywą łańcuchową* ma postać

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (45)$$

Po uwzględnieniu oznaczeń na rysunku 8a otrzymujemy $y = \left(\frac{T_0}{q}\right) \cosh\left(\frac{qx}{T_0}\right)$.

Żebrowski natomiast podaje opis krzywej łańcuchowej, w oderwaniu od parametrów fizycznych, z interpretacją geometryczną parametru m jako długości łuku między punktem S (najniższym) a punktem [8, fig. 58, s. 156] (rys. 10b) stycznej T stycznej tworzącej kąt 45° z osiami układu współrzędnych. Z uwagi na fakt takiej interpretacji geometrycznej parametru m przeprowadzimy następujące rozumowanie sprawdzające. Równanie krzywej łańcuchowej w słowniku ma bowiem postać

$$y = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right). \quad (46)$$

Aby wyznaczyć współrzędne punktu T obliczamy pochodną funkcji (46) i przyrównujemy do 1. Otrzymujemy

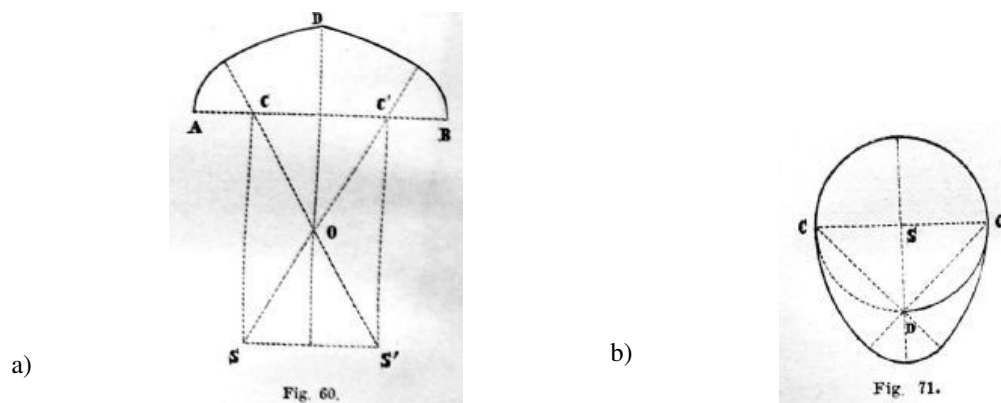
$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) = 1. \quad (47)$$

Z równania (47) znajdujemy wartość $x = \ln(1 + \sqrt{2})^m$. Następnie obliczamy długość łuku licząc całkę

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})^m} \sqrt{1+(y')^2} dx, \quad (48)$$

gdzie, po podstawieniu (47), $1+(y')^2 = \left(\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) \right)^2$. Po obliczeniu całki (48)

otrzymujemy rzeczywiście m . Autor *Słownika* nie wyjaśnia znaczenia punktu D , pisze natomiast o punkcie O , którego na rysunku z kolei nie zaznacza (prawdopodobnie jest to błąd drukarski). Podkreśla natomiast znaczenie krzywej łańcuchowej w budowaniu mostów łańcuchowych lub wiszących, a odwróconą krzywą wskazuje jako „obłączystość” dla sklepień (łuku „sklepionego jednostajnej grubości, którego by zworniki utrzymać się mogły w równowadze”) [8, s. 156].

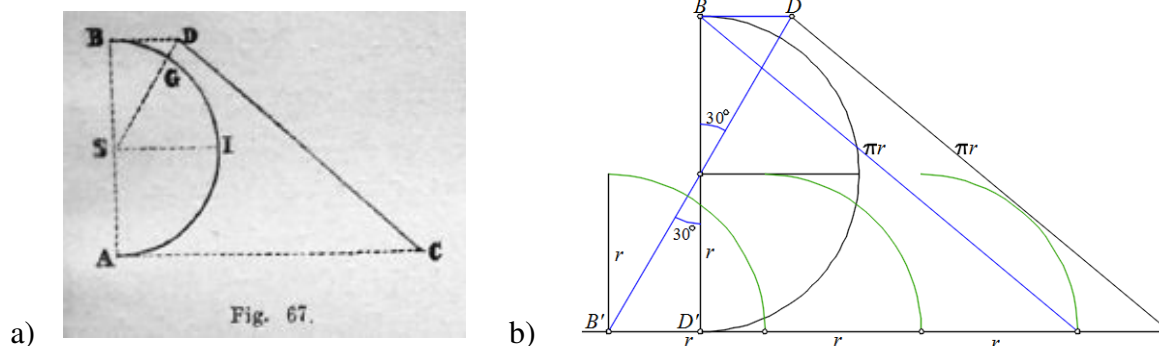


Rys. 11: Kolejne rysunki w *Słowniku*: a) Łuk Tudora [8, fig. 60, s. 159]; b) owal [8, fig. 71, s. 204]
Figure 11: Other drawings in *Słownik*: a) Tudor arc [8, fig. 60, s. 159]; b) oval [8, fig. 71, s. 204]

Łuk wspięty, kawałkami wpisany w trapez prostokątny (rys. 13a), za Żebrowskim, konstruuje się w sposób następujący: odmierzymy odcinek CA na boku CD , potem prowadzimy prostopadłą i wyznaczamy środek łuku G . Następnie odmierzymy odcinek DF na boku DB , znajdujemy punkt E . Poprowadzona przez punkt E równoległa pozwala znaleźć na odcinku GF środek drugiego łuku. Podobnie, jak w kabłąku, mamy tu łuki okręgów sklejane tak, by w punkcie sklejania istniała wspólna styczna do obu łuków (wymóg: łuki mają wspólny promień). Podobną konstrukcję mają łuk *Tudora* (rys. 11a) oraz owal (rys. 11b). Konstrukcje te jednoznacznie dają się odczytać z rysunków. Łuk *Tudora* jest nieregularnym połączeniem dwu szczególnych połówek kabłąka. Żebrowski elementarny łuk okręgu (fragment jednego okręgu) nazywa pojedynczym i złożonym, gdy powstał ze sklejania łuków o różnych promieniach lub o tych samych ale odwróconych. Przy czym półokrąg nazywa łukiem pełnym, mniejszy od półokręgu – *bigą*, a większy od półokręgu – *podkową*. Nigdzie jednak autor *Słownika* nie mówi zastosowaniach tych łuków. Łuk wspięty na pewno znajdzie zastosowanie tam, gdzie punkty podparcia różnią się wysokością.

Konstrukcja Kochańskiego w wydaniu Żebrowskiego odbywa się przez wykreślenie: trzech prostopadłych do średnicy AB : BD , SI , AC (rys. 12a), znalezienie punktu G jako

przecięcia z okręgiem o środku I i o promieniu SI (odłożenie kąta o mierze 30° , wszak trójkąt SIG jest trójkątem równobocznym), by następnie znaleźć punkt D . Następnie na odcinku stycznym w punkcie A odmierza trzy razy odcinek równy promieniowi okręgu. Odcinek DC ma długość πr .



Rys. 12: Konstrukcja Kochańskiego rektyfikacji okręgu: a) w *Słowniku* [8, fig. 67, s. 196]; b) w obecnych podręcznikach geometrii wykreslonej [2, s.248]

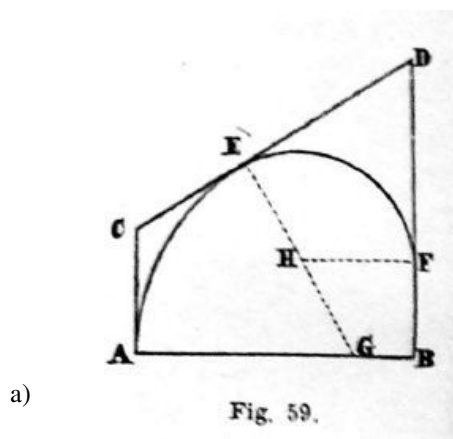
Figure 12: Construction of the Kochański rectification of the circle: a) in *Słownik* [8, fig. 67, s. 196]; b) in the textbooks of the descriptive geometry and the sketch of the Żebrawski construction (*own construction*)

W *Słowniku* znalazł się rysunek *konchoidy Nicomedesa* – krzywej, która powstaje z prostej przez „odsuwanie” lub „przysuwanie” punktów o dany odcinek w kierunku od danego punktu, wybranego jako centralny [8, fig. 51, s. 128]. W obowiązującym, w latach siedemdziesiątych XX wieku, programie szkolnym geometrii konstrukcja konchoidy, w podręczniku Zofii Krygowskiej i Janiny Maroszkowej [3], służyła jako naturalny przykład przekształcenia, które nie zachowuje współliniowości punktów. Zastosowanie konchoidy w budownictwie jest znane [4, 6], ale Żebrawski o tym nie wspomina. Przekroje pionowe kolumn miały bowiem kształt konchoidy. Warto zauważyć, że kształtowanie konchoidy w praktyce budowlanej jest relatywnie proste.

Parabola określona jest w *Słowniku* za pomocą ogniska i kierownicy, jako zbiór punktów jednakowo odległych od punktu zwanego ogniskiem i prostej zwanej kierownicą [8, fig. 71, s. 128]. Żebrawski nie komentuje bliżej wykorzystania pojęcia paraboli w budownictwie, stwierdzając jedynie, że krzywa ta ma swoje zastosowanie w budownictwie, w optyce i akustyce.

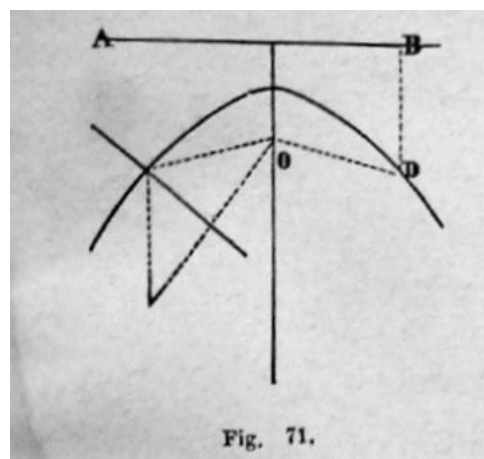
Najprostszy przykład paraboli znajdujemy w mechanice budowli (rys. 14). Mianowicie, podczas obciążenia ciągłego równomiernego belki *moment* zginający zmienia się *parabolicznie* w zależności od zmiany położenia punktu. Istotnie, dla belki obciążonej w sposób ciągły obciążeniem o stałej intensywności q , obciążenie ciągłe q ($=\text{const}$) działające na odcinku L można zastąpić siłą wypadkową $q \cdot L$, przyłożoną w połowie długości odcinka (wypadkowa układu sił równoległych) [13]. Z sumy momentów względem podpór A i B

otrzymuje się $R_A=R_B=\frac{qL}{2}$ [13, rys. 14a]. W belce wystarczy rozpatrzeć tylko jeden przedział $0 \leq x \leq L$, w którym



a)

Fig. 59.



b)

Fig. 71.

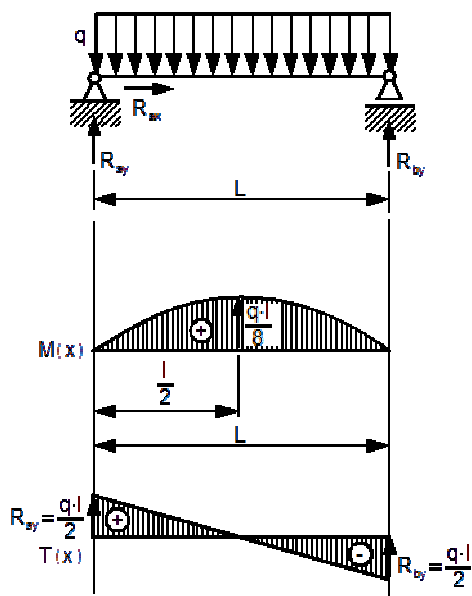
Rys. 13: Łuk wspięty i konstrukcja normalnej do paraboli: a) łuk wspięty w czworokącie prostokątnym [7, fig. 59, s. 159]; b) konstrukcja normalnej do paraboli [8, fig. 71, s. 204]

Figure 13: The arch “wspięty” and construction of a normal line: a) the arch “wspięty” in a rectangular quadrangle [8, fig. 59, s. 159]; b) the construction of a normal line to parabola [8, fig. 71, s. 204]

$$T_x = R_A - qx, \quad T_{x=0} = R_A = \frac{qL}{2}, \quad T_{x=L} = R_A - qL = -\frac{qL}{2}, \quad (49)$$

$$M_x = R_A x - \frac{qx^2}{2}; \quad (50)$$

$$M_{x=0} = 0, \quad T_{x=L} = 0. \quad (51)$$



Rys. 14: Moment zginający belki obciążonej równomiernie (wykresem jest parabola) [13]

Figure 14: Bending moment of a beam evenly loaded (the graph is a parabola) [13]

Do wykonania wykresu paraboli potrzebny jest trzeci punkt (x^* , M_{\max}), który można otrzymać, obliczając ekstremum funkcji (50) opisującej moment zginający (53):

$$\frac{dM}{dx} = R_A - qx (= T_x) = 0, \quad (52)$$

$$x^* = \frac{R_A}{q} = \frac{L}{2}, \quad M_{\max} = M_{x=x^*} = R_A \frac{L}{2} - \frac{q \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} = q \frac{L^2}{8}. \quad (53)$$

Parabola (rys. 14 u dołu) jest wykresem funkcji opisującej moment zginający belki w zależności od odległości x od punktu A .

4 Źródło nazewnictwa funkcji trygonometrycznych w Słowniku

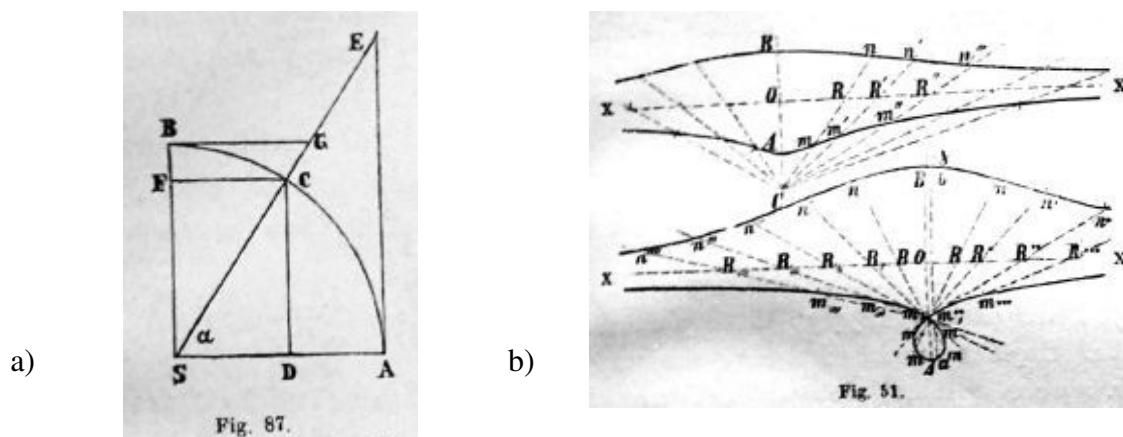
Interesujące jest źródło nazewnictwa funkcji sinus, cosinus, tangens, cotangens, a także, co wydaje się najważniejsze, funkcji secans i cosecans można znaleźć właśnie w *Słowniku* Teofila Żebrawskiego.

I tak, przy założeniu, że okrąg na rysunku 15a [8, fig. 87, s. 304] jest jednostkowy, czyli $SA = SB = 1$, mamy $\sin \alpha = \frac{CD}{SC} = CD$ (CD to jest „wstawa”, czyli coś wstawionego w okrąg, *łac.*

sinus). Dalej $\cos \alpha = \frac{CF}{SC} = CF$ (CF to jest „dostawa”, czyli coś dostawionego w okrąg, *łac.*

cosinus), $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE}{SA} = AE$ (AE to jest „styczna”, czyli *łac.* tangens). Podobnie $\operatorname{ctg} \alpha =$

$\frac{BG}{SB} = BG$ (BG to jest „dostyczna”, czyli *łac.* cotangens).



Rys. 15: Ilustracje do opisu funkcji trygonometrycznych i konstrukcja konchoidy: a) ilustracja źródłowo nazw funkcji trygonometrycznych [8, fig. 87, s. 304]; b) konstrukcja konchoidy [8, fig. 51, s. 128]

Figure 15: Illustration of the description of trigonometric functions: a) drawing illustrating the origin of the names of trigonometric functions [8, fig. 87, s. 304]; b) the construction of a conchoid of Nicomedes [8, fig. 51, s. 128]

Niezwykle interesującą informacją w *Słowniku* jest definiowalność na mocy twierdzenia Pitagorasa pojęcie funkcji secans (czyli „sieczna”). Istotnie prosta SE jest sieczną i zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa mamy $SA^2 + AE^2 = SE^2$, czyli $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = SE^2$ [8, fig. 87, s. 304]. Ale

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Mamy więc $SE = \frac{1}{\sin \alpha}$, zatem rzeczywiście $SE = \sec \alpha$. Podobnie, jak

w przypadku funkcji secans, licząc SG z trójkąta SCF , z twierdzenia Pitagorasa, mamy $SG^2 = SB^2 + BG^2$, czyli $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = SG^2$. Stąd $SG = \frac{1}{\cos \alpha}$. Reasumując mamy: sinus – *wstawa*

(*wst*), cosinus – *dostawa* (*dost*), tangens – *styczna* (*sty*), cotangens – *dostyczna* (*dosty*), secans – *sieczna* (*sie*), cosecans – *dosieczna* (*dosie*).

Jak widać na prostym rysunku [8, fig. 87, s. 304] autor *Słownika* bardzo czytelnie i równocześnie zwięźle wyjaśnia nazewnictwo wszystkich funkcji trygonometrycznych.

5 Podsumowanie

Wszystkie, prezentowane przez Teofila Żebrowskiego, krzywe przedstawione są graficznie w sposób mistrzowski. Oszczędne w treść, ale niezwykle jasne objaśnienia pozwalają łatwo zrozumieć konstrukcje poszczególnych krzywych. Ze zrozumiałych względów brakuje dowodów poprawności konstrukcji, wszak jest to słownik, a nie podręcznik geometrii. Trzeba przyznać, że niektóre z nich nie są natychmiastowe i wymagały od autora niniejszego rozdziału posłużenia się teorią klasycznej geometrii różniczkowej. Warto też zwrócić szczególną uwagę na pierwowzory krzywych sklejanych (współcześnie nazywanych splajnami i inaczej definiowanych), gdzie łukami elementarnymi są fragmenty okręgów. Przyjęta koncepcja sklejanego nie dawała wiele swobody w kształtowaniu, ale otrzymane kształty były efektywne w praktyce. Różne kształty łuków, otrzymane tą drogą i uwiecznione w budowlach, darzą współczesne oko swoim pięknem i są źródłem głębokich wrażeń estetycznych.

W niniejszym opracowaniu pominięto cztery krzywe omawiane w *Słowniku*. Są to: cysoida [8, fig. 17, s. 50], epicykloida [8, fig. 35, s. 72], hipocykloida [8, fig. 40, s. 98] i krzywa rozwijająca danej krzywej [8, fig. 78, s. 252]. Brak jest bowiem przykładów zastosowań tych krzywych w budownictwie. Pierwsza z krzywych była przez Dioklesa określona jako pomoc w „rozwiązaniu” problemu podwojenia sześciianu (rys. 16d), dwie następne – to krzywe mające swoje zdecydowane obywatelstwo w mechanice kół zębatach (rys. 16a, c), ostatnia z krzywych (rys. 16e), zilustrowana dla okręgu, ma wprawdzie prostą własność konstrukcji normalnej, ale też (jak dotąd) nie znalazła zastosowania w budownictwie.

Słownik Teofila Żebrowskiego, z geometrycznego punktu widzenia, to dzieło na wskroś nowoczesne, praktyczne i (przy okazji) dobrze dokumentujące historię nauki. Spektrum przedstawionych krzywych obejmuje współczesne Żebrowskiemu praktyczne potrzeby budownictwa. Wreszcie, *Słownik* to ważne dzieło „krzepiące” Polaków, w czasie zaborów, w kwestii obecności języka polskiego w naukach ścisłych i technicznych poprzez polskie nazewnictwo techniczne [14].

References

- [1] Bronsztejn I. N., Siemiendiajew K. A.: *Nowoczesne kompendium matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- [2] Grochowski B.: *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1988.
- [3] Krygowska Z., Maroszkowa J.: *Geometria do klasy I liceum ogólnokształcącego*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1969.
- [4] Lawrence J. D.: *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover, New York 1972 pp. 135-139.
- [5] Pottman H., Asperl A., Hofer A., Bentley D.: *Architectural Geometry*. Bentley Institut Press, Exton, 2007.
- [6] Szmulowicz F.: *Conchoid of Nicomedes from Reflections and Refractions in a Cone*. American Journal of Physics. No 64, Apr. 1996, pp. 467-471.
- [7] Żebrowski T.: *Wiadomość o Adamie Kochańskim i pismach jego matematycznych /skreślił i czytał na posiedzeniu Towarzystwa Naukowego Krakowskiego dnia 10 lutego 1862 r.* Teofil Żebrowski, [w:] Rocznik Towarzystwa Naukowego, r. 30 /1862. Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1862, s. 1.
- [8] Żebrowski T.: *Słownik wyrazów technicznych tyjących się budownictwa*. Wyd. Akademii Umiejętności, Kraków 1883.
- [9] Żenczykowski W.: *Budownictwo ogólne, t. 2, Konstrukcje i wznoszenie murów i sklepień*, wyd. 4. Wyd. Budownictwo i Architektura, Warszawa, 1954.

- [10] http://budownictwo.wnp.pl/wiecha-na-chlodni-kominowej-bloku-1075-mw-w-kozienicach,249664_1_0_0.html [dostęp: 10.10.2018].
- [11] <http://magazynkaszuby.pl/atrakcje/gniewino-kaszubskie-oko-kompleks-turystyczno-rekreacyjny-goscinny-zakatek-kaszub/> [dostęp: 10.10.2018].
- [12] <https://www.tvn24.pl/kultura-styl,8/wieza-z-ciechanowa-w-czolowce-swiatowego-rankingu-pokonala-te-z-usa,372381.html> [dostęp: 10.10.2018].
- [13] https://www.google.com/search?q=wykres+moment%C3%B3w+parabola&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=hID0rk9MYptc-M%253A%252C36Wpw07uam1T5M%252C_&usg=AI4_-kSxJQLvC9BQM6YMK0XQbHPHyLJTWA&sa=X&ved=2ahUKEwjMvNKugJjfAhVNqYsKHSWfD-cQ9QEwBHoECAUQCA#imgsrc=hID0rk9MYptc-M: [dostęp: 10.10.2018]
- [14] <http://hint.org.pl/hid=AB282> [dostęp: 10.10.2018].

SOME GEOMETRIC CONSTRUCTIONS IN SŁOWNIK WYRAZÓW TECHNICZNYCH TYCZĄCYCH SIĘ BUDOWNICTWA BY TEOFIL ŻEBRAWSKI

Abstract: The subject of research of this paper are concepts and geometric constructions of curves applicable in the building construction industry of Teofil Żebrawski, published in the *Słownik* [8] edited in 1883. The specific purpose of this chapter is to verify the correctness of the construction, that is to prove their correctness and to indicate the applications that Żebrawski does not mention. The scope of the study includes discussion of the 15 drawings of the Żebrawski *Słownik*.