

# Zastosowanie dyskretnego, ortogonalnego operatora Hurwitza-Radona w kompresji i rekonstrukcji konturów obrazów monochromatycznych

Dariusz Jakóbczak

Wydział Elektroniki i Informatyki

Politechnika Koszalińska

Ul. Śniadeckich 2, 75-453, Koszalin, Polska

## 1. Metody rekonstrukcji konturu

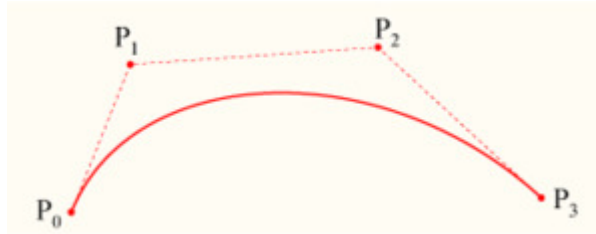
Zagadnienie odtworzenia konturu czy dowolnej krzywej na podstawie pewnej ilości punktów kontrolnych jest istotne w grafice komputerowej, przetwarzaniu obrazu i w tych gałęziach nauki, w których ważne jest zrekonstruowanie kształtu obiektu. Na przykład w sytuacji, gdy zdjęcie satelitarne nie przedstawia całego konturu budynku, istnieje potrzeba przybliżenia kształtu na podstawie posiadanych lub przewidywanych punktów charakterystycznych dla danego obiektu. Innym przykładem zastosowania metod odtwarzania konturu jest zagadnienie kompresji mapy. Na mapie w zależności od jej przeznaczenia mogą występować różnego rodzaju linie otwarte czy zamknięte (np. południki, równoleżniki, poziomice, warstwice, izobary, izobaty, izohipsy itd.). Zapamiętanie każdej linii na mapie za pomocą odpowiedniego zbioru węzłów (kompresja mapy) i rekonstrukcja z dużą dokładnością (dekompresja bezstratna lub małostratna) to tematyka wciąż aktualna w związku z rosnącą ilością danych potrzebnych do analizowania, przetwarzania i archiwizowania. Również w obrazie video zapamiętanie kształtu obiektu i odtworzenie konturu po przemieszczeniu obiektu jest ważnym tematem.

W celu aproksymacji kształtu stosuje się wielomiany lub krzywe wyższego rzędu [25]. W zastosowaniach informatycznych wykorzystuje się przede wszystkim przybliżenie (aproksymację) konturu za pomocą krzywych Béziera. Są to parametryczne krzywe wielomianowe powszechnie stosowane w programach do projektowania inżynierskiego CAD (*Computer Aided Design*), projektowania grafiki komputerowej (np. *Corel Draw*), do reprezentowania obrysów znaków w fontach komputerowych (np. *TrueType*), w systemach przetwarzania grafiki (np. *PostScript*) oraz w grafice wektorowej (format SVG- *Scalable Vector Graphics*). Kształt krzywej Béziera determinują wielomiany dowolnego stopnia  $n$  na podstawie  $n+1$  punktów kontrolnych  $P_i$ , z których dwa pokrywają się z końcami krzywej, natomiast pozostałe  $n-1$  punktów leży poza krzywą i służy do jej określenia [23]. Liczba wielomianów jest równa wymiarowi przestrzeni, tzn. do opisu krzywej płaskiej potrzebne są dwa wielomiany

$(x,y) = (X(t),Y(t))$ ,  $t \in [0;1]$ , a dla krzywej w 3D trzy wielomiany  $(x,y,z)=(X(t),Y(t),Z(t))$ ,  $t \in [0;1]$ . Dowolny punkt na krzywej opisywany jest równaniem:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot B_i^n(t) \text{ dla } t \in [0;1]; B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} - \text{wielomiany bazowe}$$

Bernsteina.



**Rys. 1.** Krzywa Béziera trzeciego stopnia.

Współrzędne dowolnego punktu  $P(t)$  na krzywej z Rys. 1 można znaleźć następująco:

$$(x(t),y(t))=P(t)=P_0(1-t)^3 + 3P_1 \cdot t(1-t)^2 + 3P_2 \cdot t^2(1-t) + P_3 \cdot t^3 \text{ dla } t \in [0;1].$$

Teoretycznie krzywą może opisywać dowolna ilość punktów kontrolnych, lecz wielomiany stopnia większego niż trzy nie są stosowane w praktyce z dwóch względów:

- a) złożoność obliczeniowa wyznaczania punktu na krzywej jest duża;
- b) wszystkie punkty kontrolne mają wpływ na kształt krzywej, przez co trudniej kontrolować jej kształt i niewielkie przesunięcie jednego z punktów kontrolnych może znacząco wpłynąć na przebieg krzywej (niestabilność metody).

W związku z tym najczęściej wykorzystuje się wielomiany stopnia trzeciego (Rys. 1) lub sklejają kilka krzywych i tworzy krzywą B-sklejaną (*B-spline*). Podkreślić należy dwie wady krzywych Béziera w odtwarzaniu konturu.

– Rekonstrukcja kształtu za pomocą krzywych Béziera nie jest rekonstrukcją dokładną, czyli kompresja konturu za pomocą punktów kontrolnych oraz odtworzenie konturu z wykorzystaniem krzywych Béziera jest dekompresją stratną i może być stosowane tylko tam, gdzie dopuszczalne są pewne zniekształcenia kształtu obiektu (np. niewidoczne lub mało znaczące dla oka ludzkiego). Natomiast w przypadku wymaganej rekonstrukcji bezstratnej lub małostratnej wielomiany czy krzywe B-sklejane nie mogą być użyte.

– Większa ilość punktów kontrolnych nie zawsze wiąże się z większą dokładnością odtworzenia konturu, lecz może prowadzić do znacznych zniekształceń krzywej; przesunięcie jednego punktu kontrolnego zmienia całą krzywą.

Oprócz krzywych Béziera w aproksymacji konturu wykorzystywane są krzywe Hermite'a (również są to parametryczne krzywe wielomianowe) [11]. Inną techniką zapisu konturu jest reprezentacja kształtu obiektu za pomocą grafu [16]. Dzięki temu

stopień kompresji obrazu jest lepszy niż w wielu powszechnie stosowanych metodach, lecz dekompresja jest stratna. Przykładem stratnej kompresji konturu jest także kodowanie kształtu z wykorzystaniem współrzędnych biegunowych i Dyskretnej Transformaty Cosinusowej [20]. Również aproksymacja za pomocą wielomianów i krzywych wyższego rzędu metodą PPE (*Progressive Polygon Encoding*) [13] jest stratną rekonstrukcją konturu. Stosowane jest także budowanie konturu na podstawie szkieletu, np. podział konturu i odtworzenie metodą DCE (*Discrete Curve Evolution*) [12,24], lecz i takie podejście może prowadzić do niedokładnej rekonstrukcji konturu.

Brak jest bezstratnej lub małostratnej oraz efektywnej obliczeniowo metody rekonstrukcji konturu, która wraz ze wzrostem liczby punktów charakterystycznych – przy zachowaniu wysokiego stopnia kompresji – zapewni dokładne odtworzenie kształtu obiektu.

## 2. Przedmiot badań

Przedmiotem badań są metody kompresji i bezstratnej lub małostratnej dekompresji konturu obrazu czarno-białego. Wykorzystywane metody rekonstrukcji konturu nie pozwalają na dokładne odtworzenie dowolnego konturu. Większość istniejących obecnie metod kompresji bezstratnej daje lepsze efekty w przypadku obrazu kolorowego (zdjęcia, grafika) niż czarno-białego. Metody bezstratne pozwalają na odpowiedni rząd kompresji kosztem złożoności obliczeniowej. Natomiast metody stratnej kompresji mogą być stosowane tylko w tych zagadnieniach, gdzie nie jest wymagane dokładne odtworzenie oryginalnego obrazu. Jeżeli konieczna jest wierna rekonstrukcja danych, wówczas należy użyć metod bezstratnej kompresji.

Rodzina macierzy Hurwitza-Radona wymiaru  $N = 2, 4$  oraz  $8$  została wykorzystana do budowy dyskretnego, ortogonalnego operatora macierzowego. Macierze HR są macierzami skośno-symetrycznymi oraz wszystkie ich kolumny i wiersze są parami ortogonalne. Główną ideą przyświecającą konstrukcji operatora OHR na podstawie tych właśnie macierzy jest fakt, iż każdą skośno-symetryczną macierz wymiaru  $N = 2, 4$  oraz  $8$  (i tylko takiego wymiaru) można zapisać jako kombinację liniową  $N-1$  macierzy HR o elementach  $0, -1, 1$  i macierzy identycznościowej  $I_N$ . Taka skośno-symetryczna macierz jako operator liniowy  $M$  ze współczynnikami dobranymi dla węzłów (Rys. 2, 3) posiada wszystkie kolumny i wszystkie wiersze parami ortogonalne. Kolumny stanowią ortogonalne wektory bazowe, które dla współczynników zapisanych w wektorze pierwszych współrzędnych  $\mathbf{x}$  pozwolą wyznaczyć wektor drugich współrzędnych  $\mathbf{y}$  z równania  $\mathbf{y} = M \cdot \mathbf{x}$ . Dowolna kombinacja liniowa macierzy HR i macierzy identycznościowej wymiaru  $N$  może być utożsamiana z elementami przestrzeni  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^4, \mathbf{R}^8$ : liczbami zespolonymi, kwaternionami i oktonionami (zwanymi liczbami Cayley'a). Operator  $M: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  oraz operator odwrotny  $M^{-1}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  zostaną

wykorzystane do obliczenia brakujących współrzędnych punktów obrazu dzięki zależnościom:  $M \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$  oraz  $M^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

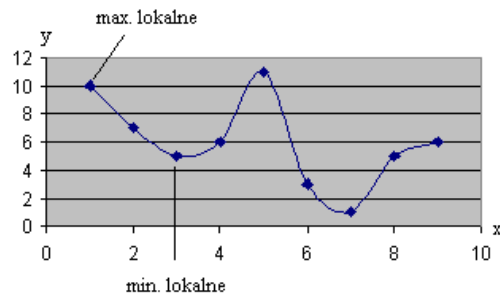
W rozprawie doktorskiej dokonano analizy problemów związanych z bezstratną i stratną kompresją konturu i obrazu oraz opracowano i wykorzystano dyskretny, macierzowy, ortogonalny operator zbudowany na podstawie rodziny macierzy Hurwitza-Radona [19]. Autor niniejszej pracy opisał i uzasadnił własności tego operatora (nazwanego operatorem OHR) oraz skonstruował metodę bezstratnego odtwarzania punktów konturów obrazów czarno-białych (zwaną metodą MHR), wykorzystującą operatory OHR.

### 3. Cel i zakres pracy

#### Sformułowanie podstawowego zagadnienia

Ważnym zagadnieniem we współczesnej nauce jest zapis danych (np. obrazu) z użyciem takiej ilości informacji, która pozwoli na zrekonstruowanie skompresowanych danych w sposób odpowiedni do aktualnych potrzeb. Kompresja bezstratna polega na dokładnym odtworzeniu pierwotnych danych, natomiast kompresja stratna dopuszcza pewne niedokładności. Metody kompresji stratnej cechują się niższą złożonością obliczeniową niż metody bezstratne i umożliwiają wysoki stopień kompresji, jednak w związku z występującymi niedokładnościami podczas dekompresji nie mogą zostać wykorzystane tam, gdzie wymagana jest wierna rekonstrukcja danych (np. w medycynie czy topografii). Metody kompresji bezstratnej często nie mogą być stosowane ze względu na zbyt dużą złożoność obliczeniową lub za mały stopień kompresji.

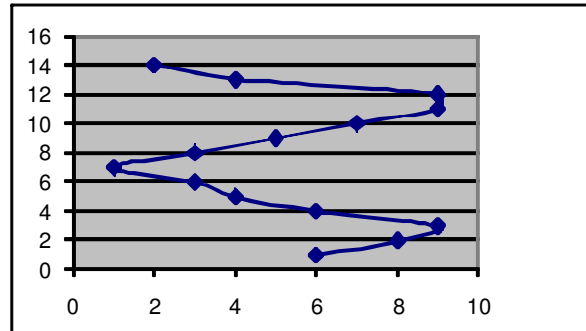
W przypadku wykorzystania rodziny macierzy Hurwitza-Radona każda krzywa (np. litera, kontur obiektu, krawędź obrazu itp.) jest skompresowana do pewnej ilości punktów (węzły interpolacji - punkty charakterystyczne wybrane przez eksperta). Punkty kompresji są punktami, w których lokalnie występuje wartość największa lub najmniejsza jednej ze współrzędnych oraz punkty leżące pomiędzy takimi punktami. Dzięki tym węzłom możliwa będzie dekompresja, czyli odtworzenie krzywej (Rys. 2, 3).



Rys. 2. Krzywa o dziewięciu węzłach ze stałym krokiem współrzędnej  $x_i$ :  $h=1$ .

W przekształceniu MHR węzły są punktami charakterystycznymi leżącymi na pewnej krzywej w  $\mathbf{R}^2$ . Można sformułować znany problem [6,2,18]: czy jest możliwe odtworzenie dowolnego punktu leżącego na krzywej, jeżeli znana jest skończona ilość punktów  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$  tej krzywej, zwanych *węzłami*, takich, że każde  $(x_i, y_i)$  ma albo stały krok w  $x_i$  (Rys. 2), albo stały krok w  $y_i$  (Rys. 3)? Pojawia się więc pytanie: czy jest możliwe odtworzenie krzywej opisanej zbiorem węzłów  $(x_i, y_i)$ ?

W proponowanej w rozprawie metodzie wartości współrzędnych  $(x_i, y_i)$  zostaną powiązane bazą ortogonalną dzięki wykorzystaniu rodziny macierzy HR. Na podstawie zbudowanych baz ortogonalnych o współczynnikach odpowiednich dla danych węzłów obliczone zostaną brakujące współrzędne punktów leżących pomiędzy węzłami. Zrekonstruowane punkty pozwolą na odtworzenie całej krzywej.



**Rys. 3.** Krzywa o czternastu węzłach ze stałym krokiem współrzędnej  $y_i$ :  $h=1$ .

Transformacja MHR pozwala na dokładną rekonstrukcję węzłów konturu (kompresja bezstratna) i dekompresję punktów konturu leżących pomiędzy węzłami z dużą dokładnością (kompresja małostratna) oraz szybkie działanie w czasie rzeczywistym. W grafice rastrowej występuje ogólny problem z przekształceniami geometrycznymi obiektu (przesunięcie, obrót, skalowanie mapy bitowej- powiększenie lub pomniejszenie). W przypadku macierzy HR wystarczy przekształcić tylko węzły i odtworzyć obiekt po przekształceniu. Przekształcenie HR pozwala na bieżące modelowanie konturu przez użytkownika przy komputerze i kreowanie obiektów w czasie rzeczywistym oraz uzupełnienie i korygowanie (poprawę) konturu obiektu. Dobór węzłów w taki sposób, iż posiadają stały krok w jednej ze współrzędnych powoduje, że węzły „dobrze” opisują daną część krzywej, tzn. jest możliwe jest znalezienie dowolnego punktu leżącego na krzywej.

### Tezy pracy

Zbadanie własności macierzy Hurwitza-Radona i wykorzystanie ich w rekonstrukcji konturu obrazu pozwala na sformułowanie tezy pracy. Sformułowano dwie tezy pracy:

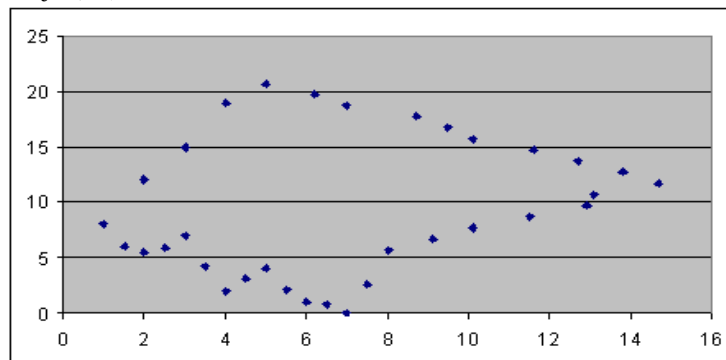
Ortogonalny, dyskretny, macierzowy operator, zbudowany z wykorzystaniem rodziny macierzy Hurwitza-Radona o wymiarach  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  i  $8 \times 8$ , znajduje zastosowanie w bezstratnej i efektywnej obliczeniowo metodzie kompresji i dekompresji konturów obrazów binarnych (czarno-białych), zakodowanych w postaci węzłów.

Przekształcenie HR jest metodą kompresji bezstratnej o złożoności obliczeniowej kompresji i dekompresji rzędu  $O(N^2)$  oraz wysokim stopniu kompresji i może być stosowana do kompresji i dekompresji obrazów czarno-białych.

Tezy rozprawy zostaną wykazane poprzez rozwiązanie jednego z głównych stawianych problemów:

## Problem

Dana jest klasa obrazów typu kontur o wymiarach  $N \times N$  pikseli. Zakładamy, że znane są własności formalizmu rodziny macierzy Hurwitza-Radona i dla danego obrazu znana jest skończona ilość węzłów  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$ : węzły mają stały krok współrzędnej  $x_i$  lub stały krok współrzędnej  $y_i$  oraz węzły ustalone są w wartości minimum i maksimum lokalnego (jeżeli współrzędne  $x_i$  są równoodległe, to ekstremum lokalne dotyczy minimalnych i maksymalnych wartości współrzędnej  $y_i$ , natomiast jeżeli stały krok posiadają współrzędne  $y_i$ , to ekstremum lokalne dotyczy minimalnych i maksymalnych wartości współrzędnej  $x_i$ ) oraz w co najmniej jednym punkcie leżącym pomiędzy sąsiednimi ekstremami lokalnymi (w połowie odcinka). Czy możliwe jest odtworzenie obrazu konturu opisanego danym zbiorem węzłów metodą o złożoności obliczeniowej  $O(N^2)$ ?



Rys. 4. Przykład węzłów opisujących kontur.

Rozwiązanie przedstawionego problemu jest istotne w kontekście wykorzystania metod bezstratnej lub małostratnej kompresji obrazu w wielu zastosowaniach technicznych.

Problem szukania dowolnego punktu krzywej na podstawie zbioru węzłów na płaszczyźnie kartezjańskiej jest istotny ze względu na możliwość odtworzenia kształtu obiektu; istnieje także możliwość porównania dwóch obiektów opisanych różnymi zbiorami węzłów (sprawdzenie czy ten sam punkt leży na dwóch krzywych). Dzięki macierzom HR możliwe jest także opisanie dowolnej krzywej ciągłej za pomocą skończonego zbioru punktów i wykorzystanie modeli dyskretnych HR danej krzywej przy obliczeniach komputerowych. Na przykład pojedynczy, zeskanowany w tomografii komputerowej, przekrój fragmentu ciała jest pewną krzywą. Grubość tej krzywej jest nieistotna i przekształcenie MHR pozwala na dokładne (ogólnie z dużą dokładnością) odtworzenie konturu skanowanego narządu człowieka. Model organu w trakcie analizy wymaga przekształceń geometrycznych: obrotów, przesunięć, powiększenia lub pomniejszenia. W transformacji MHR przekształceniu ulega nie cały kontur, lecz tylko punkty charakterystyczne, a następnie na podstawie nowych węzłów odtwarzany jest kontur po przekształceniu. Istotnym zastosowaniem przekształcenia MHR może być także odtwarzanie kształtu kości przed wypadkiem i na tej podstawie projektowanie protezy.

Ważną cechą transformacji MHR jest fakt, iż przy dużej ilości węzłów nie ma potrzeby posługiwania się jednym operatorem globalnym, lecz działa się na operatorach lokalnych opartych na kilku lub kilkunastu węzłach. Zaletą przekształcenia MHR jest fakt, iż macierz HR jest ortogonalna. Zapewnia to stabilność i wysoką dokładność obliczeń. Operator dyskretny dobrze nadaje się do obliczeń komputerowych. Znaczącą cechą transformacji MHR jest możliwość wykorzystania go przy aproksymacji lub interpolacji funkcji [1,4]. Niektóre metody aproksymacji lub interpolacji (np. interpolacja Lagrange'a lub Newtona) nie radzą sobie z funkcjami, które nie są różniczkowalne w jakimś punkcie danego przedziału [6,2,18], np.  $f(x)=|x|$  lub z funkcjami, których wykres znacznie różni się od wielomianu interpolującego, np.  $y=1/x$ . Przekształcenie MHR nie sprawia takich kłopotów.

Do najważniejszych wyników rozprawy doktorskiej należy zaliczyć:

- opracowanie sposobu budowania macierzowego, dyskretnego, ortogonalnego operatora na podstawie macierzy Hurwitza-Radona oraz omówienie i uzasadnienie własności tego operatora, nazwanego przez autora operatorem OHR;
- zastosowanie operatora OHR w oryginalnej, bezstratnej metodzie kompresji i rekonstrukcji konturów obrazów czarno-białych, zakodowanych w postaci zbioru węzłów (nazwanej metodą MHR);
- zastosowanie MHR w medycynie, zapis i odtworzenie obrazu w tomografii komputerowej, projektowanie implantów kości;
- porównanie istniejących metod kompresji i rekonstrukcji konturu lub obrazu z MHR;
- porównanie MHR z metodami rekonstrukcji obrazu tomograficznego;
- zastosowanie operatora OHR w odtwarzaniu obrazu trójwymiarowego.

Wykorzystywane obecnie metody bezstratnej kompresji obrazu dają lepsze efekty w przypadku obrazów kolorowych niż czarno-białych. W wielu zastosowaniach technicznych (np. w medycynie lub topografii) istnieje potrzeba zapisu obrazu binarnego z dużym stopniem kompresji. Stosowane metody przybliżania konturu za pomocą wielomianów lub krzywych wyższego rzędu są aproksymacją stratną. Rodzina macierzy Hurwitza-Radona o wymiarach 2x2, 4x4 i 8x8 może znaleźć zastosowanie w budowie bezstratnej metody rekonstrukcji konturów obrazów czarno-białych zakodowanych w postaci zbioru węzłów.

## 4. Opis metody MHR

### 4.1 Budowa operatora OHR i operatora odwrotnego do OHR

Baza ortogonalna w skończenie wymiarowej ( $n$ -wymiarowej) przestrzeni z iloczynem skalarnym jest to zbiór  $n$  liniowo niezależnych wektorów o  $n$  elementach takich, iż iloczyn skalarny dwóch dowolnych wektorów z tej bazy jest równy zero [14]. Przykład: dane są dwa dowolne ortogonalne wektory bazowe  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$  oraz

$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ . Wówczas iloczyn skalarny  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \cdot t_i = 0$ . Np. dla  $n = 2$ :

$\mathbf{u} = (1;0)$ ,  $\mathbf{t} = (0;1)$ . Ortogonalność bazy jest ważnym czynnikiem w zapisie każdego elementu przestrzeni  $n$ -wymiarowej jako kombinacji liniowej wektorów bazowych. W tym rozdziale ortogonalne wektory bazowe są rozpatrywane jako wiersze lub kolumny macierzy HR wymiaru  $n = 2, 4$  oraz  $8$ . Rodzina macierzy [7,8,17] Hurwitza-Radona (HR) spełnia:

$$A_j \cdot A_k + A_k \cdot A_j = 0, \quad A_j^2 = -I, \quad A_j^{-1} = A_j^T = -A_j \quad \text{dla } j \neq k; \quad j, k = 1 \dots n.$$

Każdą skośno-symetryczną macierz wymiaru  $N = 2, 4$  lub  $8$  (i tylko takiego wymiaru) można zapisać jako kombinację liniową  $N-1$  macierzy HR o elementach  $0, -1, 1$  i macierzy identycznościowej  $I_N$ . Skośno-symetryczna macierz jako operator liniowy  $M$  ze współczynnikami dobranymi dla węzłów posiada wszystkie kolumny i wszystkie wiersze parami ortogonalne [3,15,21]. Kolumny stanowią ortogonalne wektory bazowe, które dla współczynników zapisanych w wektorze pierwszych współrzędnych  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$  pozwolą wyznaczyć wektor drugich współrzędnych  $\mathbf{y}$  z równania  $\mathbf{y} = M \cdot \mathbf{x}$  [5,22].

Problem szukania dowolnego punktu krzywej na podstawie zbioru węzłów (Rys. 2-4) na płaszczyźnie kartezjańskiej jest istotny ze względu na możliwość odtworzenia kształtu obiektu; istnieje także możliwość porównania dwóch obiektów opisanych różnymi zbiorami węzłów (sprawdzenie czy ten sam punkt leży na dwóch krzywych- porównanie obliczonych wartości dla tych samych argumentów). Dzięki macierzom HR możliwe jest także opisanie dowolnej krzywej ciągłej za pomocą



skończonego zbioru punktów i wykorzystanie modeli dyskretnych HR danej krzywej przy obliczeniach komputerowych. W dalszej części pracy pokazany jest sposób budowy ortogonalnego, liniowego operatora dyskretnego, służącego do znalezienia brakujących punktów krzywej (np. konturu obrazu, kształtu obiektu itp.).

Dane są:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T \in \mathbf{R}^k$  - złożony z pierwszych współrzędnych węzłów (zwany tutaj wektorem argumentów) oraz  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T \in \mathbf{R}^k$  - złożony z drugich współrzędnych węzłów (zwany tutaj wektorem wartości). Czy możliwe jest znalezienie operatora macierzowego  $M : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$  takiego, aby  $\mathbf{y} = M \cdot \mathbf{x}$  i operator  $M$  umożliwił znalezienie współrzędnych  $\mathbf{y}^* = M^* \cdot \mathbf{x}^*$  dla innych współrzędnych  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^k$ ? Problem odtworzenia krzywej jest postawiony w kategoriach odtworzenia punktów leżących na tej krzywej. Operatorów  $M$  oraz  $M^*$  będziemy szukali z wykorzystaniem ww. macierzy HR [19].

Jedną z podstawowych własności rodziny macierzy HR jest taka, iż tylko dla wymiarów  $N = 1, 2, 4$  oraz  $8$  rodzina HR może liczyć  $N-1$  macierzy. Stanowią one wraz z macierzą identycznościową  $N$  ortogonalnych macierzy.

Niech w ogólnym przypadku dla  $N = 1, 2, 4$  oraz  $8$  będzie zdefiniowana [19] macierz  $W(\underline{w})$  (oznaczona dalej  $W$ ) oraz  $W(w_0, \underline{w})$  dla  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}$ :

$$W = W(\underline{w}) = \sum_{i=1}^{N-1} w_i \cdot W_i, \quad \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2 = 1, \quad W(w_0, \underline{w}) = W + w_0 I_N, \quad w_0 \neq 0, \quad (1)$$

gdzie  $W_1, \dots, W_{N-1}$  należą do rodziny macierzy HR o elementach całkowitych  $0, \pm 1$  i wymiarze  $N$ , zaś  $w_0 \neq 0, w_1, \dots, w_{N-1}$  są liczbami rzeczywistymi. Operator  $M$  skonstruowany jest z macierzy  $W(w_0, \underline{w})$ . Dla  $N = 1$  liczba rzeczywista  $W(w_0, \underline{w}) = w_0 \cdot 1$ .

Dla  $N = 2$  otrzymano macierze (1):

$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ -w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W(w_0, \underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 \\ -w_1 & w_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Dla  $N = 4$  macierz  $W$  jest kombinacją liniową trzech macierzy HR, zaś  $W(w_0, \underline{w}) = W + w_0 I_4$ :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ -w_1 & 0 & -w_3 & w_2 \\ -w_2 & w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_3 & -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W(w_0, \underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ -w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ -w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ -w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Dla  $N=8$  macierz  $W$  jest kombinacją liniową siedmiu macierzy HR, zaś  $W(w_0, \underline{w}) = W + w_0 I_8$ :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ -w_1 & 0 & w_3 & -w_2 & w_5 & -w_4 & -w_7 & w_6 \\ -w_2 & -w_3 & 0 & w_1 & w_6 & w_7 & -w_4 & -w_5 \\ -w_3 & w_2 & -w_1 & 0 & w_7 & -w_6 & w_5 & -w_4 \\ -w_4 & -w_5 & -w_6 & -w_7 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ -w_5 & w_4 & -w_7 & w_6 & -w_1 & 0 & -w_3 & w_2 \\ -w_6 & w_7 & w_4 & -w_5 & -w_2 & w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_7 & -w_6 & w_5 & w_4 & -w_3 & -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(w_0, \underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ -w_1 & w_0 & w_3 & -w_2 & w_5 & -w_4 & -w_7 & w_6 \\ -w_2 & -w_3 & w_0 & w_1 & w_6 & w_7 & -w_4 & -w_5 \\ -w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 & w_7 & -w_6 & w_5 & -w_4 \\ -w_4 & -w_5 & -w_6 & -w_7 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ -w_5 & w_4 & -w_7 & w_6 & -w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ -w_6 & w_7 & w_4 & -w_5 & -w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ -w_7 & -w_6 & w_5 & w_4 & -w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Jeżeli zdefiniowany zostanie nowy wektor pierwszych współrzędnych  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbf{R}^N$  spełniający relację  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - w_0 \mathbf{y}$  taki, że dla pewnego  $w_0 \neq 0$  zachodzi  $\mathbf{y} = W \mathbf{u}$ , to wówczas iloczyn skalarny:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$  dla  $\mathbf{u} \neq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Można wyprowadzić równanie:  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + w_0 \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} = -W \mathbf{y} + w_0 \mathbf{y}$ ,

$$\mathbf{x} = (-W + w_0 I_N) \mathbf{y}. \quad (5)$$

Równanie (5) tworzy układ równań liniowych, którego rozwiązanie  $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$  jest następujące dla danych węzłów  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  [19].

Dla  $N = 2$  układ równań (5) jest następujący po uwzględnieniu (2):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & -w_1 \\ w_1 & w_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ czyli } w_0 y_1 - w_1 y_2 = x_1, w_0 y_2 + w_1 y_1 = x_2.$$

Wyznacznik główny tego układu wynosi  $y_1^2 + y_2^2 > 0$  (przynajmniej jeden węzeł musi mieć współrzędną  $y_i$  niezerową). Rozwiązanie układu:

$$w_0 = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \quad w_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2}.$$

Dla  $N = 4$  układ równań (5) jest następujący po uwzględnieniu (3):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & w_0 & w_3 & -w_2 \\ w_2 & -w_3 & w_0 & w_1 \\ w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Czyli:

$$\begin{aligned} w_0 y_1 - w_1 y_2 - w_2 y_3 - w_3 y_4 &= x_1, \\ w_0 y_2 + w_1 y_1 - w_2 y_4 + w_3 y_3 &= x_2, \\ w_0 y_3 + w_1 y_4 + w_2 y_1 - w_3 y_2 &= x_3, \\ w_0 y_4 - w_1 y_3 + w_2 y_2 + w_3 y_1 &= x_4. \end{aligned}$$

Wyznacznik główny tego układu wynosi:

$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + y_4^4 + 2 \sum_{i,i} y_i^2 \cdot y_j^2 > 0 \quad \text{dla } i,j=1,2,3,4 \text{ oraz } i < j \text{ (przynajmniej)}$$

jeden węzeł musi mieć współrzędną  $y_i$  niezerową).

Po uproszczeniu wyrażeń dane są rozwiązania:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}, \quad w_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}, \\ w_2 &= \frac{x_3 y_1 + x_4 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_4}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}, \quad w_3 = \frac{x_2 y_3 - x_1 y_4 + x_4 y_1 - x_3 y_2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}. \end{aligned}$$

Dla  $N = 8$  układ równań (5) jest następujący po uwzględnieniu (4):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 & -w_4 & -w_5 & -w_6 & -w_7 \\ w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 & -w_5 & w_4 & w_7 & -w_6 \\ w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 & -w_6 & -w_7 & w_4 & w_5 \\ w_3 & -w_2 & w_1 & w_0 & -w_7 & w_6 & -w_5 & w_4 \\ w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_5 & -w_4 & w_7 & -w_6 & w_1 & w_0 & w_3 & -w_2 \\ w_6 & -w_7 & -w_4 & w_5 & w_2 & -w_3 & w_0 & w_1 \\ w_7 & w_6 & -w_5 & -w_4 & w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik główny tego układu:

$$\begin{vmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & -y_5 & -y_6 & -y_7 & -y_8 \\ y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 & y_6 & -y_5 & -y_8 & y_7 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 & y_7 & y_8 & -y_5 & -y_6 \\ y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 & y_8 & -y_7 & y_6 & -y_5 \\ y_5 & -y_6 & -y_7 & -y_8 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_6 & y_5 & -y_8 & y_7 & -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_7 & y_8 & y_5 & -y_6 & -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_8 & -y_7 & y_6 & y_5 & -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, jeżeli przynajmniej jeden węzeł posiada współrzędną  $y_i$  niezerową.

Rozwiązanie  $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$  dla  $N = 2, 4$  oraz  $8$  i węzłów  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  można zapisać następująco:

dla  $N = 2$ :

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

dla  $N = 4$ :

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 y_i^2} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ -y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ -y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

dla  $N = 8$ :

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 y_i^2} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 & -y_6 & y_5 & y_8 & -y_7 \\ -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 & -y_7 & -y_8 & y_5 & y_6 \\ -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 & -y_8 & y_7 & -y_6 & y_5 \\ -y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -y_6 & -y_5 & y_8 & -y_7 & y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ -y_7 & -y_8 & -y_5 & y_6 & y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ -y_8 & y_7 & -y_6 & -y_5 & y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Z równania (5) wyznaczono  $\mathbf{y}$ :  $\mathbf{y} = (-W + w_0 I)^{-1} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} = M \cdot \mathbf{x}$  dla  $M = (-W + w_0 I)^{-1}$ .

Szukany operator HR (OHR) wynosi:  $M = \frac{1}{1 + w_0^2} (W + w_0 I)$ .

Jeżeli dla dowolnych wektorów współrzędnych węzłów  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  współczynniki  $w_i$  nie spełnią założenia:  $\sum_{i=1}^{N-1} w_i^2 = 1$ ,

to wówczas  $(-W + w_0 I)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} w_i^2} (W + w_0 I)$ . Rozwiązania (6), (7), (8) nadal są

aktualne oraz szukany operator OHR i odwrotny do OHR równe są dla  $N = 2, 4$  oraz  $8$ :

$$M = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} w_i^2} (W + w_0 I), \quad M^{-1} = w_0 I - W. \quad (9)$$

### Budowa operatora Hurwitza-Radona (OHR) i odwrotnego OHR:

Krok 1. Danych jest  $N$  punktów ( $N = 2, 4$  lub  $8$ ) w przestrzeni  $\mathbf{R}^2$ .

Krok 2. Obliczenie współczynników  $w_i$  dla  $i = 0, 1, \dots, N-1$ : wzory (6), (7), (8).

Krok 3. Budowa operatora  $M$  lub operatora odwrotnego  $M^{-1}$  (9).

## 4.2 Metoda MHR

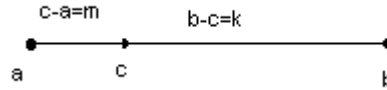
Wprowadzenie metody MHR bazuje na założeniu, iż krzywą opisuje zbiór węzłów  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$  o stałym kroku  $h/2$  we współrzędnej  $x_i$  ( $\frac{h}{2} = x_{i+1} - x_i$ ) lub we współrzędnej  $y_i$  ( $\frac{h}{2} = y_{i+1} - y_i$ ). Jeżeli węzły mają stały krok w pierwszej współrzędnej, wówczas w celu obliczenia wartości dla argumentu z przedziału  $[x_0, x_1]$  należy wyznaczyć dwa operatory OHR:  $M_0$  zbudowany na węzłach  $(a=x_0, y_0), (x_2, y_2), \dots, (x_{2N-2}, y_{2N-2})$ , natomiast  $M_1$  zbudowany na węzłach  $(b=x_1, y_1), (x_3, y_3), \dots, (x_{2N-1}, y_{2N-1})$  dla  $N = 2, 4$  oraz  $8$ . Dzięki operatorom  $M_0$  i  $M_1$  możliwe jest określenie wartości dla dowolnego argumentu  $c \in [a; b]$  i kolejnych  $N-1$  argumentów z krokiem  $h$ . Jeżeli węzły mają stały krok w zmiennej  $y$ , wówczas w celu obliczenia zmiennej  $x$  dla drugiej współrzędnej z przedziału  $[y_0, y_1]$  należy wyznaczyć dwa operatory OHR:  $M_0^{-1}$  zbudowany na węzłach  $(x_0, a=y_0), (x_2, y_2), \dots, (x_{2N-2}, y_{2N-2})$ , natomiast  $M_1^{-1}$  zbudowany na węzłach  $(x_1, b=y_1), (x_3, y_3), \dots, (x_{2N-1}, y_{2N-1})$  dla  $N = 2, 4$  oraz  $8$ . Dzięki operatorom  $M_0^{-1}$  i  $M_1^{-1}$  możliwe jest określenie pierwszej współrzędnej dla dowolnej drugiej współrzędnej  $c \in [a; b]$  i kolejnych  $N-1$  współrzędnych z krokiem  $h$ .

### Wyznaczanie wartości pośrednich

Algorytm wykorzystania operatorów  $M_0$  i  $M_1$  do konstruowania operatora średniego  $M_2$  oraz wykorzystania operatorów  $M_0^{-1}$  i  $M_1^{-1}$  do konstruowania odwrotnego operatora średniego  $M_2^{-1}$  jest następujący:

- 1) Niech  $c$  (Rys. 5) będzie wartością pośrednią z przedziału  $[a, b]$ .
- 2) Oblicza się  $\alpha = \frac{k}{m+k}$ ,  $\beta = \frac{m}{m+k}$ ; jest oczywiste, że  $\alpha + \beta = 1$ .
- 3) Wyznacza się operator średni  $M_2$  jako kombinację wypukłą  $M_0$  i  $M_1$  lub odwrotny operator średni  $M_2^{-1}$  jako kombinację wypukłą  $M_0^{-1}$  i  $M_1^{-1}$ :

$$M_2 = \alpha \cdot M_0 + \beta \cdot M_1, \quad M_2^{-1} = \alpha \cdot M_0^{-1} + \beta \cdot M_1^{-1}. \quad (10)$$



**Rys. 5.** Proporcje podziału odcinka  $[a; b]$  mają swoje odzwierciedlenie przy budowaniu operatora średniego  $M_2$ .

Można wtedy zapisać:  $c = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b$ . Niech  $\frac{h}{2} = b - a$  oznacza

stały krok jednej ze współrzędnych węzłów. Jeżeli  $M_0$  jest operatorem zbudowanym dla pierwszego węzła o współrzędnej  $a$  i kolejnych węzłów z krokiem współrzędnej  $h$ , to kolumny macierzy  $M_0$  stanowią ortogonalne wektory bazowe dla tych węzłów (służących do budowy operatora  $M_0$ ). Podobnie macierz  $M_1$  zawiera ortogonalne wektory bazowe dla pierwszego węzła o współrzędnej  $b$  i kolejnych węzłów z krokiem współrzędnej  $h$ . Jeżeli  $c = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b$ , to dla wektorów bazowych zachodzi taka sama kombinacja liniowa  $\alpha \cdot M_0 + (1 - \alpha) \cdot M_1$ . Oznacza to, iż punktowi  $c$  i kolejnym z krokiem  $h$  odpowiada operator  $M_2 = \alpha \cdot M_0 + (1 - \alpha) \cdot M_1$ .

### Metoda macierzy Hurwitza-Radona (MHR) odtworzenia brakujących punktów krzywej

Założenie: na wejściu dane są punkty charakterystyczne w  $\mathbf{R}^2$  opisujące krzywą (wybrane przez eksperta), posiadające stały krok w pierwszej lub w drugiej współrzędnej. Na początku kontur należy podzielić na części opisane węzłami ze stałym krokiem jednej ze współrzędnych, ustanowionymi w ekstremach lokalnych innej współrzędnej oraz w punktach znajdujących się pomiędzy nimi (co najmniej jeden punkt leżący pomiędzy sąsiednimi ekstremami lokalnymi).

Na wyjściu obliczone są brakujące współrzędne punktów leżących na krzywej: na podstawie wyznaczonych punktów możliwe jest odtworzenie krzywej (odpowiedni dobór węzłów zapewnia bezstratną lub małostratną rekonstrukcję krzywej).

Podział konturu na poszczególne części zakodowane w postaci zbioru węzłów o stałym kroku w jednej ze współrzędnych powoduje, że każda część konturu może być zrekonstruowana oddzielnie i umieszczone na jednym obrazie wszystkie odtworzone punkty przedstawią zrekonstruowany cały kontur.

Krok 1. Wybór węzłów  $(x_i; y_i) \in \mathbf{R}^2$  dla  $i = 0, 1, \dots, n$ , pogrupowanych dla każdej części konturu w podzbiory złożone z co najmniej pięciu węzłów o stałym kroku  $h/2$  jednej ze współrzędnych. Węzłami są ekstrema lokalne jednej ze współrzędnych oraz punkty znajdujące się pomiędzy nimi (co najmniej jeden leżący między każdą parą sąsiednich ekstremów lokalnych).

Krok 2. Zbudowanie dwóch operatorów OHR (wymiaru  $N = 2, 4$  lub  $8$ ) na podstawie kolejnych  $2N$ -węzłów: np. jeden operator  $M_0$  zbudowany z kolejnych węzłów  $(x_i; y_i)$  o indeksach parzystych i kroku  $h$  ( $i = 0, 2, \dots, 2N-2$ ), drugi  $M_1$  z kolejnych węzłów  $(x_i; y_i)$  o indeksach nieparzystych ( $i = 1, 3, \dots, 2N-1$ ). W przypadku węzłów o równoodległych drugich współrzędnych należy wykorzystać operatory odwrotne do OHR.

Krok 3. Wybór liczby  $c \in [a; b]$ , dla której zostanie wyznaczona poszukiwana współrzędna  $x$  lub współrzędna  $y$ : w przypadku stałego kroku pierwszej współrzędnej  $a = x_0, b = x_j$ ; natomiast w przypadku stałego kroku drugiej współrzędnej  $a = y_0, b = y_j$ . Dla liczby  $c$  należy ustalić parametr  $\alpha \in [0; 1]$ , aby  $c = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b$  (Rys. 5).

Krok 4. Budowany jest operator średni  $M_2 = \alpha \cdot M_0 + (1 - \alpha) \cdot M_1$  (w przypadku węzłów o stałym kroku pierwszej współrzędnej) wg wzorów (10) lub operator średni  $M_2^{-1} = \alpha \cdot M_0^{-1} + (1 - \alpha) \cdot M_1^{-1}$  (w przypadku węzłów o stałym kroku drugiej współrzędnej).

Krok 5. Oblicza się wektor drugich współrzędnych  $Y(C) = M_2 \cdot C$  dla  $C = [c, c + h, \dots, c + (N - 1) \cdot h]^T$  w celu wyznaczenia brakujących współrzędnych rekonstruowanych punktów, gdzie  $Y(C) = [y_c, y_{c+h}, \dots, y_{c+(N-1)h}]^T$  oraz  $y_{c+j \cdot h}$  dla  $j = 0, 1, \dots, N-1$  jest obliczoną drugą współrzędną dla pierwszej współrzędnej  $c + j \cdot h$ . W przypadku węzłów o stałym kroku drugiej współrzędnej oblicza się wektor pierwszych współrzędnych  $X(C) = M_2^{-1} \cdot C$ , gdzie  $X(C) = [x_c, x_{c+h}, \dots, x_{c+(N-1)h}]^T$  oraz  $x_{c+j \cdot h}$  dla  $j = 0, 1, \dots, N-1$  jest wyznaczoną pierwszą współrzędną dla drugiej współrzędnej  $c + j \cdot h$ .

Tak więc kontur obrazu należy rozdzielić na części, które mogą zostać opisane za pomocą węzłów o stałym kroku jednej ze współrzędnych. Odtworzenie brakujących punktów przebiega w poszczególnych podzbiórach  $B_i$  węzłów o stałym kroku danej

współrzędnej. Jeżeli stosowane są operatory wymiaru  $N = 2$ , to rekonstrukcja jednej części konturu odbywa się za pomocą następujących podzbiorów węzłów:  $B_0 = \{(x_0; y_0) \dots (x_4; y_4)\}$ ,  $B_1 = \{(x_4; y_4) \dots (x_8; y_8)\}$ ,  $B_2 = \{(x_8; y_8) \dots (x_{12}; y_{12})\} \dots$   $B_i = \{(x_{4i}; y_{4i}) \dots (x_{4i+4}; y_{4i+4})\}$  aż do wyczerpania węzłów opisujących daną część konturu. Jeżeli stosowane są operatory wymiaru  $N = 4$ , to rekonstrukcja jednej części konturu odbywa się za pomocą następujących podzbiorów węzłów:  $B_0 = \{(x_0; y_0) \dots (x_8; y_8)\}$ ,  $B_1 = \{(x_8; y_8) \dots (x_{16}; y_{16})\}$ ,  $B_2 = \{(x_{16}; y_{16}) \dots (x_{24}; y_{24})\} \dots$   $B_i = \{(x_{8i}; y_{8i}) \dots (x_{8i+8}; y_{8i+8})\}$  aż do wyczerpania węzłów opisujących daną część konturu. Jeżeli stosowane są operatory wymiaru  $N = 8$ , to rekonstrukcja jednej części konturu odbywa się za pomocą następujących podzbiorów węzłów:  $B_0 = \{(x_0; y_0) \dots (x_{16}; y_{16})\}$ ,  $B_1 = \{(x_{16}; y_{16}) \dots (x_{32}; y_{32})\}$ ,  $B_2 = \{(x_{32}; y_{32}) \dots (x_{48}; y_{48})\} \dots$   $B_i = \{(x_{16i}; y_{16i}) \dots (x_{16i+16}; y_{16i+16})\}$  aż do wyczerpania węzłów opisujących daną część konturu. Ogólnie: korzystając z operatora OHR wymiaru  $N = 2, 4$  lub  $8$  przy rekonstrukcji danej części konturu jeden podzbiór węzłów  $B_i$  zawiera  $2N+1$  węzłów oraz  $B_i = \{(x_{2Ni}; y_{2Ni}) \dots (x_{2Ni+2N}; y_{2Ni+2N})\}$ . Jeżeli ostatni węzeł opisujący jedną część konturu nie ma indeksu postaci  $2N \cdot i + 2N$ , to wtedy ostatni podzbiór węzłów dla danej części konturu składa się z końcowych  $2N+1$  węzłów. Tak więc ostatni i przedostatni podzbiór węzłów, jak również dwa dowolne podzbiory węzłów  $B_i$  dla danej części konturu, mogą zawierać więcej niż jeden identyczny węzeł (co najmniej jeden węzeł musi być różny).

#### **Uwaga**

Wymiary operatorów OHR użytych przy rekonstrukcji dwóch części konturu mogą być różne.

#### **Definicja 1**

W przypadku konturu złożonego ze skończonej ilości punktów *stopień (rzęd) kompresji MHR* jest stosunkiem liczby węzłów kompresji do liczby wszystkich punktów konturu.

### **4.3 Własności metody MHR**

Jeżeli przyjąć klasycznie, że odtworzony kontur ma kształt wielomianu interpolacyjnego, to oszacowanie błędu znajduje się w [6]. Metoda MHR pozwala jednak na wierniejsze odtworzenie oryginalnego konturu niż tylko za pomocą wielomianu.

Najważniejszą cechą operatora OHR jest to, iż jego macierz zawiera ortogonalne wektory kolumnowe lub wierszowe, które stanowią ortogonalną bazę dla punktów węzłowych, służących do budowy danego operatora OHR. Kolumny stanowią ortogonalne wektory bazowe, które dla współczynników zapisanych w wektorze pierwszych współrzędnych  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$  pozwolą wyznaczyć wektor drugich współrzędnych  $\mathbf{y}$  z równania  $\mathbf{y} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ . Znaleziona baza (9) jest więc najlepszą bazą pod kątem zachowania informacji o węzłach i pozwala na odtworzenie punktów leżących między węzłami.



Istotny jest dobór węzłów w punktach charakterystycznych konturu: ekstrema lokalne oraz punkty leżące między nimi (co najmniej jeden). Dzięki takiemu wyborowi punktów kompresji jest pewne, iż pomiędzy sąsiednimi węzłami funkcja jest niemalejąca albo nierosnąca (rekonstruowane punkty pomiędzy sąsiednimi węzłami leżą w prostokątnym obszarze  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  wyznaczonym przez te węzły, zachowana jest podstawowa informacja o monotoniczności i ekstremach krzywej). Innym ważnym czynnikiem wpływającym na dokładność obliczeń jest fakt, iż kombinacja liniowa dwóch operatorów (10) jest wypukła. Dzięki temu jest pewność, że jeżeli dla dwóch kolejnych węzłów np.  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$  o stałym kroku pierwszej współrzędnej zbudowane są operatory i poszukiwana jest wartość  $y$  dla  $x \in [x_1, x_2]$ , to  $y \in [y_1, y_2]$ . Podobnie jeżeli węzły posiadają stały krok drugiej współrzędnej i poszukiwana jest pierwsza współrzędna  $x$  dla  $y \in [y_1, y_2]$ , to  $x$  należy do przedziału  $[x_1, x_2]$ .

### Konstruowanie OHR po redukcji wyrażeń

Operator OHR zbudowany na węzłach  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$  równy jest:

$$M = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix},$$

$$M = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 & x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{bmatrix}.$$

Operator odwrotny do OHR skonstruowany na węzłach  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$  równy jest:

$$M^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{bmatrix}.$$

Operator OHR zbudowany na węzłach  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \in \mathbf{R}^2$  o stałym kroku współrzędnej  $x_i$  równy jest:

$$M = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 \\ -u_2 & u_3 & u_0 & -u_1 \\ -u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 \end{bmatrix} \text{ dla}$$

$$u_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4, u_1 = -x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3,$$

$$u_2 = -x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2, u_3 = -x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1.$$

Operator odwrotny do OHR zbudowany na węzłach  $(x_i, y_i), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \in \mathbf{R}^2$  o stałym kroku współrzędnej  $y_i$  równy jest:

$$M^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \begin{bmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{bmatrix}.$$

Operator  $M$  zbudowany na węzłach  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2, i = 1, 2, \dots, 8$  o stałym kroku współrzędnej  $x_i$  równy jest:

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 x_i^2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ -u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 & u_5 & -u_4 & -u_7 & u_6 \\ -u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 & u_6 & u_7 & -u_4 & -u_5 \\ -u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 & u_7 & -u_6 & u_5 & -u_4 \\ -u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_5 & u_4 & -u_7 & u_6 & -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 \\ -u_6 & u_7 & u_4 & -u_5 & -u_2 & u_3 & u_0 & -u_1 \\ -u_7 & -u_6 & u_5 & u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 & -y_6 & y_5 & y_8 & -y_7 \\ -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 & -y_7 & -y_8 & y_5 & y_6 \\ -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 & -y_8 & y_7 & -y_6 & y_5 \\ -y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -y_6 & -y_5 & y_8 & -y_7 & y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ -y_7 & -y_8 & -y_5 & y_6 & y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ -y_8 & y_7 & -y_6 & -y_5 & y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}.$$

Operator odwrotny  $M^{-1}$  zbudowany na węzłach  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2, i = 1, 2, \dots, 8$  o stałym kroku współrzędnej  $y_i$  równy jest:

$$M^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 y_i^2} \begin{bmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 & -u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7 \\ u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 & -u_5 & u_4 & u_7 & -u_6 \\ u_2 & u_3 & u_0 & -u_1 & -u_6 & -u_7 & u_4 & u_5 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 & -u_7 & u_6 & -u_5 & u_4 \\ u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_5 & -u_4 & u_7 & -u_6 & u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_6 & -u_7 & -u_4 & u_5 & u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_7 & u_6 & -u_5 & -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{bmatrix}.$$

### Dokładność metody MHR i przykład oszacowania błędu

W węzłach o elementach rzeczywistych współrzędne obliczone są dokładnie za pomocą operatora OHR lub operatora odwrotnego do OHR (interpolacja). A co dzieje się z wyznaczonymi punktami o współrzędnych rzeczywistych, leżącymi między węzłami? W celu otrzymania odpowiedzi na to pytanie oszacowano błąd przybliżenia MHR.

Jeżeli dana jest pierwsza współrzędna  $c \in [a;b]$ ,  $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha, \beta \in [0;1]$  (Rys. 5), to wartość  $y_c$  obliczona wzorem

$$\begin{bmatrix} y_c \\ y_{c+h} \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} c \\ c+h \end{bmatrix} \text{ wynosi:}$$

$$\begin{aligned} y_c &= \alpha^2 y_0 + \beta^2 y_1 + \alpha\beta y_0 + \alpha\beta \left( \frac{2ahy_0 + h^2 y_0 + h^2 y_2}{4a^2 + 4ah + 2h^2} + \frac{4a^2 y_1 + 6ahy_1 + 3h^2 y_1 - h^2 y_3}{4a^2 + 8ah + 5h^2} \right) = \\ &= \alpha^2 y_0 + \beta^2 y_1 + \alpha\beta y_0 + \alpha\beta y_1 + \alpha\beta \left( \frac{2ahy_0 + h^2 y_0 + h^2 y_2}{4a^2 + 4ah + 2h^2} - \frac{2ahy_1 + 2h^2 y_1 + h^2 y_3}{4a^2 + 8ah + 5h^2} \right). \end{aligned}$$

Warto zauważyć, iż  $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 = 1$ . Występuje tu analogiczny związek współczynników przy drugich współrzędnych jak w przypadku  $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ , gdzie  $\alpha + \beta = 1$ .

### Definicja 2

$$\text{Wielkość } r = r(h) = \alpha\beta \left( \frac{2ahy_0 + h^2 y_0 + h^2 y_2}{4a^2 + 4ah + 2h^2} - \frac{2ahy_1 + 2h^2 y_1 + h^2 y_3}{4a^2 + 8ah + 5h^2} \right)$$

nazwano *resztą obliczania drugiej współrzędnej*  $y_c$  za pomocą operatora średniego OHR wymiaru  $N = 2$ .

Drugą współrzędną  $y_c$ , obliczoną za pomocą MHR dla  $N = 2$ , można zapisać jako:

$$y_c = (\alpha + \beta)(\alpha y_0 + \beta y_1) + r = \alpha y_0 + \beta y_1 + r. \quad (11)$$

Z (11) wynika ważny fakt: interpolacja MHR nie jest interpolacją liniową.

Oszacowano teraz dokładność MHR w klasie wielomianów stopnia 1 w punkcie o współrzędnej  $c \in [a;b]$ ,  $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha, \beta \in [0;1]$  (Rys. 5).

Założenie: odtwarzana funkcja  $f$  należy do klasy funkcji liniowych (ściślej - afinicznych) pomiędzy sąsiednimi węzłami  $(a=x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(b=x_1; y_1) \in \mathbf{R}^2$  o stałym kroku pierwszej współrzędnej  $b-a = h/2 \in \mathbf{R}$ . Wtedy (11):

$$|f(c) - y_c| = |\alpha y_0 + \beta y_1 - y_c| = |r|.$$

#### Uwaga

Wartość bezwzględna reszty  $|r|$  jest największa dla  $\alpha = \beta = 0.5$ , tzn. gdy współrzędna  $c$  leży w połowie przedziału  $[a;b]$ . Wówczas

$$r = 0.25 \left( \frac{2ahy_0 + h^2 y_0 + h^2 y_2}{4a^2 + 4ah + 2h^2} - \frac{2ahy_1 + 2h^2 y_1 + h^2 y_3}{4a^2 + 8ah + 5h^2} \right).$$

Przykład oszacowania: jeżeli  $h/2 = 0.1$  (krok współrzędnej  $x_i$ ),  $x_0 = 3.2$ ,  $x_1 = 3.3$ ,  $x_2 = 3.4$ ,  $x_3 = 3.5$ ,  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 7.9$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 2$ ,  $\alpha = 0.12$ , to wówczas  $|f(c) - y_c| = |r| = 0.09$ .

Z oszacowania błędu przybliżenia wartości w punkcie leżącym pomiędzy węzłami  $(x_0, y_0)$  i  $(x_1, y_1)$  wynika, że jest on tym mniejszy, im mniejsza jest wielkość  $|y_1 - y_0|$  lub krok  $h/2 = x_1 - x_0$  oraz im mniejsza jest odległość szukanego punktu od jednego z dwóch sąsiednich węzłów (dla węzłów o stałym kroku współrzędnej  $x_i$ ). W przypadku węzłów o stałym kroku współrzędnej  $y_i$  oszacowania błędu przebiegają analogicznie.

#### Złożoność obliczeniowa dekompresji (rekonstrukcji) MHR

Złożoność obliczeniową rekonstrukcji konturu złożonego z  $M$  pikseli oszacowano następująco. Założenie: przyjęto wariant największej złożoności obliczeniowej w przypadku, gdy kompresowany obraz o wymiarach  $M \times M$  ( $M > 8$ ) składa się tylko z czarnych pikseli.



Rys. 6. Kwadratowy obraz złożony tylko z czarnych pikseli.

Każda linia pozioma jest zapisana za pomocą pewnej liczby węzłów o współrzędnych naturalnych i następnie każda linia pozioma jest po kolei odtworzona za pomocą MHR przy wykorzystaniu operatora OHR odpowiedniego wymiaru. Wyznaczając złożoność obliczeniową wzięto pod uwagę liczbę wykonanych działań mnożenia i dzielenia. Oszacowanie złożoności obliczeniowej rekonstrukcji konturu złożonego z  $M$  pikseli wykonano na przykładzie krzywej (linii) zbudowanej z  $M$  pikseli. Jest oczywiste, że jeżeli w każdej linii poziomej ilość węzłów wynosi  $s$ , to rząd kompresji równa się

$$\frac{s \cdot M}{M^2} = \frac{s}{M}.$$

#### Złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu za pomocą operatorów OHR wymiaru 2x2

Założenie: każda linia pozioma jest zapisana za pomocą pięciu węzłów o współrzędnych naturalnych. Wówczas ze względu na wymiar operatora OHR  $N = 2$  ilość operacji mnożenia i dzielenia wykonanych przy rekonstrukcji każdej linii wynosi  $(N+2)M+7=4M+7$ , co po przemnożeniu przez ilość linii  $M$  da wielkość  $(4M+7)M$  działań mnożenia lub dzielenia.

Złożoność obliczeniowa dekompresji obrazu o wymiarach  $M \times M$  z użyciem MHR za pomocą operatorów OHR wymiaru  $2 \times 2$  jest nie większa niż  $4M^2+7M$  przy

kompresji rzędu  $\frac{5M}{M^2} = \frac{5}{M}$ .

#### Złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu za pomocą operatorów OHR wymiaru 4x4

Założenie: każda linia pozioma jest zapisana za pomocą dziewięciu węzłów o współrzędnych naturalnych. Wówczas ze względu na wymiar operatora OHR  $N = 4$  ilość operacji mnożenia i dzielenia wykonanych przy rekonstrukcji każdej linii wynosi  $(N+2)M+21=6M+21$ , co po przemnożeniu przez ilość linii  $M$  da wielkość  $(6M+21)M$  działań mnożenia lub dzielenia.

Złożoność obliczeniowa dekompresji obrazu o wymiarach  $M \times M$  w MHR za pomocą operatorów OHR wymiaru  $4 \times 4$  jest nie większa niż  $6M^2+21M$  przy kompresji

rzędu  $\frac{9M}{M^2} = \frac{9}{M}$ .

#### Złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu za pomocą operatorów OHR wymiaru 8x8

Założenie: każda linia pozioma jest zapisana za pomocą siedemnastu węzłów o współrzędnych naturalnych. Wówczas ze względu na wymiar operatora OHR  $N = 8$  ilość operacji mnożenia i dzielenia wykonanych przy rekonstrukcji każdej linii wynosi  $(N+2)M+73=10M+73$ , co po przemnożeniu przez ilość linii  $M$  da wielkość  $(10M+73)M$  działań mnożenia lub dzielenia.

Złożoność obliczeniowa dekompresji obrazu o wymiarach  $M \times M$  w MHR za pomocą operatorów OHR wymiaru  $8 \times 8$  jest nie większa niż  $10M^2 + 73M$  przy kompresji rzędu  $\frac{17M}{M^2} = \frac{17}{M}$ .

#### Uwaga

Przy większej ilości węzłów w każdej linii pogarsza się rząd kompresji, ale zwiększa się dokładność obliczeń: na przykładzie dwóch pierwszych węzłów  $(x_0; y_0)$  i  $(x_1; y_1)$  wielkości  $|x_1 - x_0|$  oraz  $|y_1 - y_0|$  odgrywają czołową rolę w oszacowaniach dokładności. Złożoność obliczeniowa przy wykorzystaniu operatorów OHR danego wymiaru pozostaje bez zmian.

#### **Twierdzenie (o niezmienniczości złożoności obliczeniowej dekompresji MHR w przypadku podwajania ilości węzłów)**

*Założenie:* ilość równoodległych węzłów o elementach rzeczywistych w każdej linii poziomej wynosi  $s > 4$ . Niech  $k - 2 = N$  oznacza wymiar wszystkich operatorów OHR użytych w MHR ( $k = 4, 6$  lub  $10$ ;  $N = 2, 4$  lub  $8$ ). Dodatkowo niech liczba węzłów powiązana będzie następującą rekurencją:  $s(0) = 5$ ,  $s(i) = 2s(i-1) - 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, M$  (ilość węzłów  $s = 5, 9, 17, 33, \dots$ ).

*Teza:* jeżeli dla liczby węzłów  $s$  złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu o wymiarach  $M \times M$  pikseli za pomocą MHR wynosi  $kM^2 + mM$ , to przy ilości węzłów  $2s - 1$  (każdy nowy węzeł powstaje w połowie odcinka między wcześniej istniejącymi już węzłami) złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu o wymiarach  $M \times M$  pikseli w MHR za pomocą operatorów OHR o niezmiennym wymiarze  $N = k - 2$  wynosi  $kM^2 + (2m + k)M$ .

#### **Dowód:**

Dla minimalnej ilości węzłów  $s = 5$  w przypadku wykorzystania operatorów OHR wymiaru  $2 \times 2$  złożoność obliczeniowa została pokazana wyżej:  $kM + m = 4M + 7$ . Dla minimalnej ilości węzłów  $s = 9$  w przypadku wykorzystania operatorów OHR wymiaru  $4 \times 4$  złożoność obliczeniowa została pokazana:  $kM + m = 6M + 21$ . Dla minimalnej ilości węzłów  $s = 17$  w przypadku wykorzystania operatorów OHR wymiaru  $8 \times 8$  złożoność obliczeniowa została wykazana:  $kM + m = 10M + 73$ .

Niech dla ilości węzłów  $s$  wielkość  $kM + m = t \cdot u + \frac{M - s}{s - 1} \cdot p \cdot q$ , gdzie:

$t = \frac{3}{2} \cdot \frac{s - 1}{k - 2}$  oznacza ilość operatorów OHR danego wymiaru, potrzebnych do obliczeń;

$u$  jest ilością operacji mnożenia i dzielenia wykonanych przy budowie jednego operatora OHR danego wymiaru ( $u = 9$  dla operatora OHR wymiaru  $2 \times 2$ ,  $u = 25$  dla operatora OHR wymiaru  $4 \times 4$ ,  $u = 81$  dla operatora OHR wymiaru  $8 \times 8$ );

$p$  równa się ilości działań mnożenia i dzielenia wykonanych przy budowie jednego operatora średniego i pomnożeniu operatora średniego przez wektor odpowiednich współrzędnych ( $p=8$  dla operatora OHR wymiaru  $2 \times 2$ ,  $p = 24$  dla operatora OHR wymiaru  $4 \times 4$ ,  $p = 80$  dla operatora OHR wymiaru  $8 \times 8$ );

$q = \frac{s-1}{k-2} = \frac{2}{3}t$  jest ilością podprzedziałów wyznaczonych przez kolejne węzły i potrzebnych do obliczeń.

Wtedy:  $k = \frac{p \cdot q}{s-1}$ ,  $m = tu - \frac{spq}{s-1}$ . Dla ilości węzłów  $2s-1$  ilość działań mnożenia

i dzielenia potrzebnych do rekonstrukcji jednej linii złożonej z  $N$  pikseli wynosi:

$$2t \cdot u + \frac{M-2s+1}{2s-2} \cdot 2p \cdot q = 2tu + \frac{M-2s+1}{s-1} pq = M \frac{pq}{s-1} + 2tu - \frac{2spq}{s-1} + \frac{pq}{s-1} = kM + 2m + k.$$

Po wymnożeniu przez ilość linii  $M$  otrzymano  $kM^2 + (2m+k)M$ . Jest to złożoność obliczeniowa rekonstrukcji obrazu o wymiarach  $M \times M$  pikseli za pomocą MHR z wykorzystaniem operatorów OHR wymiaru  $N = k-2 = 2, 4$  oraz  $8$ .  $\square$

### Uwaga

Zwiększenie ilości węzłów powoduje wzrost dokładności rekonstruowanego konturu przy niezmięnionej złożoności obliczeniowej.

### Wniosek

Rekonstrukcja konturu złożonego z  $M$  pikseli za pomocą MHR obarczona jest złożonością obliczeniową  $O(M)$  niezależnie od ilości węzłów i wymiaru użytych operatorów OHR. Rekonstrukcja obrazu binarnego złożonego maksymalnie z  $M$  konturów za pomocą MHR obarczona jest złożonością obliczeniową  $O(M^2)$  niezależnie od ilości węzłów i wymiaru użytych operatorów OHR.

### Złożoność obliczeniowa kompresji MHR

Na początku należy oszacować złożoność obliczeniową podziału całego konturu na części  $K_i$ , a następnie obliczyć złożoność obliczeniową wyznaczenia węzłów kompresji dla każdej części konturu .

Podział konturu na poszczególne części  $K_i$  odbywa się dzięki porównaniu różnicy odpowiednich współrzędnych trzech sąsiednich pikseli. Zatem dla konturu  $K$

złożonego z  $M$  pikseli wykonanych jest  $M-2$  porównań, czyli złożoność obliczeniowa tego etapu kompresji MHR jest rzędu  $O(M)$ .

Kolejnym etapem kompresji MHR jest wyznaczenie węzłów kompresji dla każdej części konturu. W tym celu należy wyznaczyć ekstrema lokalne dla części konturu  $K_i$ . Niech część konturu  $K_i$  składa się z  $M_i$  pikseli,  $i = 1, 2, \dots, L$ . Zachodzi

równość:  $\sum_{i=1}^L M_i = M + L - 1$ . Żeby wyznaczyć ekstrema lokalne części konturu  $K_i$

złożonej z  $M_i$  pikseli należy wykonać  $2(M_i - 2)$  porównań odpowiednich współrzędnych trzech sąsiednich pikseli. Zatem liczba wszystkich porównań dla całego konturu  $K$

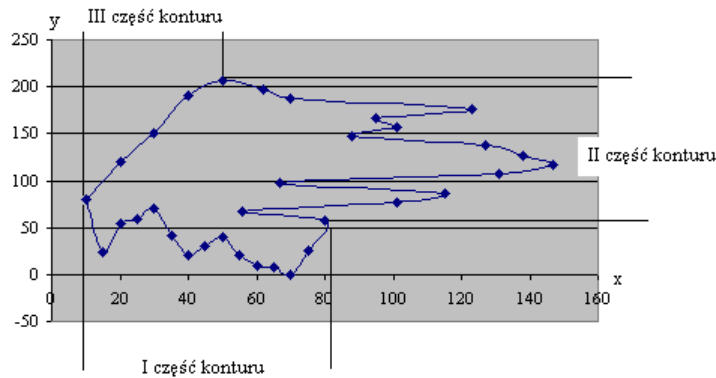
wynosi:  $\sum_{i=1}^L 2(M_i - 2) = 2\sum_{i=1}^L M_i - 4L = 2(M + L - 1) - 4L = 2M - 2L - 2$ .

Czyli złożoność obliczeniowa wyznaczenia ekstremów lokalnych całego konturu złożonego z  $M$  pikseli metodą MHR jest rzędu  $O(M)$ .

### Wniosek

Kompresja konturu złożonego z  $M$  pikseli za pomocą MHR obciążona jest złożonością obliczeniową  $O(M)$ . Kompresja obrazu czarno-białego złożonego maksymalnie z  $M$  konturów za pomocą MHR obciążona jest złożonością obliczeniową  $O(M^2)$ .

Przykład obliczeń [10] dla następującego konturu (część I i III cechują się węzłami o stałym kroku współrzędnej  $x_i$ , natomiast część II posiada węzły o stałym kroku współrzędnej  $y_i$ ):

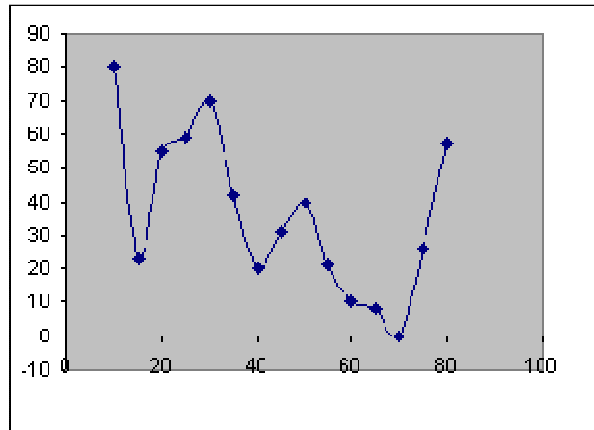


Rys. 7. Kontur podzielony na trzy części.



Część I konturu (w innej skali niż na Rys. 7) opisana jest węzłami:

$x_i =$	$y_i =$
10	80
15	23
20	55
25	59
30	70
35	42
40	20
45	31
50	40
55	21
60	10
65	8
70	0
75	26
80	57



Rys. 8. Węzły I części konturu.

Ilość węzłów dla I części konturu jest mniejsza niż siedemnaście, czyli nie można skorzystać z operatorów OHR wymiaru  $8 \times 8$ . Punkty I części konturu rekonstruowane są za pomocą operatorów OHR wymiaru  $4 \times 4$  w dwóch podzbiorach węzłów (każdy zawiera dziewięć węzłów): podzbiór  $B_0$  zawiera węzły od (10;80) do (50;40), podzbiór  $B_1$  zawiera węzły od (40;20) do (80;57). Np. Dla węzłów o współrzędnych  $\mathbf{x} = [10 \ 20 \ 30 \ 40]^T$ ,  $\mathbf{y} = [80 \ 55 \ 70 \ 20]^T$  wyznaczono operator:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1.598 & -0.382 & 1.167 & 0.917 \\ 0.382 & 1.598 & -0.917 & 1.167 \\ -1.167 & 0.917 & 1.598 & 0.382 \\ -0.917 & -1.167 & -0.382 & 1.598 \end{bmatrix}.$$

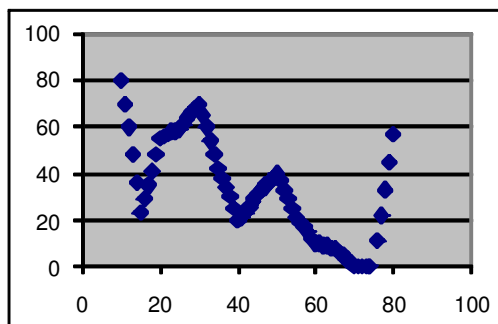
Dla węzłów o współrzędnych  $\mathbf{x} = [15 \ 25 \ 35 \ 45]^T$ ,  $\mathbf{y} = [23 \ 59 \ 42 \ 31]^T$  wyznaczono operator:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.142 & -0.272 & 0.501 & -0.108 \\ 0.272 & 1.142 & 0.108 & 0.501 \\ -0.501 & -0.108 & 1.142 & 0.272 \\ 0.108 & -0.501 & -0.272 & 1.142 \end{bmatrix}.$$

Przykład obliczeń drugich współrzędnych punktów dla pierwszych współrzędnych zapisanych w wektorze  $\mathbf{p} = [12 \ 22 \ 32 \ 42]^T$ :  $M_2 = 0.6 \cdot M_0 + 0.4 \cdot M_1$ ,

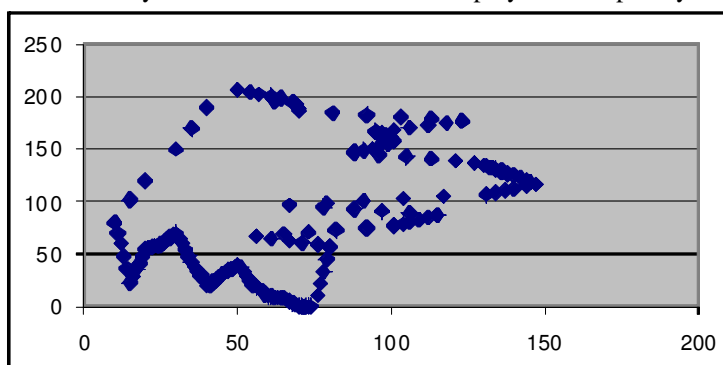
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1.416 & -0.338 & 0.9 & 0.507 \\ 0.338 & 1.416 & -0.507 & 0.9 \\ -0.9 & 0.507 & 1.416 & 0.338 \\ -0.507 & -0.9 & -0.338 & 1.416 \end{bmatrix}, \quad M_2 \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 59.638 \\ 56.806 \\ 59.865 \\ 22.748 \end{bmatrix}.$$

Przykład wybranych zrekonstruowanych punktów I części konturu:



**Rys. 9.** Część odtworzonych punktów naniesiono na wykres.

Dla całego konturu z Rys. 7 umieszczono odtworzone przykładowe punkty:



**Rys. 10.** Część zrekonstruowanych punktów dla konturu z Rys. 7.

MHR jest metodą o złożoności obliczeniowej rzędu  $O(M^2)$  dla obrazu o wymiarach  $M \times M$  pikseli, pozwalającą na dokładne odtworzenie konturu obrazu na podstawie zbioru punktów charakterystycznych. Punkty te mogą być traktowane jako zbiór węzłów kompresji, za pomocą którego została zapamiętana krzywa. MHR jest

metodą bezstratną o wysokim stopniu kompresji. W rozdziale opisano sposób budowy i własności operatora OHR, oszacowano błąd przybliżenia w klasie wielomianów stopnia 1 oraz oszacowano złożoność obliczeniową i podano przykłady obliczeń z zastosowaniem MHR.

## 5. Zakończenie

### Wyniki badań

Operator Hurwitza-Radona (OHR) może zostać wykorzystany w rekonstrukcji konturu obrazu monochromatycznego [9,10]. Podstawą bezstratnej dekompresji z zastosowaniem dyskretnego, ortogonalnego, macierzowego, liniowego operatora OHR jest zapis konturu za pomocą skończonego zbioru punktów charakterystycznych, zwanych węzłami,  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$  w przypadku obrazu płaskiego. Węzły kompresji dobierane są w minimum i maksimum lokalnym jednej ze współrzędnych oraz w punktach leżących pomiędzy ekstremami lokalnymi (co najmniej jeden punkt). Dodatkowo węzły muszą cechować się stałym krokiem współrzędnej  $x_i$  (należy wówczas znaleźć operator  $M$ ) lub stałym krokiem współrzędnej  $y_i$  (wtedy stosuje się operator odwrotny  $M^{-1}$ ). Na podstawie operatorów zbudowanych dla odpowiednich węzłów konstruuje się operator uśredniony, który służy do obliczenia brakujących współrzędnych odtwarzanych punktów. Operator uśredniony jest kombinacją liniową (wypukłą) danych operatorów OHR (10). Współczynniki kombinacji liniowej zależą od położenia odtwarzanego punktu pomiędzy węzłami (Rys. 5). Metoda kompresji i dekompresji została nazwana przez autora niniejszej pracy metodą Macierzy Hurwitza-Radona (MHR). Złożoność obliczeniowa dekompresji za pomocą MHR jest rzędu  $O(N^2)$  przy rekonstrukcji obrazu złożonego z  $N^2$  pikseli. Stopień kompresji zależy od stosunku liczby węzłów do liczby wszystkich punktów obrazu. Dokładność metody w rozprawie doktorskiej oszacowano w klasie ciągłych funkcji schodkowych oraz wielomianów stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego. MHR można zaliczyć do metod kompresji polegających na zbudowaniu modelu matematycznego kompresowanego obiektu, gdyż macierzowe operatory OHR opisują kontur w danym przedziale węzłów.

Opisano sposób konstruowania operatora OHR i operatora odwrotnego oraz ich własności, takie jak: dokładne odtworzenie za pomocą operatora OHR współrzędnych w węzłach, sposób tworzenia operatora OHR o mniejszej złożoności obliczeniowej. Zastosowano operator OHR w metodzie MHR i pokazano cechy MHR, takie jak: minimalna liczba węzłów dla MHR, złożoność obliczeniowa oraz dokładność MHR.

Porównanie MHR z metodą bezstratnej kompresji RLE i metodą stratnej kompresji JPEG na wybranym przykładzie wykazuje wyższość MHR pod względem złożoności obliczeniowej lub rzędu kompresji. Obecnie istniejące metody przybliżania konturu za pomocą wielomianów lub krzywych wyższego rzędu (krzywe Béziera,

Hermita i krzywe B-sklejane) czy inne metody (oparte na teorii grafów, korzystające z Dyskretnej Transformaty Cosinusowej, tworzące szkielet obiektu) są aproksymacją stratną, natomiast MHR zapewnia rekonstrukcję kształtu obiektu z dużą dokładnością. Porównano dokładność rekonstrukcji i złożoność obliczeniową metody Béziera z metodą MHR dla przykładowej krzywej: metoda MHR cechuje się lepszymi parametrami.

Metoda Béziera i krzywe B-sklejane:

- 1) kontur nie zawsze jest odtwarzany dokładnie (krzywa Béziera i krzywe B-sklejane są klasy  $C^2$ , czyli zniekształcenia wystąpią np. w sąsiedztwie punktów konturu, gdzie brak wyższej pochodnej);
- 2) zwiększenie liczby punktów kontrolnych nie zawsze prowadzi do lepszej aproksymacji konturu (możliwe są duże zniekształcenia konturu przy małej zmianie punktów kontrolnych);
- 3) niewielkie przesunięcie jednego punktu kontrolnego może istotnie zmienić całą krzywą (niestabilność metody).

W metodzie MHR dokładność rekonstrukcji dowolnej krzywej uzależniona jest od sposobu wyboru węzłów i liczby węzłów. Dodatkowo przekształcenia geometryczne (przesunięcie, skalowanie oddzielnie każdej współrzędnej, obrót) wymagają jedynie przekształcenia węzłów i odtworzenia obrazu za pomocą MHR z niezmienną złożonością obliczeniową.

Tabela 1. Porównanie złożoności obliczeniowej dekompozycji MHR z użyciem różnych operatorów OHR (liczba  $m$  zależy od ilości węzłów i jest stała dla danej liczby węzłów).

Złożoność obliczeniowa rekonstrukcji konturu złożonego z $N$ pikseli	
wymiar OHR	ilość działań
2x2	$4N+m$
4x4	$6N+m$
8x8	$10N+m$

Tabela 2. Porównanie złożoności obliczeniowej dekompresji metod JPEG i MHR dla przykładowego konturu.

Porównanie złożoności obliczeniowej dekompresji przy kompresji 5%			
JPEG	532224	działań	
MHR	2424	działań	

Tabela 3. Porównanie stopnia kompresji i złożoności obliczeniowej bezstratnej dekompresji metod RLE i MHR dla przykładowego obrazu binarnego.

Porównanie złożoności obliczeniowej dekompresji oraz stopnia kompresji		
RLE	75%	224 działań
MHR	9%	268 działań

MHR może znaleźć również zastosowanie w klasycznej interpolacji funkcji. Interpolacja Lagrange'a czy Newtona posiada wady, jeżeli interpolowana funkcja nie jest różniczkowalna w jakimś punkcie lub różni się znacznie kształtem od wielomianu w danym przedziale węzłów: wówczas wielomian interpolacyjny nie jest w stanie przybliżyć funkcji z zadowalającą dokładnością. MHR przy podobnej złożoności obliczeniowej nie posiada tej wady.

### Kierunki dalszych badań

Dalsze badania przewidywane przez autora będą dotyczyły zastosowania MHR w kompresji i rekonstrukcji obrazu kolorowego oraz wykorzystania MHR w innych dziedzinach nauki. Dokonane zostaną modyfikacje MHR w zależności od posiadanych punktów charakterystycznych, np. w sytuacji, gdy węzły nie posiadają stałego kroku jednej ze współrzędnych lub w przypadku przestrzeni o dowolnym wymiarze. Do budowy operatora można wykorzystać nie tylko kombinacje liniowe macierzy HR o elementach całkowitych  $\{-1;0;1\}$ , lecz także macierzy HR o elementach rzeczywistych: dzięki temu istnieje możliwość wyboru najlepszej bazy spośród wielu baz ortogonalnych w danej sytuacji.

Kompresja i dekompresja z użyciem MHR znajduje zastosowanie nie tylko w przypadku obrazu komputerowego, lecz także może dotyczyć innego typu danych, np. dźwięku. Należy także zastanowić się nad możliwościami wykorzystania innych dyskretnych operatorów macierzowych (nie tylko ortogonalnych) w omawianych zagadnieniach i budowaniu na ich podstawie modeli matematycznych badanych

obiektów (np. obrazu komputerowego czy dźwięku) oraz wykorzystaniu operatorów macierzowych w efektywnych obliczeniowo metodach transformacji danych.

Podsumowując: dalsze badania będą polegały z jednej strony na szukaniu dalszych zastosowań rodziny macierzy Hurwitza-Radona, operatora OHR i metody MHR, z drugiej zaś strony na analizie możliwości wykorzystania innych dyskretnych operatorów macierzowych w istotnych problemach naukowych i technicznych.

## LITERATURA

- [1] Bjoerck A., Dahlquist G.: *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa 1983.
- [2] Demidowicz B.L., Maron I.A., *Metody numeryczne*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965.
- [3] Diggavi S.N., Al-Dhahir N., Stamoulis A., Calderbank A.R.: *Great Expectations: The Value of Spatial Diversity in Wireless Networks*. Proceedings of the IEEE, **92**(2), 219-265, 2004.
- [4] Dryja M., Jankowscy J. i M.: *Przegląd metod numerycznych*. WNT, Warszawa 1988.
- [5] Eckmann B.: *Topology, algebra, analysis- relations and missing links*. Notices of AMS, **46**(5), 520-527, 1999.
- [6] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. Podręczniki Akademickie EIT, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1982.
- [7] Hurwitz A.: *Über die Komposition quadratischer Formen von beliebig vielen Variabeln*. Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 309-316, 1898 (Math. Werke II, 565-571).
- [8] Hurwitz A.: *Über die Komposition der quadratischen Formen*. Math. Ann. Bd. **88**, 1-25, 1923 (Math. Werke II, 641-666).
- [9] Jakóbczak D., Jakubowski J.: *Kompresja i dekompresja krawędzi obrazu 2D z wykorzystaniem dyskretnego, ortogonalnego operatora Hurwitza-Radona*. Zbiór prac "Metody i techniki zarządzania w inżynierii produkcji", Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, 43-70, 2006.
- [10] Jakóbczak D., Kosiński W.: *Operator Hurwitza-Radona w kompresji i rekonstrukcji konturów* (w druku). Publikacja ukaże się w materiałach z konferencji Towarzystwa Przetwarzania Obrazu, Serock 2006.
- [11] Kiciak P.: *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*. WNT, Warszawa 2005.
- [12] Latecki L.J., Lakaemper R.: *Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution*. Computer Vision and Image Understanding, **73**(3), 441-454, 1999.

- [13] Le Buhan Jordan C., Bossen F., Ebrahimi T.: *Scalable Shape Representation for Content Based Visual Data Compression*. International Conference on Image Processing, Santa Barbara, CA, USA, 1997.
- [14] Mostowski A., Stark M.: *Algebra liniowa*. PWN, Warszawa 1958.
- [15] Paulraj A., Nabar R., Gore D.: *Introduction to Space-Time Wireless Communications*. Cambridge University Press 2003.
- [16] Popel D.V.: *Compact Graph Model of Handwritten Images: Integration into Authentication and Recognition*. ArXiv :cs.HC/0207013, 4 July 2002.
- [17] Radon J.: *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*. Abh. Sem. Hamburg **I**, 1-14, 1923.
- [18] Ralston A.: *Wstęp do analizy numerycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
- [19] Sieńko W., Citko W., Jakóbczak D.: *Learning and system modeling via Hamiltonian neural networks*. ICAISC Zakopane'04, 266-271, 2004.
- [20] Spaan F.H.P., Lagendijk R.L., Biemond J.: *Shape Coding Using Polar Coordinates and the Discrete Cosine Transform*. Project DEL55.3671: Mobile Multimedia Communication, the Netherlands Organization for Scientific Research, 1997.
- [21] Tarokh V., Jafarkhani H., Calderbank R.: *Space-Time Block Codes from Orthogonal Designs*. IEEE Transaction on Information Theory, **45**(5), 1456-1467, 1999.
- [22] Vakhania N.: *Orthogonal random vectors and the Hurwitz-Radon-Eckmann theorem*. Proc. of the Georgian Academy of Sciences, Mathematics, **1**(1), 109-125, 1993.
- [23] Wikipedia.pl - encyklopedia internetowa.
- [24] Xiang Bai, Latecki L.J., Wen-Yu Liu: *Skeleton Pruning by Contour Partitioning with Discrete Curve Evolution*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1-37, 2005.
- [25] Zaletelj J., Tasic J.F.: *Optimization and Tracking of Polygon Vertices for Shape Coding*. Springer Berlin / Heidelberg 2003.

**Application of the discrete and orthogonal Hurwitz-Radon operator in the compression and reconstruction of the monochrome image contours**