

Antoni Drapella¹⁾

MODEL PROCESU ZUŻYCIA TYPU WYTRZYMAŁOŚĆ — OBCIĄŻENIE Część pierwsza

STRENGTH — STRESS MODEL OF THE WEAR-OUT PROCESS Part one

STRESZCZENIE Gdy użytkujemy obiekty techniczne, nieuniknione są procesy ich zużycia. Artykuł rozpoczyna się od przedstawienia równania różniczkowego ułożonego z myślą o matematycznej formalizacji procesu zużycia. Fundamentalne są w tym modelu pojęcia wytrzymałości i obciążenia. Obiekt techniczny ma pewną wewnętrzną wytrzymałość umożliwiającą mu „przeciwwstawienie” się obciążeniu, ale w toku procesu traci tę wytrzymałość. Rozwiązanie wspomnianego równania różniczkowego pokazuje, jak proces utraty wytrzymałości, zwany procesem zużycia, przebiega w czasie. Rozpatrywane są zmienne losowe będące czynnikami w istotny sposób wpływającymi na przebieg procesu. Z omawianego rozwiązania wynika, że proces ma trzy fazy: stacjonarną, pośrednią i lawinową. Dobrą strategią jest wycofanie obiektu z użytkowania, zanim rozpocznie się faza lawinowa. Artykuł sugeruje, kiedy tego dokonywać.

Słowa kluczowe:

wytrzymałość, obciążenie, proces zużycia, równanie różniczkowe, zmienna losowa.

ABSTRACT Wear-out processes are very common and, unfortunately, unavoidable whenever technical devices are at work. This paper begins by presenting a differential equation intended to give the mathematical formalization of such a process. Concepts of strength and stress are crucial for this model. The device has an internal strength that enables it to ‘oppose’ the stress. During this process the device steadily loses its strength. Solution of the above mentioned differential equation shows how this process of losing strength called wear-out runs with time. There are three random variables considered impacting the process. The process in question has three phases: stationary, intermediate and avalanche. It is a good policy to preventively withdraw the device from use prior to the avalanche phase. This paper suggests a rule when to undertake such action.

Keywords:

strength, stress, load, wear-out phenomenon, differential equation, random variable.

DOI: 10.5604/0860889X.1114753

¹⁾ Akademia Marynarki Wojennej, Wydział Nawigacji i Uzbrojenia Okrętowego, 81-103 Gdynia, ul. J. Śmidowicza 69; e-mail: adrastat@neostrada.pl

WSTĘP

Niezawodność jako dziedzina nauk technicznych dzieli się na fizykę i statystykę niezawodności. Te poddziedziny nie mają ze sobą wiele wspólnego i jak dotąd podejmowano nieliczne próby, aby je powiązać. Formą powiązania są matematyczne modele fizycznych procesów zużycia. Wśród tych modeli najliczniejsze są modele typu obciążenie — wytrzymałość (MOW). Przykłady MOW można znaleźć w [1, 4, 6]. Bez wątpienia każdy obiekt techniczny wytwarzany jest po to, by wykonywał określone zadanie. Aby obiekt był do tego zdolny, w toku produkcji nadaje mu się stosowne właściwości fizyczne i chemiczne. Termin wytrzymałość ukuto, by połączyć w jedno wszystkie te właściwości. Wypełniając swą funkcję, obiekt techniczny znajduje się pod działaniem obciążenia, które sprawia, że wytrzymałość obiektu stale spada. Gdy spadnie poniżej pewnego określonego poziomu, następuje uszkodzenie. Możliwość obliczenia prawdopodobieństwa tego niepożądanego zdarzenia jest motywacją do tworzenia MOW.

Są dwie kategorie MOW: nieuwzględniające czasu i uwzględniające czas. W modelach należących do pierwszej kategorii zarówno obciążenia, jak i wytrzymałość są zmiennymi losowymi. W modelach należących do drugiej kategorii obciążenie i wytrzymałość są procesami losowymi. Większość modeli, jakie napotykamy w literaturze niezawodnościowej, na przykład [1, 4, 6], należy do tej pierwszej kategorii.

INTRODUCTION

Since the advent of reliability as a branch of engineering science it has been divided into reliability physics and reliability statistics. These sub-branches have had little in common, and unfortunately, up to now, only a few attempts have been made to bridge them together. These bridges were mathematical models of the physical failure processes. Among these, strength — stress models (SSM) are the most numerous. Examples of such models can be found in [1, 4, 6]. Doubtlessly, every device is produced to perform a particular task. For the device to be able to perform that task, particular physical and chemical features were incorporated during the production process. The term strength is coined to combine a set of these features into one all-inclusive feature. Performing a task the device finds itself under a particular stress caused by the load imposed on it, which in turn causes the device to deteriorate steadily and unavoidably.

When strength drops below a critical level, failure occurs. A possible method for calculating the probability of this unwanted event is the reason for developing SSM. There are two categories of SSM: time independent and time dependent. In models that fall into the first category both strength and load are treated as random variables. In contrast, in models that fall into the second category both strength and load are treated as random processes. The majority of SSM that populate reliability literature fall into the first category. These are for instance [1, 4, 6].

Model przedstawiony w niniejszym artykule (i np. w [2]) należy do drugiej kategorii. Proces wynikający z modelu ma trzy fazy: stacjonarną, przejściową i lawinową. Artykuł pokazuje, że dobre jest wycofanie obiektu z użytkowania, zanim rozpocznie się faza lawinowa. Artykuł sugeruje, kiedy tego dokonać.

OZNACZENIA

t	— czas (ogólnie)
t_f	— czas do uszkodzenia
$S(t)$	— wartość chwilowa wytrzymałości
S_o	— obciążenie początkowe
L_o	— obciążenie stałe w czasie
v_o	— prędkość spadku wytrzymałości
p	— prędkość pogarszania stanu
S_{cr}	— wartość krytyczna wytrzymałości

WYPROWADZENIE FORMUŁ

Dynamikę procesu zużycia, o którym mowa w niniejszym artykule, definiuje następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -v_o \cdot \left(\frac{L_o}{S(t)} \right)^p. \quad (1)$$

To samo równanie, lecz przekształcone, by rozwiązać je metodą zmiennych rozdzielonych, zapisujemy następująco:

$$S^p \cdot dS = -v_o \cdot L_o^p \cdot dt. \quad (2a)$$

The model put forward in this paper as well as, for instance, [2] fall into the second category. The process in question has three phases: stationary, intermediate and avalanche. The paper suggests that it may be a good policy to preventively withdraw the device from use prior to the avalanche.

NOTATION

time (in general)
time to failure
instantaneous strength
initial strength
load constant in time
deterioration speed
deterioration parameter
critical value of strength

DERIVATION

The following differential equation defines dynamics of the wear-out process in question:

The same equation but rewritten for solving it by separating variables is:

Całkując obie strony (2a)

Integrating both sides of (2a)

$$\int S^p \cdot dS = -v_o \cdot L_o^p \int dt, \quad (2b)$$

otrzymujemy

we get

$$\frac{1}{p+1} \cdot S^{p+1} = -v_o \cdot L_o^p \cdot t + C. \quad (2c)$$

Wstawiając warunek początkowy postaci $S(t=0) = S_o$, mamy

Putting an initial condition in a form $S(t=0) = S_o$, we determine the integration constant C

$$\frac{1}{p+1} \cdot S_o^{p+1} = v_o \cdot L_o^p \cdot 0 + C. \quad (2d)$$

Stąd wyznaczamy stałą całkowania C

Thus

$$C = \frac{1}{p+1} \cdot S_o^{p+1}. \quad (2e)$$

Wstawiając C do (2c) i dokonując kilku prostych przekształceń, otrzymujemy

Putting C into (2c) and making some simple transformations we get

$$S(t) = S_o \cdot \left[1 - (p+1) \cdot \left(\frac{L_o}{S_o} \right)^p \cdot \frac{v_o \cdot t}{S_o} \right]^{1/(p+1)}. \quad (3)$$

Wprowadźmy dwie nowe zmienne: charakterystyczny czas życia obiektu i parametr skalujący

Let us introduce two new variables: characteristic device lifetime and time rescaling parameter

$$T_o = \frac{S_o}{v_o}; \quad (4a)$$

$$\lambda = (p+1) \cdot \left(\frac{L_o}{S_o} \right)^p. \quad (4b)$$

Wstawiając T_o i λ do (3), otrzymamy wyrażenie na chwilową wytrzymałość względną

$$\frac{S(t)}{S_o} = \left[1 - \frac{\lambda \cdot t}{T_o} \right]^{1/(p+1)} ; \lambda \cdot t \leq T_o. \quad (5)$$

Putting T_o and λ into (3), we obtain the relative instantaneous strength

POZNANIE MODELU POPRZEZ OBLICZENIA I RYSUNKI

Na rysunkach 1. i 2. przedstawiono, jak przebiega proces zużycia. Pokazano na nich również, jak na ten przebieg wpływają parametry L_o i p . Załóżmy, że mamy do czynienia z grupą obiektów wytworzoną zgodnie z określonymi normami i normy te są spełnione. Nie-realistyczne byłoby oczekiwanie, że proces zużycia będzie przebiegał identycznie we wszystkich obiektach stanowiących grupę. Są pewne nieuniknione czynniki sprawcze losowości, głównie S_o , ale także v_o i p . Założymy, że te zmienne podlegają rozkładowi Gaussa (normalnemu). Wartości parametrów podano w tabeli 1.

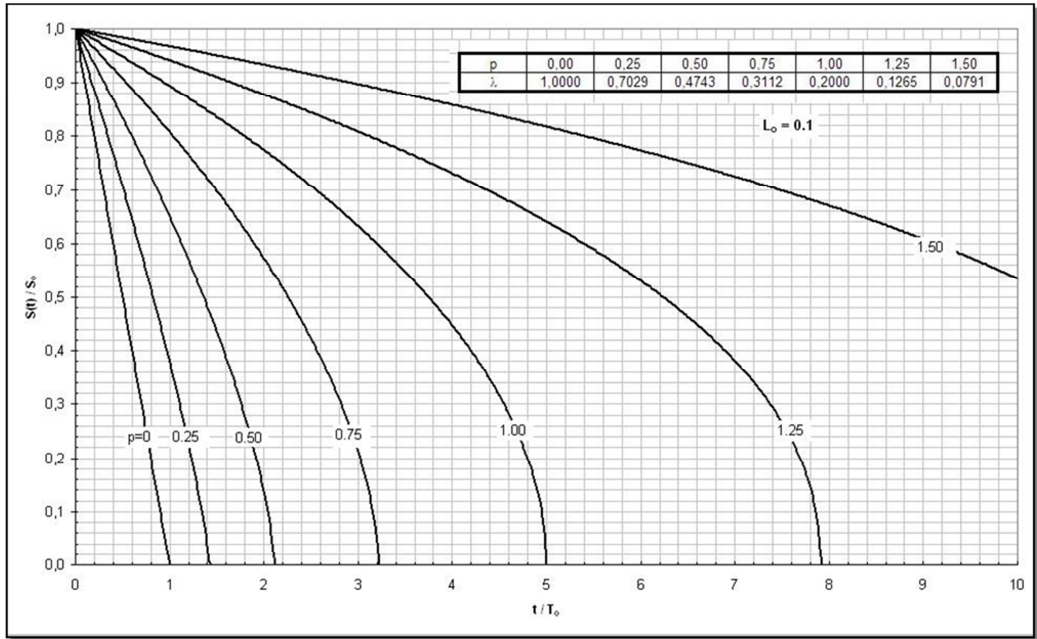
GETTING ACQUAINTED WITH THE MODEL THROUGH FIGURES

Figures 1 and 2 depict how the wear-out process runs and how L_o and p parameters impact the process. Let us assume that we deal with a batch produced according to particular strictly defined technological standards and these standards were fulfilled. Despite this, it would be unrealistic to expect that deterioration processes will run identically in all the devices that comprise this batch. There are unavoidable factors that make S_o (especially) as well as v_o and p be not constants but random variables. We assume these variables to follow the Gaussian probability distribution. Parameters of the distribution of values in question are presented in table 1.

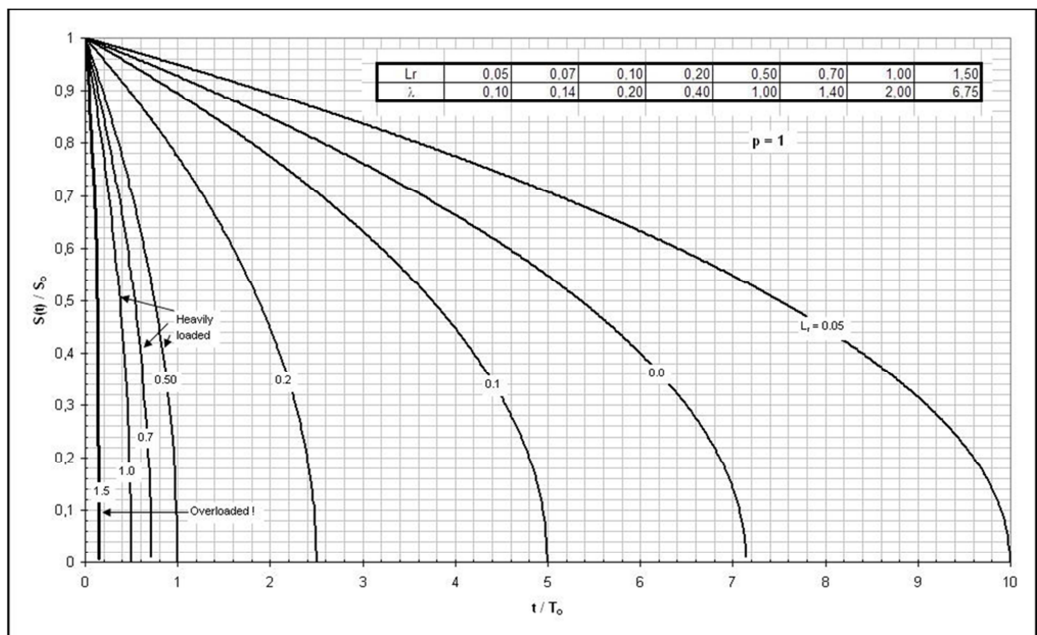
Tabela 1. Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych, od wartości których zależy przebieg procesu

Table 1. Parameters of probability distribution of random variables involved in the process

Zmienna losowa Random variable	Parameter Parameter	
	położenia location	skali scale
S_o	1	0.2
v_o	0.01	0,002
p	2	0.4



Rys. 1. / Fig. 1



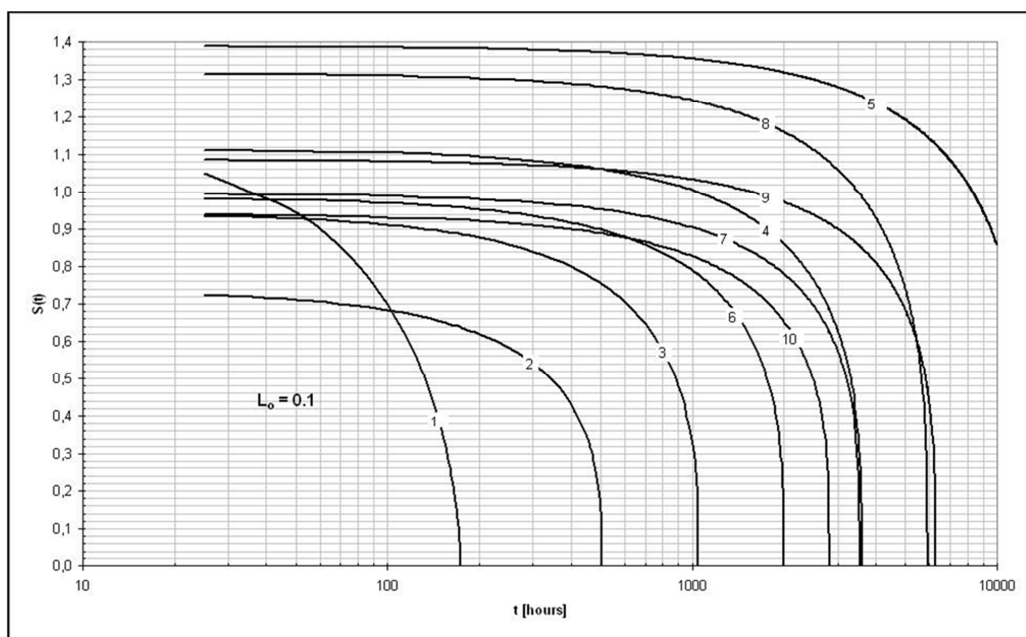
Rys. 2. / Fig. 2

Na rysunku 3. pokazano dziesięć trajektorii tego procesu. Wielkości losowe determinujące te trajektorie uzyskano z generatora liczb losowych i podano w tabeli 2.

Figure 3 shows ten trajectories of the process. Random values that determined these trajectories were obtained with the random number generator. Table 2 contains values of the parameters of these process trajectories.

Tabela 2. Parametry trajektorii procesów / Table 2. Parameters of process trajectories

Lp. / No.	S_0	v_0 [1/h]	p	λ	T_0 [h]	T_0/λ
1	1,1492	0,0224	0,7225	0,29516	51,3546	174
2	0,7366	0,0238	1,9370	0,06138	30,9681	504
3	0,9431	0,0232	1,9259	0,03884	40,6366	1046
4	1,1143	0,0169	2,1341	0,01827	65,7723	3600
5	1,3888	0,0151	2,3245	0,00734	91,9273	12526
6	0,9860	0,0202	2,1189	0,02444	48,8969	2001
7	0,9971	0,0204	2,3940	0,01379	48,8632	3542
8	1,3169	0,0229	2,2558	0,00971	57,4369	5916
9	1,0860	0,0179	2,4651	0,00969	60,7848	6273
10	0,9417	0,0211	2,3932	0,01584	44,5943	2815



Rys. 3. / Fig. 3

DOBÓR MODELU DO DANYCH

Proces, jakiego dotyczy ten artykuł, jest procesem losowym. W momencie, gdy zostaje zainicjowany, jego trajektoria zostaje wytyczona przez trzy realizacje trzech zmiennych losowych: S_o, p, v_o . Potem przez całe swoje „życie” proces jest deterministyczny. Deterministyczny proces losowy jest sprzeczny z tym, co nasuwa na myśl fraza proces losowy — bardzo szybko „trzęsącą się” wzdłuż osi czasu krzywą ukazującą szum.

Założmy, że $S(t)$ jest mierzalną fizyczną cechą obiektu i pomierzono n wartości chwilowych $S_o^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$ w punktach czasowych $t_o, t_1, t_2, \dots, t_n$. Chcemy oszacować parametry procesu. Są dwie możliwe sytuacje.

Sytuacja 1.

Estymacja poprzez interpolację

Tak należy estymować, gdy pomiary nie są ani obarczone błędem, ani zastrumione. Wstawiając $t_o = 0$, otrzymujemy oszacowanie $S_o = S_o^*$. Następnie należy ułożyć układ dwóch równań nieliniowych:

$$S_i^* = S_o^* \cdot \left[1 - (p+1) \cdot \left(\frac{L_o}{S_o^*} \right)^p \cdot \frac{v_o \cdot t_i}{S_o^*} \right]^{1/(p+1)} ; \quad i = 1, 2. \quad (6a)$$

Sytuacja 2.

Estymacja przez aproksymację

Tak należy estymować, gdy pomiary są obarczone błędem i zastrumione. Jeżeli istnieją przesłanki, by sądzić, że błędy

FITTING THE MODEL TO DATA

The process this paper deals with is the random process. At the moment when the wear-out process is initiated, its trajectory is determined by three random variables namely S_o, p, v_o . Then, for all its 'life' the process is deterministic. The deterministic random process is at odds with what is commonly thought when the term 'random process' appears as a curve very rapidly 'shaking' itself along a time axis depicting noises.

Let us assume that $S(t)$ is a measurable physical property of the device and we have n instantaneous values $S_o^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$ measured respectively at $t_o, t_1, t_2, \dots, t_n$. We want to estimate parameters of the process. There are two cases.

Case 1.

Estimation by interpolation

Recommended when there are no measurement errors, no external noises imposed on the wear-out process observed. Putting $t_o = 0$, we obtain an immediate estimate of $S_o = S_o^*$. Next we form a system two nonlinear equations:

Case 2.

Estimation by approximation

Recommended when there are measurement errors and external noises imposed. If these noises and errors are

te i zakłócenia podlegają rozkładowi normalnemu z wartością średnią równą zero, wówczas należy zastosować metodę najmniejszych kwadratów. Funkcja celu ma postać:

$$G(S_o, p, v_o) = \sum_{i=1}^n \left\{ S_i^* - S_o \cdot \left[1 - (p+1) \cdot \left(\frac{L_o}{S_o} \right)^p \cdot \frac{v_o \cdot t_i}{S_o} \right]^{1/(p+1)} \right\}^2 \quad (6b)$$

PODSUMOWANIE: JAK ZASTOSOWAĆ MODEL

Przyjrzyjmy się wnikliwie rysunkowi 3. Wynika z niego, że proces ma trzy fazy: stacjonarną, pośrednią i lawinową. Uzasadnione wydaje się wycofanie obiektu z użycia lub zastąpienie go nowym, zanim zacznie się faza lawinowa. Takie działanie uprzedzające powinno nastąpić w fazie pośredniej. Zalecenie to w mniejszym lub większym stopniu dotyczy wszystkich procesów składających się na pokazaną kolekcję. Ponieważ $S(t)$ jest monotonicznie rosnącą i wypukłą w górę funkcją czasu i jej pierwsza pochodna ma te same właściwości, można przyjąć krzywiznę funkcji $S'(t)$ jako podstawę decyzji, kiedy faza pośrednia zaczyna się, a kiedy kończy. Mając fazę pośrednią umiejscowioną na osi czasu, można próbować ustalić moment profilaktycznego wycofywania obiektu. Oznaczmy:

$$f(t) = S'(t), \quad f'(t) = S''(t), \quad f''(t) = S'''(t) \quad (7a)$$

expected to be normally distributed with the mean value equal to zero the least square method is to be applied. The appropriate goal function has a form:

CONCLUDING BY SKETCHING HOW TO APPLY THE MODEL

Let us look at figure 3 carefully. This figure makes it evident that the process has three phases: stationary, intermediate and avalanche. It seems reasonable to withdraw the device from action or replace it with another device prior to the avalanche phase starting. This recommendation is more or less relevant to all the processes comprising the collection. Since $S(t)$ is a strictly decreasing and convex upward function of time and its first derivative $S'(t)$ has the same properties, we can take the curvature of $S'(t)$ as a base for deciding when the intermediate phase starts and ends. Having the intermediate phase located on the time scale we can set the moment of preventive action.

Let us denote:

oraz

and

$$a = S_o, \quad b = (p+1) \cdot \left(\frac{L_o}{S_o}\right)^p \cdot \frac{v_o}{S_o}, \quad u = \frac{1}{p+1}. \quad (7b)$$

Podstawiając do (3), otrzymujemy

It gives

$$S(t) = a \cdot (1 - b \cdot t)^u \quad (7c)$$

oraz

and

$$\begin{aligned} f(t) &= -a \cdot b \cdot u \cdot (1 - b \cdot t)^{u-1}, \\ f'(t) &= a \cdot b^2 \cdot u \cdot (u-1) \cdot (1 - b \cdot t)^{u-2}, \\ f''(t) &= -a \cdot b^3 \cdot u \cdot (u-1) \cdot (u-2) \cdot (1 - b \cdot t)^{u-3}. \end{aligned} \quad (7d)$$

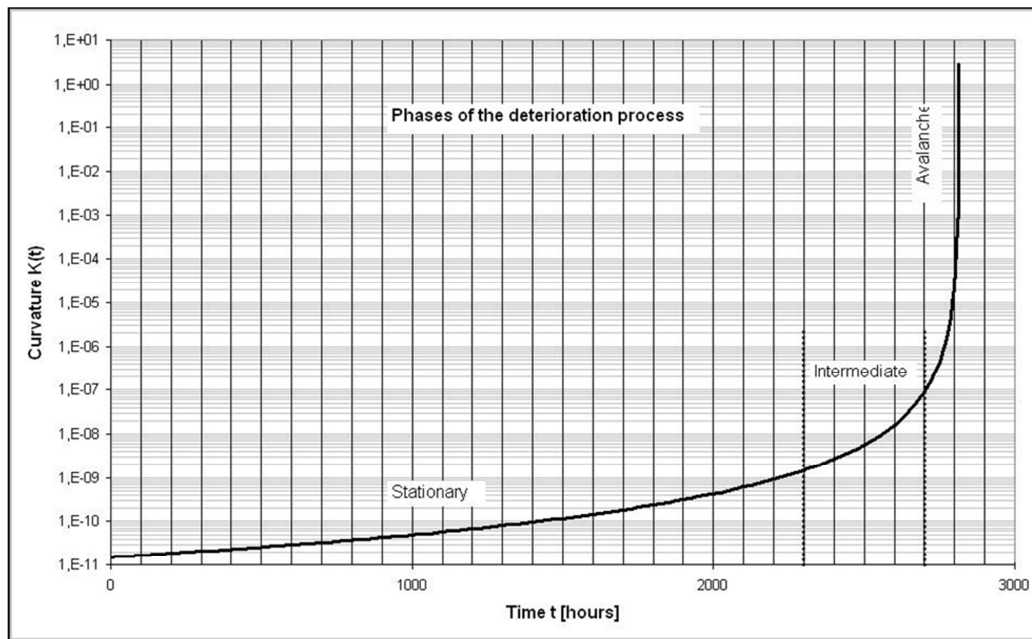
Wyznamy teraz krzywiznę $K(t)$ szybkości procesu spadku wytrzymałości. Ta krzywizna będzie z kolei służyć nam do określenia, kiedy faza pośrednia zaczyna się, a kiedy kończy.

Now we determine curvature $K(t)$ of the speed $S'(t)$ of the process. This curvature will, in turn, serve us to determine when the intermediate phase starts and ends.

$$K(t) = \frac{f''(t)}{\left[1 + (f'(t))^2\right]^{3/2}}. \quad (7e)$$

Na rysunku 4. pokazano, jak specyficznie przebiega funkcja $K(t)$, co uzasadnia dokonany podział procesu na fazy.

Figure 4 shows how specifically $K(t)$ runs and legitimates the proposed partition into phases.



Rys. 4. / Fig. 4

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] An Z-W., Huang H-Z., Liu Y., *A discrete strength — stress inference model based on universal generating function*, 'Reliab. Eng. Syst. Safety', 2008, Vol. 93, No 10, pp. 1485–1490.
- [2] Drapella A., *An extended mathematical models for failure kinetics*, 'QRE International', 1992, Vol. 8, pp. 371–373.
- [3] Drapella A., *Lifetime models and renewal processes. Mathematical treatment with Mathcad*, Published by Pomeranian Academy in Słupsk, 2005.
- [4] Huang H-Z., An Z-W., *A discrete Stress-strength Inference Model with Stress Dependent Strength*, 'IEEE Trans. Reliab.', 2009, Vol. 58, No 1.
- [5] Karpiński J., Firkowicz S., *Zasady profilaktyki obiektów technicznych [Rules of preventive maintenance of technical objects — available in the Polish]*, PWN, Warszawa 1981.
- [6] Kotz S., Lumelski Y., Pensky M., *The strength Model and its Generalization*, World Scientific, Singapore 2003.