

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI

Dr. inż. Karol TUCKI

Mgr inż. Katarzyna GRABOWSKA

Institute of Mechanical Engineering, Department of Production Engineering

Warsaw University of Life Sciences – SGGW, Warsaw, Poland

Instytut Inżynierii Mechanicznej, Katedra Inżynierii Produkcji, SGGW w Warszawie, Polska

PORÓWNANIE METOD MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO KSZTAŁTU SKORUPY JAJ KURZYCH®

Comparison of methods for mathematical modeling of the shell shape of hen's eggs®

Słowa kluczowe: jaja kurze, powierzchnia skorupy, metody modelowania.

W artykule przedstawiono dwie metody matematycznego modelowania powierzchni kształtu skorupy jaja kurzego. Bryłę 3D wg Mieszkalskiego złożono z powierzchni zewnętrznej skorupy, stosując krzywą Bezierra, którą obracano według osi Z układu współrzędnych. Model matematyczny bryły 3D opiera się na długości osi długiej i krótkiej jaja oraz na współrzędnych punktów węzłowych i kontrolnych. Wg Prestona podłużny kontur jaja (model 2D) można opisać za pomocą czterech parametrów. Kontur zdefiniowany za pomocą metody Prestona pozwolił na określenie objętości i porównanie jej do wyników opracowań Stonehouse-a i Coulson-a. Wizualizacje modeli 2D i 3D wykonano w programie Mathcad. W proponowanych metodach nie uwzględniono wewnętrznej struktury jaja kurzego.

Key words: hen's eggs, shell surface, modelling method.

The article shows two methods for mathematically modelling the surface of the shell of a hen's egg. The 3D block of Mieszkalski was composed from the outside of the shell using the Bezier curve, which was rotated according to the Z-axis of the coordinate system. The mathematical model of the 3D body is based on the length of the long and short axis of the egg and the coordinates of the nodes and control points. According to Preston, the elongated contour of the egg (model 2D) can be described with four parameters. The contour defined by the Preston method made it possible to determine the volume and compare it with the results of Stonehouse and Coulson. The visualizations of the 2D and 3D models were created with Mathcad. The methods proposed do not take into account the internal structure of the hen's egg.

WSTĘP

Światowa produkcja jaj kurzych od lat wykazuje tendencję wzrostową [5]. Polska jest jednym z największych eksporterów tego asortymentu w Unii Europejskiej [3]. Podaż jaj z produkcji krajowej znacząco przewyższa zapotrzebowanie rynku wewnętrznego.

W dalszym ciągu, pomimo rozwoju technologii, wyzwaniem są metody selekcji jaj przeznaczonych do inkubacji [4]. Wsparcie tego procesu mogą stanowić metody obliczeniowe i graficzne.

Z geometrycznego punktu widzenia jajo ptasie jako ciało biologiczne jest ułożone prosto. Jednak specyfika kształtów jaj u różnych gatunków ptaków generuje pewne trudności w trakcie ich opisu i klasyfikacji. W warunkach terenowych jest możliwość wykonania tylko dwóch pomiarów z jaja: średnicy i długości. Z pewnością nie jest to wystarczające do pełnego opisu kształtu. Dodatkowe parametry można pobrać

albo z rzutu płaskiego (plany, zdjęcia) lub za pomocą specjalnie skonstruowanych urządzeń [7].

Alimardani i in. porównali dwie metody modelowania wielkości jaj, wykorzystując algorytm przetwarzania obrazu, który oblicza mniejszą i większą średnicę jajka. W pierwszej metodzie zaproponowano model matematyczny. W drugiej zastosowano technikę sztucznej sieci neuronowej (ANN – Artificial Neural Networks) do oszacowania objętości jaja. Objętość jaj wyznaczona tymi metodami została porównana statystycznie z wartościami rzeczywistymi. Wyniki wskazały, że modelowanie matematyczne dało bardziej satysfakcjonujące rezultaty [9].

W 2009 roku Buchar i in. przedstawili wyznaczenie geometrii skorupy jaja, wykorzystujące i analizujące cyfrowy obraz jaja oraz techniki detekcji krawędzi. Wykryte punkty na konturze jaja zostały dopasowane za pomocą szeregu Fouriera. Uzyskane równania opisujące profil jaja posłużyły

do obliczenia objętości, powierzchni i promienia krzywizny jaja z dużo większą dokładnością w porównaniu z wcześniej publikowanymi podejściami. Wykazano, że promienie krzywizny w punktach krytycznych profilu jaja (ostry koniec, tępy koniec i wartość maksymalna) są niezależne od indeksu kształtu jaja. Pole powierzchni jaja jest jednowartościową funkcją objętości jaja. Dzięki temu istnieje możliwość dokładnego oszacowania tej wielkości na podstawie doświadczalnie stwierdzonej wartości objętości jaja. Ocenę kształtu jaja i jego dalszych parametrów na podstawie cyfrowego obrazu jaja można przeprowadzić w bardzo krótkim czasie (rzędu sekund) przy pomocy np. programu MATLAB. Procedura ta może więc poprawić efektywność obliczeń, co jest bardzo przydatne w przemyśle drobiarskim i/lub badaniach biologicznych oraz rozszerza i udoskonala wcześniej publikowane metody [1].

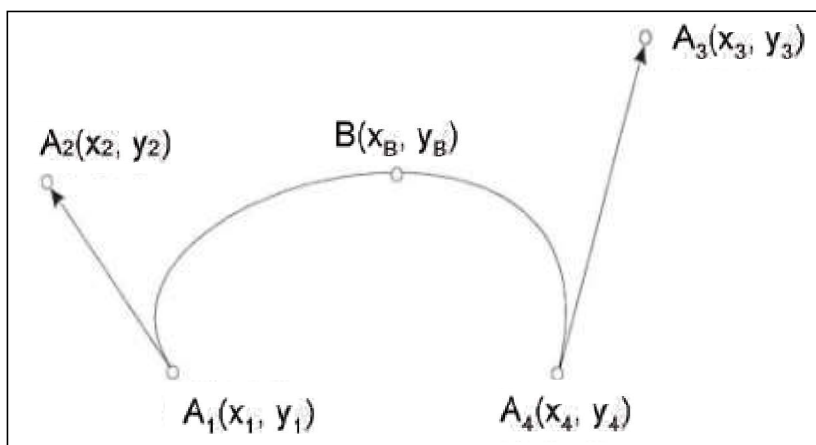
Celem artykułu jest przedstawienie dwóch metod matematycznego modelowania kształtu skorupy jaj kurzych oraz porównanie wyników z trzech wzorów na ich objętość.

MATERIAŁY I METODY

Materiałem badawczym było jajo kurze o następujących wymiarach: długość [a] – 65mm, średnica max [b] – 46mm, średnica min [c] – 46mm. Wybrane jajko było czyste, średniej wielkości, o gładkiej skorupce, bez uszkodzeń mechanicznych. Jajko zmierzono suwmiarką, następnie sfotografowano i wczytano do programu Inkscape. Obraz przeskalowano i wyznaczono kontury poprzecznych przekrojów jaja. Na podstawie krzywych Beziera wyznaczono współrzędne punktów kontrolnych i węzłowych. Za pomocą programu Mathcad zwizualizowano modele 2D i 3D według poniżej przedstawionego schematu.

Wymiary: długość a, średnica max b, średnica min c:

$$[a \ b \ c] = [65 \ 46 \ 46] \quad (1)$$



Rys. 1. Segment kubiczny krzywej Beziera: $x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4$ – współrzędne punktów węzłowych; $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ – współrzędne punktów kontrolnych.

Fig. 1. Cubic segment of the Bezier curve: $x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4$ – coordinates of the nodes; $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ – coordinates of the control points.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [6]

Source: Own study based on [6]

Współrzędne punktów węzłowych i kontrolnych dla krzywej wyznaczono wg rysunku 1. W macierzy (2) zamiast wymiaru z osi Y, wykorzystano wymiar z osi Z.

$$\begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 24.38 & 65 \\ 35.4 & 1.19 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Na podstawie powyższych współrzędnych, wyznaczono równania parametryczne krzywej Béziera opisujące kontury jaja, które mają następującą postać:

$$x_i = \left(x_1 \times \left(1 - \frac{i}{N} \right)^3 + x_2 \times 3 \times \frac{i}{N} \times \left(1 - \frac{i}{N} \right)^2 + x_3 \times 3 \times \left(\frac{i}{N} \right)^2 \times \left(1 - \frac{i}{N} \right) + x_4 \times \left(\frac{i}{N} \right)^3 \right) \quad (3)$$

$$z_i = \left(z_1 \times \left(1 - \frac{i}{N} \right)^3 + z_2 \times 3 \times \frac{i}{N} \times \left(1 - \frac{i}{N} \right)^2 + z_3 \times 3 \times \left(\frac{i}{N} \right)^2 \times \left(1 - \frac{i}{N} \right) + z_4 \times \left(\frac{i}{N} \right)^3 \right) \quad (4)$$

gdzie: i – liczba wierszy w macierzy;
 N – rozmiar macierzy.

Kąt obrotu krzywej Béziera obliczono na podstawie wzoru:

$$s_j = \frac{2 \times \pi \times j}{N} \quad (5)$$

gdzie: j – liczba kolumn w macierzy.

W celu uzyskania powierzchni 3D jaja, krzywe Beziera obrócono względem osi Z wykorzystując poniższe równania (6), (7), (8):

$$X_{a_{i,j}} = x_i \times \sin(s_j) \quad (6)$$

$$Y_{a_{i,j}} = x_i \times \cos(s_j) \quad (7)$$

$$Z_{a_{i,j}} = z_i \quad (8)$$

Poniżej przedstawiono wyskalowane macierzowe równania współrzędnych X, Y, Z opisujące kształt zewnętrzny skorupy (9), (10), (11).

$$X = \frac{b}{\max(Xa) + (-1 \times \min(Xa))} \times Xa \quad (9)$$

$$Y = \frac{c}{\max(Ya) + (-1 \times \min(Ya))} \times Ya \quad (10)$$

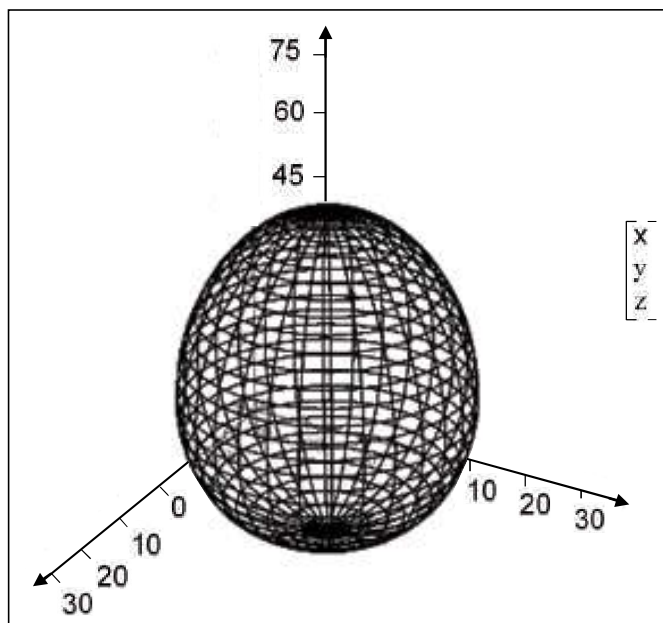
$$Z = \frac{a}{\max(Za) + (-1 \times \min(Za))} \times Za \quad (11)$$

Bryłę jaja (rys. 2) złożono na podstawie modelu matematycznego opisującego powierzchnię zewnętrzną skorupy.

$$\max(X) + (-1 \times \min(X)) = 46 \quad (12)$$

$$\max(Y) + (-1 \times \min(Y)) = 46 \quad (13)$$

$$\max(Z) + (-1 \times \min(Z)) = 65 \quad (14)$$



Rys. 2. Model 3D bryły jaja kurzego.

Fig. 2. 3D-model of the hen's egg.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Drugi model matematyczny opisujący charakterystykę skorupy jajka kurzego został przedstawiony na podstawie wzorów Prestona [8].

W macierzy (15) zapisano współczynniki, które różnią się w zależności od jaja i muszą być znalezione doświadczalnie.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Równania parametryczne przekroju podłużnego jaja przedstawiono poniżej (16):

$$\begin{aligned} x_{1il} &= \frac{b}{2} \times \cos(\theta_{il}) \times (1 + c_1 \times \\ &\times \sin(\theta_{il}) + c_2 \times \sin(\theta_{il})^2 + \\ &+ c_3 \times \sin(\theta_{il})^3 + c_4 \times \sin(\theta_{il})^4) \end{aligned} \quad (16)$$

$$y_{1il} = \frac{-1 \times a}{2} \times \sin(\theta_{il}) + \frac{a}{2} \quad (17)$$

gdzie: a – punkt położony w połowie między dwoma końcami jaja;

b – połowa długości jaja

$$il = 0 \dots 2 \times N \quad (18)$$

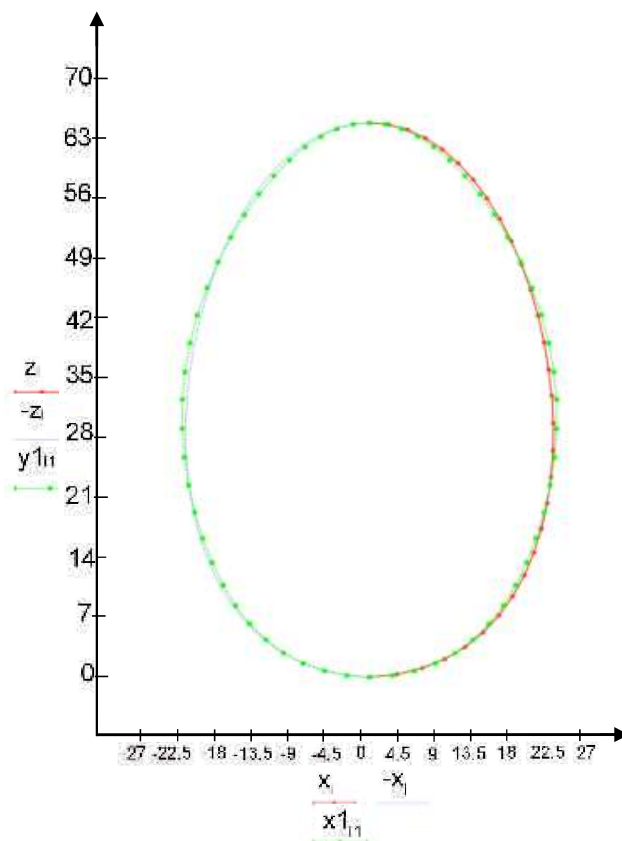
gdzie: N – rozmiar macierzy (przyjęto N=60)

$$\theta_{il} = il \times 2 \times \frac{\pi}{N \times 2} \quad (19)$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykres jaja z modelu Prestona, dla którego:

$$\max(x1) + (-1 \times \min(x1)) = 46,04 \quad (20)$$

$$\max(y1) + (-1 \times \min(y1)) = 65 \quad (21)$$



Rys. 3. Wykres jaja z modelu Prestona.

Fig. 3. Egg graph for the Preston model.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Porównanie modelu 3D skonstruowanego z krzywych Béziera z modelem Prestona przedstawiono poniżej:

$$n = 0 \dots 15 \quad (22)$$

gdzie: n – numer kolejnego przekroju.

$$\Delta x_n = x_{15-n} - x_{160-n} \quad (23)$$

$$\Delta y_n = z_{15-n} - y_{160-n} \quad (24)$$

$$\Delta x_{1n} = x_{15+n} - x_{1n} \quad (25)$$

$$\Delta y_{1n} = z_{15+n} - y_{1n} \quad (26)$$

$$\Delta 1_n = \frac{\sqrt{(x_{15-n} - x_{160-n})^2 + (z_{15-n} - y_{160-n})^2}}{+ (z_{15-n} - y_{160-n})^2} \quad (27)$$

$$\Delta 2_n = \sqrt{(x_{15+n} - x_{1_n})^2 + (z_{15+n} - y_{1_n})^2} \quad (28)$$

$$\Delta 1_n = \begin{bmatrix} 0,734 \\ 0,688 \\ 0,585 \\ 0,428 \\ 0,288 \\ 0,353 \\ 0,578 \\ 0,814 \\ 1,003 \\ 1,118 \\ 1,147 \\ 1,087 \\ 0,94 \\ 0,708 \\ 0,396 \\ 3,507 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Delta 2_n = \begin{bmatrix} 0,734 \\ 0,758 \\ 0,815 \\ 0,942 \\ 1,121 \\ 1,309 \\ 1,468 \\ 1,573 \\ 1,615 \\ 1,599 \\ 1,53 \\ 1,414 \\ 1,243 \\ 0,989 \\ 0,599 \\ 1,648 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Objętość jaja wg Prestona wyrażono zależnością matematyczną poniżej:

$$VP = \frac{\pi}{6} \times 1 \times a \times (1 \times b)^2 \times \left(1 + \frac{2}{5} \times c_2\right) \quad (31)$$

$$VP = 6,914 \times 10^4 \quad (32)$$

Objętość wg Stonehouse obejmuje jajko łącznie ze skorupką – przedstawiono poniżej [10]:

$$VS1 = 0,524 \times 1 \times a \times (1 \times b)^2 \quad (33)$$

$$VS1 = 7,207 \times 10^4 \quad (34)$$

$$\frac{(VP-VS1)}{VP} * 100 = -4,246 \quad (35)$$

$$VS2 = 0,51 \times (a \times (b)^2) \quad (36)$$

$$VS2 = 7,015 \times 10^4 \quad (37)$$

$$\frac{(VP-VS2)}{VP} * 100 = -1,461 \quad (38)$$

Objętość wg Coulson [2] została oszacowana na podstawie objętości wewnętrznej, gdzie przyjmuje się, że wynosi ona 0,487.

$$VC = 0,487 \times (a \times (b)^2) \quad (39)$$

$$VC = 6,698 \times 10^4 \quad (40)$$

$$\frac{(VP-VC)}{VP} * 100 = 3,114 \quad (41)$$

PODSUMOWANIE

Przybliżone metody dają możliwość generowania modeli 2D i 3D jaj kurzych. Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że modele z dużą dokładnością odwzorowują kształt skorupy. Równania przedstawione w modelu 3D zawierają parametry takie jak: długość osi krótkiej i długiej, współrzędne punktów kontrolnych i węzłowych odczytanych z krzywej Béziera. Model matematyczny Prestona korzysta z takich wymiarów jak długość, szerokość i asymetria. Dzięki wygenerowanemu konturowi możemy określić objętość, a objętość nie może być oszacowana na mniejszej liczbie pomiarów. Różnice w wynikach objętości jajka wynikają z różnych założeń przyjętych do obliczeń np. niektórzy autorzy wzorami opisują objętość jajka łącznie ze skorupką, a niektórzy z wyłączeniem skorupki. Wzór wg Stonehouse wyraża objętość całkowitą razem ze skorupką, a wynik wg Coulsona pokazuje objętość z wyłączeniem skorupki jajka kurzego.

SUMMARY

Approximate methods offer the possibility to generate 2D and 3D models of chicken eggs. Analysis shows that the models reflect the shape of the egg shell very accurately. The equations presented in the 3D model include parameters such as the length of the short axis and the long axis, the coordinates of the control points and nodes that are read from the Bézier curve. Preston's mathematical model uses dimensions such as length, width, and asymmetry. With the created contour we can determine the volume. The different results of the egg volume are due to different calculation assumptions, e.g. some authors use formulas to describe the volume of the egg including the shell and some with the exception of the shell. The Stonehouse formula gives the total volume including the shell and the Coulson result shows the volume without the shell of a chicken egg.

REFERENCES

- [1] **BUCHAR J., Š. NEDOMOVÁ, L. SEVERA. 2009.** “Influence of hen egg shape on eggshell compressive strength”. *International Agrophysics* 23: 249–256.
- [2] **COULSON J.C. 1963.** “Egg size and shape in the Kittiwake (*Rissa tridactyla*) and their use in estimating age composition of populations”. *Proc. Zool. Soc. London* 140: 211–227.
- [3] **CZAKOWSKI D. 2015.** „Zasobowe i efektywnościowe uwarunkowania produkcji drobiu i jaj w Polsce z perspektywy akcesji do Unii Europejskiej”. *Stowarzyszenie Ekonomistów Rolnictwa i Agrobiznesu, Roczniki Naukowe* 8: 20–25.
- [4] **DAMAZIAK K., M. PAWESKA, D. GOZDOWSKI, J. NIEMIEC. 2018.** “Short periods of incubation, egg turning during storage and broiler breeder hens age for early development of embryos, hatching results, chicks quality and juvenile growth”. *Poultry Science*: 3264–3276.
- [5] **MARELLI S.P., M. MADEDDU, M.G. MANGIAGALLI, S. CEROLINI, L. ZANIBONI. 2021.** “Egg Production Systems, Open Space Allowance and Their Effects on Physical Parameters and Fatty Acid Profile in Commercial Eggs”. *Animals* 11: 265.
- [6] **MIESZKALSKI L. 2002.** „Analiza krzywych Bézierra stosowanych do modelowania nieregularnych kształtów obiektów biologicznych”. *Acta Agrophysica* 78: 159–170.
- [7] **NAGY G.F. 2002.** Some Remarks to the Paper „The Goose that Laid the Golden Egg”. *KoG*, 6: 67–69.
- [8] **PRESTON F.W. 1974.** “The volume of an egg”. *Auk* 91: 132–138.
- [9] **SOLTANI M., R. ALIMARDANI, M. OMID. 2015.** “Egg volume prediction using machine vision technique based on pappus theorem and artificial neural network”. *Journal of Food Science and Technology* 52: 3065–3071.
- [10] **STONEHOUSE B. 1966.** “Egg volumes from linear dimensions”. *Emu* 65: 227–228.

REFERENCES

- [1] **BUCHAR J., S. NEDOMOVA, L. SEVERA. 2009.** “Influence of hen egg shape on eggshell compressive strength”. *International Agrophysics* 23: 249–256.
- [2] **COULSON J.C. 1963.** “Egg size and shape in the Kittiwake (*Rissa tridactyla*) and their use in estimating age composition of populations”. *Proc. Zool. Soc. London* 140: 211–227.
- [3] **CZAKOWSKI D. 2015.** „Zasobowe i efektywnościowe uwarunkowania produkcji drobiu i jaj w Polsce z perspektywy akcesji do Unii Europejskiej”. *Stowarzyszenie Ekonomistów Rolnictwa i Agrobiznesu, Roczniki Naukowe* 8: 20–25.
- [4] **DAMAZIAK K., M. PAWESKA, D. GOZDOWSKI, J. NIEMIEC. 2018.** “Short periods of incubation, egg turning during storage and broiler breeder hens age for early development of embryos, hatching results, chicks quality and juvenile growth”. *Poultry Science*: 3264–3276.
- [5] **MARELLI S.P., M. MADEDDU, M.G. MANGIAGALLI, S. CEROLINI, L. ZANIBONI. 2021.** “Egg Production Systems, Open Space Allowance and Their Effects on Physical Parameters and Fatty Acid Profile in Commercial Eggs”. *Animals* 11: 265.
- [6] **MIESZKALSKI L. 2002.** „Analiza krzywych Bézierra stosowanych do modelowania nieregularnych kształtów obiektów biologicznych”. *Acta Agrophysica* 78: 159–170.
- [7] **NAGY G.F. 2002.** Some Remarks to the Paper „The Goose that Laid the Golden Egg”. *KoG*, 6: 67–69.
- [8] **PRESTON F.W. 1974.** “The volume of an egg”. *Auk* 91: 132–138.
- [9] **SOLTANI M., R. ALIMARDANI, M. OMID. 2015.** “Egg volume prediction using machine vision technique based on pappus theorem and artificial neural network”. *Journal of Food Science and Technology* 52: 3065–3071.
- [10] **STONEHOUSE B. 1966.** “Egg volumes from linear dimensions”. *Emu* 65: 227–228.